

中等专业学校试用教材

# 概率与数理统计

主 编 王仁成 关石菡  
副主编 郭晓芸 赵文超

大连海运学院出版社

PDG

中等专业学校试用教材

# 概 率 与 数 理 统 计

主 编 王仁成 关石菡  
副主编 郭晓芸 赵文超

大连海运学院出版社

(辽)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

概率与数理统计/王仁成,关石菡主编. —大连:大连海运学院出版社,1994. 1

ISBN 7-5632-0716-3

I. 概… I. ①王…②关… III. ①概率论-基本知识②数理统计-基本知识 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 00221 号

大连海运学院出版社出版

(大 连)

大连海运学院出版社印刷厂印刷 大连海运学院出版社发行

1994 年 1 月第 1 版 1994 年 1 月第 1 次印刷

开本:787×1092 1/32 印张:7.75

字数:168 千 印数:0001—1500

定价:6.80 元

## 内 容 简 介

本书主要内容有随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及其分布、参数估计、假设检验和一元线性回归分析等。各章附有小结,并附有适量的习题及习题答案。

本书可作为中等专业学校招收初、高中毕业生的工科专业教材,也可供有关技术人员参考。

## 前 言

概率与数理统计是研究随机现象客观规律性的一门科学,应用十分广泛,它具有其独特的思维和方法,是工科中等专业学校一门重要的技术基础课。也是工程技术人员、企业或经济管理人员必备的教学工具。

本书是以一九九一年国家教委职业教育司审订的《工科中等专业学校数学教学大纲》为依据编写的。可作为中等专业学校工科各专业的试用教材,也可供有关技术、管理人员参考。全书教学时数为 50 学时左右。

在编写过程中,力求职业技术教育的特点,以培养技术应用性人才为目标,故在保证数学学科的系统性、逻辑性的基础上,理论阐述以必需、够用为度,加强应用性,安排了工业生产实例,力求达到学以致用目的。

在编排格式上尽量做到通俗易懂,每章前有内容提要,每章末有本章小结,便于自学。

参加本书编写的有:营口市纺织工业学校关石菡、辽宁省纺织工业学校王仁成、郭晓芸、赵文超、李英华、朱淑英。

主编:王仁成、关石菡;副主编:郭晓芸、赵文超。由辽宁省纺织工业学校高级讲师于晓瑞主审。

本书在编写过程中,得到了大连海运学院出版社、辽宁省纺织工业学校领导的大力支持和帮助,在此一并表示衷心感

谢。由于编者水平有限,错误和不妥之处在所难免,恳请广大教师和读者批评指正。

编 者

1993 年 8 月于大连

# 目 录

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| 引言.....               | (1)   |
| 第一章 随机事件及其概率.....     | (4)   |
| § 1-1 随机事件 .....      | (4)   |
| § 1-2 事件间的关系与运算 ..... | (9)   |
| § 1-3 事件的概率.....      | (16)  |
| § 1-4 条件概率.....       | (28)  |
| § 1-5 独立性.....        | (36)  |
| 本章小结 .....            | (44)  |
| 复习题一 .....            | (45)  |
| 第二章 随机变量及其概率分布 .....  | (48)  |
| § 2-1 随机变量的概念.....    | (48)  |
| § 2-2 离散型随机变量.....    | (52)  |
| § 2-3 分布函数及其性质.....   | (61)  |
| § 2-4 连续型随机变量.....    | (66)  |
| § 2-5 随机变量函数的分布.....  | (77)  |
| 本章小结 .....            | (83)  |
| 复习题二 .....            | (85)  |
| 第三章 随机变量的数字特征 .....   | (87)  |
| § 3-1 数学期望.....       | (87)  |
| § 3-2 方 差.....        | (95)  |
| 本章小结 .....            | (99)  |
| 复习题三.....             | (102) |

