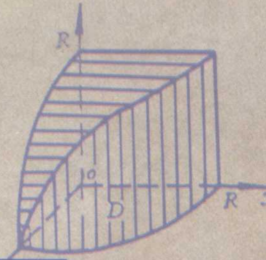
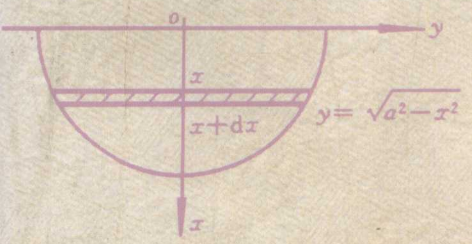
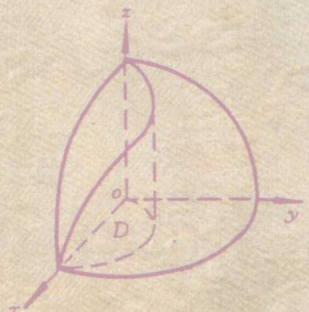
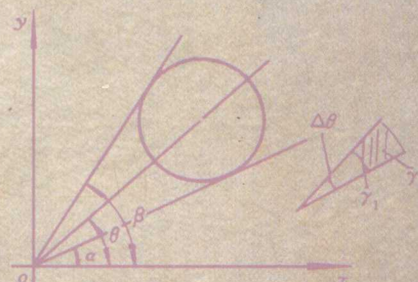
高等数学学习指导

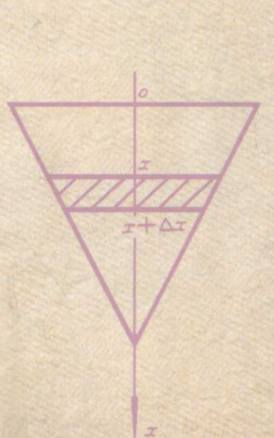


编著　李绍宽









GAODENG SHUXUE XUEXIZHIDAO

中国纺织大学出版社

高等数学学习指导

中国纺织大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/李绍宽编．上海:中国纺织大学出版社,1999.7
ISBN 7-81038-224-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．李…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 20473 号

责任编辑　邵　静
封面设计　殷淑荣

高等数学学习指导

李绍宽　编著

中国纺织大学出版社出版

(上海市延安西路 1882 号　邮政编码:200051)

新华书店上海发行所发行　昆山亭林印刷总厂印刷

开本:787×1092　1/16　印张:18.75　字数:456 千字

1999 年 9 月第 1 版　2000 年 5 月第 2 次印刷

印数:4 001—8 000

ISBN 7-81038-224-1/O・10

定价:28.00 元

内 容 提 要

本书是大学高等数学的学习指导书。主要内容有函数与极限、导数与微分、微分中值定理、不定积分、定积分、定积分应用、向量代数和空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、级数、微分方程等，所含内容深广度，达到工科各专业相应的要求。本书编写中着重分析各概念的意义和作用，传授解题时分析问题的方法和技巧。

本书适宜为工科各专业大学生学习高等数学时的参考书，亦可供教学与自学参考。

序　言

高等数学是工科大学生一门重要的基础课，同学在学习高等数学时经常遇到很多困难。如何帮助大学生学好高等数学，提高高等数学的教学水平，一直是我们考虑的问题。在长期的高等数学教学过程中，自己注意积累这方面的材料，把一些经验和体会记下来，成了写成本书的基本素材。

本书旨在帮助同学克服学习高等数学的困难，着重说明概念的意义和作用，介绍分析问题的方法，总结解题的类型和技巧。例如，讲极限的定义时，着重说明用极限定义证明时如何抓住主要矛盾；在讲导数时，着重讲了导数定义在解题中的作用；在讲中值定理时，着重分析了每个条件的作用和每个中值定理的作用，并对各种问题进行分类；在讲定积分时讲了定义的作用，对不定积分总结出“拆、凑、代、分”的方法等等。这些都是自己教学中的一些经验和体会，相信对读者在学习高等数学过程中是会有帮助的。

本书在编排上基本和同济大学《高等数学》同步，按章节进行；但我们又把一些前后有联系的内容作了说明，这样有助于同学理解整个高等数学的内容。在每一章我们也安排了一些有难度的习题。为了减少读者的困难，在最后我们给出了习题的全部答案。

本书写好后，先用讲义的形式在中国纺织大学用了两年，而且也在研究生复习班上用了几年。不少青年教师在阅读了讲义以后，感到对教学工作很有帮助。实践下来，大家感到这是一本对学习和教学都很有帮助的参考书。

由于自己的水平和经验有限，本书中肯定还存在不少缺点和不足之处，本书的编辑和审稿同志已经帮助改正了不少问题，但难免还有遗漏之处，恳请指正。

编者　李绍宽

1999 年 4 月 16 日

目　录

第1章 函数与极限

1.1 初等函数

初等函数是高等数学研究的主要对象。什么是初等函数？基本初等函数经过有限次代数运算、复合运算、反函数运算而得到的函数称为初等函数。

1. 函数的基本要素

$y=f(x)$的基本要素是定义域D_f，对应规则f，两个函数一致的判别主要看这两个要素。

例1 $y=\sqrt{x^2}$， $y=x$ 是否为同一个函数？

$y=(\sqrt{x})^2$，$y=|x|$是否为同一个函数？

解 $y=\sqrt{x^2}$，$y=x$的定义域相同，都为$(-\infty,+\infty)$，但当$x<0$时，$\sqrt{x^2}=-x$，而不等于x，从而它们对应规则不同。

而$y=(\sqrt{x})^2$，$y=|x|$的定义域分别为$[0,\infty)$，$(-\infty,+\infty)$是不同的，它们不是同一个函数。

函数$y=f(x)$的值域$R_f=\{f(x)|x\in D_f\}$也是经常要求的一个问题。怎样求函数的值域？一个常用的方法是利用反函数，即若它的反函数存在，则反函数的定义域就是原函数的值域。一般地，$R_f=\{y|f(x)=y$ 对 x 在 D 中有解$\}$。

例2 求函数$y=x+\dfrac{1}{x}$的值域。

解 $x^2-xy+1=0$

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$$

从而$y^2-4\geqslant 0$，$|y|\geqslant 2$，即$R_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$。

2. 函数的代数运算

两个函数$y=f(x)$，$y=g(x)$，进行加、减、乘、除运算等，主要要注意定义域的变化。$y=f(x)\pm g(x)$，$y=f(x)\cdot g(x)$的定义域为$D_f\cap D_g$，而$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$的定义域还要求$g(x)\neq 0$，即为$D_f\cap\{x\in D_g:g(x)\neq 0\}$。

作为代数运算的例子。

例1 $y=f(x)$为定义在$(-a,a)$上的函数，证明一定存在$(-a,a)$上定义的奇函数$\varphi(x)$和偶函数$\psi(x)$满足

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$

而且这个分解是唯一的。

证 取 $\psi(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，$\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，则 $\psi(x)$ 为偶函数，$\varphi(x)$ 为奇函数，且

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$

反之若 $f(x)$ 分解为 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 之和，而 $\varphi(x)$ 为奇函数，$\psi(x)$ 为偶函数，则

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$
$$f(-x)=\varphi(-x)+\psi(x)=-\varphi(x)+\psi(x)$$

从而 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，$\psi(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，因此这个分解是唯一的。

我们称这个分解为 $f(x)$ 的奇偶分解，例对 $y=e^x$，它对应的奇偶分解为

$$\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \text{——双曲正弦函数，}$$

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \text{——双曲余弦函数。}$$

3. 反函数运算

函数 $y=f(x)$ 有反函数的条件是对 D_f 中两点 $x_1\neq x_2$，对应有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，即称 f 为一对一的，这时对值域中 $y\in R_f$，存在唯一的 $x\in D_f$，使 $f=f(x)$，将 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上将函数 $x=\varphi(y)$ 写为 $y=\varphi(x)$，这样，$y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图形关于 $y=x$ 对称，它们之间有

$$f[\varphi(x)]=x,\quad x\in R_f,$$
$$\varphi[f(x)]=x,\quad x\in D_f。$$

求反函数的方法：从 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$，则 $y=\varphi(x)$ 即为 $y=f(x)$ 的反函数。