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| <b>第四章 样本及其分布</b> .....     | (104) |
| § 4-1 总体与样本 .....           | (105) |
| § 4-2 分布密度的近似求法 .....       | (107) |
| § 4-3 几个常用统计量及其分布 .....     | (113) |
| 本章小结.....                   | (125) |
| 复习题四.....                   | (128) |
| <b>第五章 参数估计</b> .....       | (130) |
| § 5-1 点估计 .....             | (130) |
| § 5-2 区间估计 .....            | (142) |
| 本章小结.....                   | (151) |
| 复习题五.....                   | (153) |
| <b>第六章 假设检验</b> .....       | (154) |
| § 6-1 假设检验的基本思想 .....       | (154) |
| § 6-2 $U$ 检验 .....          | (159) |
| § 6-3 $t$ 检验.....           | (164) |
| § 6-4 $\chi^2$ 检验 .....     | (171) |
| § 6-5 $F$ 检验 .....          | (177) |
| 本章小结.....                   | (180) |
| 复习题六.....                   | (184) |
| <b>第七章 一元线性回归分析</b> .....   | (186) |
| § 7-1 一元线性回归方程 .....        | (187) |
| § 7-2 线性关系的显著性检验 .....      | (193) |
| § 7-3 利用回归方程进行预测 .....      | (197) |
| 本章小结.....                   | (200) |
| 复习题七.....                   | (201) |
| <b>附录一 排列组合与二项式公式</b> ..... | (202) |

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| <b>附录二 常用数理统计表</b> ..... | (205) |
| 附表 1 标准正态分布表 .....       | (205) |
| 附表 2 泊松分布表 .....         | (208) |
| 附表 3 $\chi^2$ 分布表 .....  | (210) |
| 附表 4 $t$ 分布表 .....       | (212) |
| 附表 5 $F$ 分布表 .....       | (213) |
| 附表 6 相关系数检验表 .....       | (222) |
| <b>习题答案</b> .....        | (223) |

# 引 言

概率论与数理统计应用到人口调查、社会保险以及生物遗传等方面已经有许多年的历史了,近代物理、化学的发展为概率论与数理统计在自然科学方面的应用开辟了广阔的园地。例如,分子物理学中所研究的分子运动及其相互间的作用,由于分子为数众多,且每个分子运动所遵循的规律又异常复杂,故不能用普通数学中的微分方法去处理,只有应用概率论的方法才得以适当解决。随着工业生产的标准化与自动化,概率论与数理统计又被广泛地应用到产品质量的控制上面,经验证明,利用数理统计方法,能够有效地提高产品质量和降低成本。近年来,计算技术的迅速发展为概率论与数理统计的应用提供了更有利的条件。随着其应用范围的日益扩大,概率论与数理统计的内容更加丰富、完善,而且一些新兴学科,如运筹学、自动控制理论等,由于使用了概率论和数理统计的方法而日臻完善。

概率论和数理统计在实际中的应用主要有:

(1)科学地表达某件事物的一种性质

一件物品的重量、质量等性质,可用一个数字表示;一批物品的重量、质量等性质,则需一组数据表达。要了解它们的综合性质,就必须用一个或多个综合指标来描述。应用数理统计的“统计推断”方法就可以解决这一问题。

(2)比较两个事物的差异

不同的两台机床生产同一种产品,比较其产品质量是否有差异,差异值多大,并科学地得出结论,就要应用数理统计的“假设检验”方法。

### (3)分析造成差异的原因

有差异,那么造成这种差异的原因是什么呢?例如,通过对两台机床生产的同一种产品进行检验后,发现二者的产品质量确实有差异,而造成这种差异的因素可能有很多,或是原材料质量不同,或是生产工艺参数不同,或是管理水平、技术素质不同,或是测试仪表的方法不同,也可能是几方面因素综合作用而引起产品质量的差异。对这一类比较复杂的问题,运用数理统计的“统计分析”方法,就可以得出哪些因素是存在的,哪些因素是影响产品质量的主要方面,并可得知这些因素所产生影响的大小。

### (4)探讨一事物两种性质间的关系

在实际应用中,属于这一类型的问题相当多,如在纺织工程中,布机速度与经纱断头率间的关系,细纱捻系数与细纱强力间的关系。梳棉机上刺辊速度与一克生条中“结杂”粒数间的关系,车间温湿度与产品质量间的关系等等。运用数理统计的“相关分析”方法就能在一定程度上(精度范围内)有效地判定它们之间是否相关及相关程度如何问题。