例 1 求 $y=\mathrm{sh}(x)$ 的反函数。

解 从 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 解出

$$x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$$

从而 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为 $y=\mathrm{sh}x$ 的反函数。

4. 复合函数运算

复合函数运算是高等数学中最基本的一个运算，它在高等数学的运算中起着重要的作用。

$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，它的定义域为 $\{x|\ x\in D_\varphi,\varphi(x)\in D_f\}$，这个集合有时可能为空集。这时，我们称这两个函数不能复合。

这里，我们不但要学会如何将几个函数复合成一个函数，而且要学会如何把一个复杂的函数分解为几个基本的函数复合，这个分解过程就是一个"加括号"的过程。

例 1 $\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$，$\psi(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$。

求 $\varphi[\psi(x)]$，$\psi[\varphi(x)]$。

解 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}0 & \psi(x)\leqslant 0\\ \varphi(x) & \psi(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\leqslant 0, x>0\\ 0 & x\in\varnothing\end{cases}=0$；

$$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}0 & \varphi(x)\leqslant 0\\ -\varphi(x)^2 & \varphi(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}=\psi(x)。$$

例 2　将 $y=\sin^3 x^2$ 分解成基本函数的复合。

解　$y=u^3, u=\sin v, v=x^2$。

5. 初等函数

基本初等函数有：

常值函数 $y=c$；

幂函数 $y=x^a$；

指数函数 $y=a^x$；

对数函数 $y=\log_a x$；

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$。

由基本初等函数经过有限次代数运算、复合运算和反函数运算所得到的函数称为初等函数。

怎样判别一个函数是不是初等函数是一个困难的问题，这里有一个基本原则：能用一个解析表达写出来的函数基本上都是初等函数。

例 1　证明 $y=x^x$ 是初等函数。

证　因为 $y=x^x=e^{x\ln x}$，从而它由 $y=e^u, u=x\ln x$ 复合而成，这是一个初等函数。

例 2　$y=|x|$为初等函数。

证　$y=|x|=\sqrt{x^2}$，它由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而来，从而是初等函数。

例 3　若 $f(x), g(x)$ 为初等函数，则 $y=\max[f(x), g(x)]$也是初等函数。

证　由于 $y=\max[f(x), g(x)]=\dfrac{|f(x)-g(x)|+[f(x)+g(x)]}{2}$，

从而由 $f(x), g(x)$为初等函数可知 $\max[f(x), g(x)]$仍为初等函数。

这里将一个函数表达为基本初等函数的复合运算是一个重要的运算形式。

要证明一个函数不是初等函数的方法主要是利用初等函数的基本性质——初等函数在定义域中都是连续的（见连续性章节），例 $y=\operatorname{sgn} x$ 一定不是初等函数。

1.2 极　　限

极限是高等数学的基本运算，它贯串于整个高等数学的全过程，几乎所有的概念都离不开极限，因此使学生掌握和了解极限的概念、思想和方法，是学好高等数学的关键所在。

1. 极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$：　$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N$，当 $n>N$，$|a_n-A|<\varepsilon$。

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$： $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-A|<\varepsilon$。

……

几点说明：

(1)定义中有四句话：1，4 是由极限的趋向而定，2，3 是由自变量的趋向而定，定义的关键是由 1，2 组中，对任意的 $\varepsilon(M)$，找到 $\delta(N,X)$，使 3，4 成立。

(2)极限的意义：当 $x(n)$ 变化到要求方向的一定程度之后，$f(x)$，(a_n) 与 A 差不多(误差可小于你事先给定任意小的 ε)。**注意：不是一开始 $f(x)$ 与 A 差不多，而是到一定程度以后。**

从几何上看，对以 A 为中心的任意小的开区间 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 找到以 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$，$x \neq x_0$，$f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$。

(3)定义的用处：极限的定义有以下几个用途：

①推导极限的性质(见极限的性质)，由 ε 的任意性，选取适当的 ε，以达到你要求的目的。

②推导极限的法则(见极限的法则)。

③证明极限的等式(见极限的证明)，对任意 $\varepsilon>0$，找到要求的 $\delta(N)$。

2. 极限的性质

极限的性质是由定义直接推导出来。

(1)极限的局部性质：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 的情况只与 $f(x)$ 在 x_0 的附近有关，即：

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$，而存在 $\delta_0>0$，对 $|x-x_0|<\delta_0$，$g(x)=f(x)$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)=A$。(**从极限只能推出 $f(x)$ 在 x_0 的附近具有某种性质。**)

证 对 $\varepsilon>0$，因 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，取 $\delta_1=\min(\delta,\delta_0)$，则当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时 $f(x)=g(x)$，$|f(x)-A|<\varepsilon$，从而 $|g(x)-A|<\varepsilon$，因此有 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)=A$。

(2)保号性：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A>B$，则存在 $\delta>0$，$0<|x-x_0|<\delta$，$f(x)>B$。

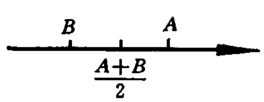


图 1-1

证 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0$，存在 $\delta>0$，$0<|x-x_0|<\delta$，

$$|f(x)-A|<\frac{A-B}{2},$$

从而

$$f(x)>A-\frac{A-B}{2}=\frac{A-B}{2}+B。$$

3. 极限等式的证明

这种问题是训练学生对极限定义了解的重要途径，在证明中注意抓住主要矛盾，证明的方法是可以先限制 $|x-x_0|<\delta_1$，再放不等式，解出 $|x-x_0|<\delta_2$，求出要求的 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$。

例 1　证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{1}{3}$。

证　对 $\varepsilon>0$，设 $|x-1|<1$

$$\left|\frac{x-1}{2x^2-x-1}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{x-1}{(2x+1)(x-1)}-\frac{1}{3}\right|=$$

$$\left|\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{2(x-1)}{3(2x+1)}\right|<2|x-1|<\varepsilon$$

$|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，取 $\delta=\min(\dfrac{\varepsilon}{2},1)$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{x-1}{2x^2-x-1}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$$

所以
$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2x^2-x-1}=\frac{1}{3}。$$

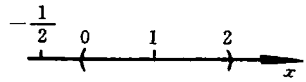


图 1-2

例 2　证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{\tan x}=\infty$。

证　$M>0$，设 $|x|<\dfrac{1}{2}$

$$\left|\frac{x+1}{\tan x}\right|=\left|\frac{\cos x}{\sin x}(x+1)\right|>\frac{(\cos\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}}{|\sin x|}>M$$

$$|\sin x|<\frac{2^{-1}M^{-1}}{\cos\frac{1}{2}}$$

$$|x|<\arcsin\frac{2^{-1}M^{-1}}{\cos\frac{1}{2}}$$

取 $\delta=\min(\dfrac{1}{2},\arcsin\dfrac{2^{-1}M^{-1}}{\cos\frac{1}{2}})$，当 $0<|x|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{x+1}{\tan x}\right|>M$$

所以
$$\lim_{x\to0}\frac{x+1}{\tan x}=\infty。$$

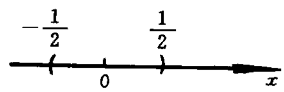


图 1-3

例 3　$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$。

证　对 $\varepsilon>0$

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|$$
$$\leqslant|x-x_0|<\varepsilon$$

取 $\delta=\varepsilon$，$|x-x_0|<\delta$ 时，$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$，从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$。

例 4　$\lim\limits_{x\to x_0}e^x=e^{x_0}$。

证　对 $\varepsilon>0$

$$|e^x-e^{x_0}|<\varepsilon$$
$$|e^{x-x_0}-1|<\varepsilon e^{-x_0}$$
$$-\varepsilon e^{-x_0}<e^{x-x_0}-1<\varepsilon e^{-x_0}$$
$$1-\varepsilon e^{-x_0}<e^{x-x_0}<\varepsilon e^{-x_0}+1$$

不妨设　$1-\varepsilon e^{-x_0}>0$（若 <0，左边不等式一定成立），

这时有

$$\ln(1-\varepsilon e^{-x_0})<x-x_0<\ln(1+\varepsilon e^{-x_0})$$

取 $\delta=\min(\ln(1+\varepsilon e^{-x_0}),-\ln(1-\varepsilon e^{-x_0}))$，则 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|e^x-e^{x_0}|<\varepsilon$$