### (5)讨论合理的抽样与测试方法

我们对产品进行大批量或具破坏性的检验时,不能采用逐个检验的方法,只能采取抽样测试方法。应用数理统计的“抽样检验”方法,以少量的样品去推断和估计产品的集体性质。

### (6)对产品质量进行预报预测

目前普遍推广的全面质量管理方法,是以数理统计作为基本手段,以产品质量为核心,在生产的全过程中,对产品的质量进行检验和控制;及时发出信息,预告产品质量的变动情况,它摒弃了仅靠事后质量检验的旧方法,可以预防大量次品的产生,使不合格产品消灭在萌芽状态,从而保证了产品的优质。

#### (7)设计合理的试验方案

在生产实际和科学研究中,常需要做很多试验,试验设计得好,就能用较少的试验次数取得较好的试验结果;试验设计得不好,试验次数多,既浪费人力、物力、财力,又得不到满意的效果。运用数理统计的“正交试验设计”和“方差分析”方法,既可以提供合理的试验设计方案,又可以对试验结果进行分析,得出最佳效果。

在科技高速发展的今天,学习和掌握概率论与数理统计的理论和方法对于我们来说是非常重要的。

# 第一章 随机事件及其概率

概率论是一门使人感兴趣的数学分支。它起始于十七世纪,二百年来,由于人们对它的认识的逐步加深而逐渐深入到现在科学的各个领域,人们应用概率论的知识去预测事件并发现新的事实。

概率论与数理统计是研究什么的呢?

概率论是从数量侧面研究随机现象的统计规律性的一门数学学科。

数理统计是在概率论的基础上研究对于统计资料进行整理、分析、推断的方法与原理。

本章首先介绍随机试验与样本空间的概念,在此基础上引入概率的概念,然后介绍条件概率与事件的独立性,古典概型与独立试验概型。通过学习,要求:

1. 理解随机试验、样本空间和随机事件等概念,并能作事件的运算;
2. 理解概率的定义及概率的一些性质;
3. 能计算一些简单的古典概型问题。

本章的重点是:随机事件及其概率。

## § 1-1 随机事件

### 一、随机现象

先看几个例子:

**例1** 任意抛掷一枚硬币，“正面朝上”(国徽面)；很显然，结果预先不能知道。

**例2** 某人向靶子射击，“击中3环”；结果不能预知。

**例3** 从一批灯泡中任取一只，测试其使用寿命，“寿命为1083小时”；结果不能预知。

**例4** 在标准大气压下， $100^{\circ}\text{C}$ 的纯水“沸腾”；结果可以肯定——是必然的。

**例5** 常温下的“铁被熔化了”；结果可以肯定——是不可能的。

上述例子中，有的事先不能肯定其结果，有的事先可以肯定其结果，在生产、生活和科学实践中，类似的现象很多，大体上，自然界的现象可归结为两大类：

一类是：在一定条件下必然会发出某种结果的现象，称为**确定性现象**。确定性现象又包括必然现象和不可能现象。在一定条件下，必然会发生的现象，称为**必然现象**(如例4)。在一定条件下，必然不会发生的现象称为**不可能现象**(如例5)。

另一类是：在一定条件下，可能发生，也可能不发生的现象，称为**随机现象**。例1、例2、例3都是随机现象，随机现象就是结果不能预知的现象。

高等数学就确定性现象进行了详尽而大量的分析讨论；概率论则以随机现象为研究对象，通过数量反映出来的统计规律性探讨事物的性质。

## 二、随机试验与随机事件

概率论是通过随机试验研究随机现象的。

通常我们把对某一事物的某个特征的观察(或观测)称为**试验**。

注意到例 1、例 2、例 3 几个试验都有以下特点：

1. 试验可以在相同的条件下重复进行；
2. 每次试验的可能结果不只一个，并且事先能确知试验的全部可能结果；
3. 每次试验前不可能预知哪一个结果会发生。

我们称具有以上三个特点的试验为随机试验，简称试验，记作  $E$ 。

例 1、例 2、例 3 均为随机试验，分别记为  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $E_3$ 。

我们把随机试验中可能发生也可能不发生的事情称为随机事件，简称事件。通常用  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ……表示。