从而

$$\lim_{x\to x_0} e^x=e^{x_0}。$$

同样可以证明：对一切基本初等函数 $y=f(x)$，$x_0\in D_f$ 成立

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)。$$

4．极限的法则

极限的法则也可以由定义直接证明。

例 1 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，$x\neq x_0$，$\varphi(x)\neq u_0$

则有

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=A。$$

证 对 $\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，存在 $\eta>0$，$0<|u-u_0|<\eta$，$|f(u)-A|<\varepsilon$。

又对 η，由 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，存在 $\delta>0$，$0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$0\neq|\varphi(x)-u_0|<\eta$$

从而这时，有

$$|f[\varphi(x)]-A|<\varepsilon$$

即有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A。$$

注：这是一个非常重要的法则，$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]\xlongequal[\substack{x\to x_0\\ \varphi(x)\to u_0}]{u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$**这是极限计算中换元的依据，这种求极限的方法我们称之为换元法。**例如：已知极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

我们立即可求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ 如下

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\xlongequal[\substack{x=\ln(1+u)\\ x\to 0,u\to 0}]{u=e^x-1}\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=1。$$

另外，由此可知函数极限与序列极限的关系：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 成立的充要条件，对一切 $x_n\to x_0$，$(x_n\neq x_0)$ 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

这是极限讨论的一个基本方法——用于说明极限不存在与极限的等式不成立。

例 2 说明 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在。

解 取 $x_n=n\pi\to\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$

取 $x_n'=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\to\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n'=1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x$ 不存在。

例 3　说明 $x\to\infty$，$x\cos x$ 不是无穷大。

解　取 $x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}\to\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cos x_n=0$，从而 $x\to\infty$，$x\cos x$ 不是无穷大。

由基本初等函数极限公式与极限的运算法则，复合函数法则可知对一切初等函数 $y=f(x)$，$x_0\in D_f$，成立

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

这样：极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的计算问题归结为：① $x_0\overline{\in}D_f$，　② $f(x)$ 不是初等函数。

5．几个重要的极限

在 $x_0\overline{\in}D_f$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的计算，需要几个重要的极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。

这由　$\sin x<x<\tan x\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$

导出
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

从而　$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<1-\cos x$

而知
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

而 $\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数，故有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。

由这个极限可导出以下几个相关的极限：

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$。

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}$。

这个极限是用一个有关极限的单调准则而导出的，这个 e 是自然对数的底，在高等数学中起着重要的作用。

单调准则：一个有界单调数列必有极限。

它是实数连续性公理的一个形式，下面利用这个准则来说明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在。

首先说明 $(1+\frac{1}{n})^n$ 有界。

$(1+\frac{1}{n})^n=1+1+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\times\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}\times\frac{1}{n^3}+\cdots+$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-1+n)}{n!}\frac{1}{n^n}<$$

$$1+1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\cdots+\frac{1}{n!}<$$

$$1+1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\frac{1}{n\times(n-1)}=$$

$$3-\frac{1}{n}<3$$

其次，由

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=1+1+\frac{(n+1)n}{1\times2}\times\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+$$

$$\frac{(n+1)n\cdots(n+1-1+n)}{n!}\times\frac{1}{(n+1)^n}+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

而

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}<\frac{(n+1)n\cdots(n+1-k+1)}{n^k}$$

可知

$$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

因此 $(1+\frac{1}{n})^n$为单调有界数列，从而极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在，这个极限记为 e。

由此可导出相关的极限：

$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$；

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$；

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$；

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$。

6. 无穷小量

无穷小量是一个特殊的极限，它代表极限为零的极限过程，$x\to x_0$，$\alpha(x)$称为无穷小量，指$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，关于无穷小量，有下面几个重要问题：

(1)无穷小与极限的关系：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$为无穷小量($x\to x_0$)。

(2)无穷小的性质：

① 无穷小量加无穷小量是无穷小量；

② 无穷小乘局部有界量是无穷小量。

即 $x\to x_0$，$\alpha(x)$，$\beta(x)$为无穷小，$\gamma(x)$为有界，则 $\alpha(x)+\beta(x)$，$\gamma(x)\alpha(x)$仍为无穷小。

(3)无穷小的比较与阶：

$x\to x_0$，$\alpha(x)$，$\beta(x)$为无穷小。

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$$

若 $A=1$，称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$为等价无穷小，记 $\alpha(x)\approx\beta(x)(x\to x_0)$；

若 $A=0$,称 $\alpha(x)$是 $\beta(x)$的高阶无穷小,记 $\alpha(x)=o[\beta(x)]$,$(x\to x_0)$;
若 $A\neq 0$,称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$为同阶无穷小,记 $\alpha(x)=O[\beta(x)]$,$(x\to x_0)$;
若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n}=A\neq 0$,称 $\alpha(x)$为 n 阶无穷小。

(4)常用的等价无穷小量公式:

$x\to 0$,$\sin x\approx x$, $\tan x\approx x$, $1-\cos x\approx \dfrac{1}{2}x^2$,

$\arcsin x\approx x$, $\arctan x\approx x$,

$e^x-1\approx x$, $\ln(1+x)\approx x$, $(1+x)^\alpha-1\approx \alpha x$。

(5)求极限的等价无穷小法则:求极限过程中,无穷小量因子可以用等价无穷小量来代替。

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$。

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x\sin x}$。

解 原式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$。

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^x-1}{x^3}$。

解 原式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\cos x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}。$$

(6)无穷小阶的估计:如何估计一个无穷小的阶是一个很重要的问题,主要有下面两个方法。

一是用无穷小的阶的运算:

$x\to x_0$,$\alpha(x)$为 n 阶,$\beta(x)$为 m 阶,则

$\alpha(x)\beta(x)$为$(n+m)$阶,

$\alpha(x)/\beta(x)$为$(n-m)$阶,

$\alpha(x)\pm\beta(x)$ 为 $\min(n,m)$阶 $(n\neq m)$。

注① $\alpha(x)$为 n 阶无穷小,若 $n=0$,表示它为有界量,若 $n<0$,表示它为$-n$ 阶无穷大。

注② 若 $\alpha(x)$,$\beta(x)$为 n 阶无穷小,则 $\alpha(x)\pm\beta(x)$的阶$\geqslant n$。

二是用导数来估计无穷小的阶(见导数有关章节):

$x\to x_0$,$\alpha(x)$为无穷小,$\alpha'(x)$为 n 阶无穷小,那么 $\alpha(x)$为 $1+n$ 阶无穷小。

例 $x\to 0$,$\sqrt{x}\sin x$ 为$\dfrac{3}{2}$阶无穷小。

$\int_0^x\sqrt{x}\,e^x dx$ 为$\dfrac{3}{2}$ 阶无穷小。

7. 极限的计算：函数的极限

(1)$f(x)$为初等函数，$x_0\in D_f$：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)。$$

(2)$f(x)$为分段函数，x_0 为分界点。

计算：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 用左、右极限讨论。

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A,\lim_{x\to x_0^-}f(x)=B$$

$A=B$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A=B$，$A\neq B$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在。

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$的计算。

一种方法用换元法：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{y\to 0}f(\frac{1}{y})$，另一种方法将无穷大变为无穷小，这里有两个重要的事实必须牢记。

$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 的讨论结果：$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$。

$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 的讨论结果：$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$。

$\lim\limits_{n\to\infty}x^n$ 的讨论结果：$|x|<1$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^n=0$

$|x|>1$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^n=\infty$

$x=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^n=1$

$x=-1$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^n$ 不存在。

(4)$f(x)$为初等函数，$x_0\overline{\in}D_f$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的计算。这里主要的问题是不定型$\frac{0}{0}$的极限，即$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$，而 $\alpha(x)$，$\beta(x)$为无穷小量，主要的方法是利用：因式分解，有理化、等价无穷小量，找出公共零因子，这样以达到消去零因子的目的。

例 1 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$。

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{(2-\frac{1}{x^2})(2+\frac{1}{x})}=\frac{1}{4}$。

例 2 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{x^2-x}+x)$。

解 原式$=\lim\limits_{y\to 0^+}(\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}}-2\sqrt{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}}+\frac{1}{y})=$

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{\sqrt{1+y}-2\sqrt{1-y}+1}{y}=$$

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}{y}+\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\sqrt{1-y}}{y}=$$