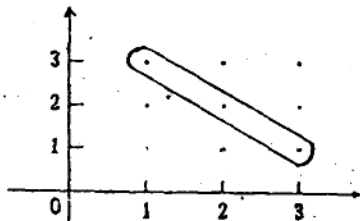
试验  $E_1$  中，“正面朝上”、“反面朝上”； $E_2$  中，“击中 3 环”、“击中 5 环”、“至少击中 7 环”、“击中的环数不少于 5 环”； $E_3$  中，“灯泡的使用寿命在 1850 至 2000 小时之间”等都是随机事件。

事件的表示法类似于集合的表示法。

描述法： $A$ ：“正面朝上”， $B$ ：“至少击中 9 环”；

列举法： $B = \{9, 10\}$ ；

图示法：



$C$ ：“两点之和为 4”

### 三、样本空间

在一次试验中,它的每一个可能出现的结果都是这个试验的最简单的随机事件,称为基本事件。基本事件的特点是:在一次试验中,当且仅当一个基本事件发生,基本事件的全体称为样本空间。通常用 $\Omega$ 表示, $\Omega$ 中的点就是基本事件,也称为样本点,例如:

在 $E_1$ 中,基本事件只有两个:“正面朝上”和“反面朝上”,若用 $\omega_1$ 表示“正面朝上”, $\omega_2$ 表示“反面朝上”,则样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ 。

在 $E_2$ 中,基本事件有11个,若用 $\omega_i$ 表示“击中 $i$ 环”( $i=0,1,\dots,10$ ),则样本空间 $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{10}\}$ ,或 $\Omega = \{\omega_i | i=0,1,2,\dots,10\}$ 或 $\Omega = \{0,1,2,\dots,10\}$

在 $E_3$ 中,假定“灯泡的使用寿命”记为 $\omega (0 \leq \omega \leq T)$ , $T$ 为某一正实数,则样本空间 $\Omega = \{\omega | 0 \leq \omega \leq T\}$ 。

在一次试验中,由若干个基本事件复合而成的事件称为复合事件。例如:“至少击中7环”是由基本事件“击中7环”、“击中8环”、“击中9环”、“击中10环”组成。

在每次试验中,必然发生的事件称为必然事件,因为 $\Omega$ 是由试验中所有基本事件组成,而在任何一次试验中,当且仅当 $\Omega$ 中的基本事件之一发生,所以一个试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 也就是必然事件,因而必然事件也用 $\Omega$ 表示。

在每次试验中,必然不发生的事件称为不可能事件,记为 $\emptyset$ 。

必然事件和不可能事件都是确定性现象的表现,我们把它们作为随机事件的两个特例,这对以后的研究是很方便的。

应该注意的几个问题:

1. 样本空间中的元素——基本事件,是由随机试验的目的决定的。例如测量一群人的身高,则样本空间  $\Omega = \{h | a \leq h \leq b\}$  (单位:厘米,  $a, b$  均为实数), 区间  $[a, b]$  内任一实数都是一个基本事件;但若测量身高  $h$  是为了确定乘客是否买票,则此时样本空间  $\Omega = \{\text{全票}, \text{半票}, \text{免票}\}$ , 只包含三个基本事件。因此在实际问题中,弄清试验目的,从而决定样本空间是由哪些基本事件构成的是十分重要的。

2. 基本事件是最简单的随机事件,而随机事件又是由若干基本事件复合而成,因此随机事件是样本空间的子集。

3. 若构成样本空间的基本事件的个数是有限的(例 1, 例 2), 称为有限空间;若构成样本空间的基本事件的个数是无限的(例 3), 则称为无限空间。

### 习题 1-1

1. 举例说明什么是基本事件、随机事件、样本空间?

2. 指出下列事件中哪些是必然事件、不可能事件、随机事件:

(1) “北京明年五月一日最高气温不低于  $24^{\circ}\text{C}$ ”;

(2) “没有水份,但种子仍发芽”;

(3) “某公共汽车站有 5 人在候车”;

(4) “上抛一物体,经过一段时间,这物体落在地面上”;

(5) “从一副扑克牌中任抽一张得 ‘A’”;

(6) “无外力作用时,作等速直线运动的物体继续作等速直线运动”;

(7) “下个月纺织厂生产的棉布全是合格品”;

(8)  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c$  为实数,且  $a \neq 0$ ), 若  $b^2 - 4ac > 0$ , 则方程存在两个相等的实数根”;