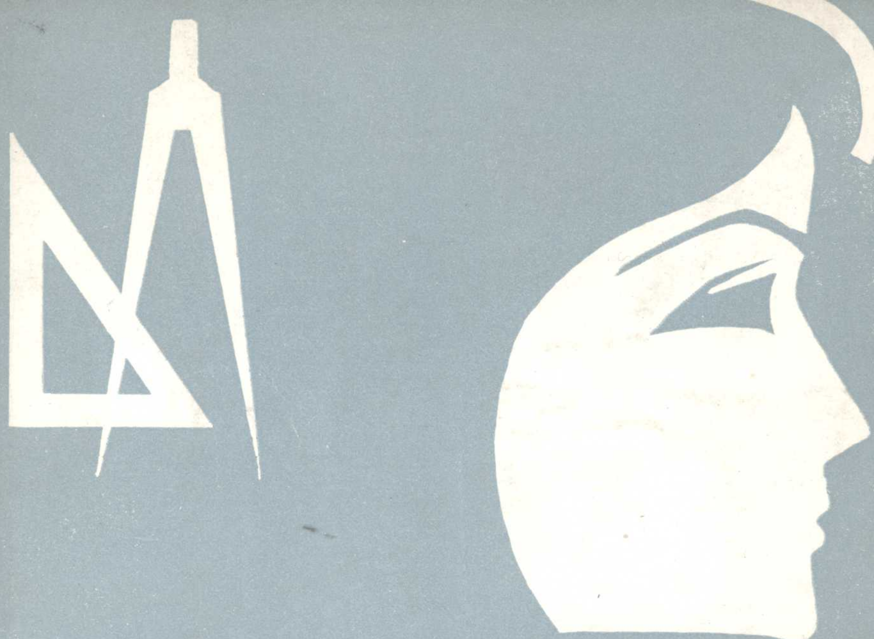

中学课外辅导丛书

高中微积分初步单元能力训练

辽 宁 教 育 出 版 社

中学课外辅导丛书

高中微积分初步单元能力训练

高中微积分初步单元能力训练

关维东　康凤岩　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：139,000　开本：$787\times1092\ 1/32$　印张：$5\ 1/8$
印数：1—38,800
1987年7月第1版　1987年7月第1次印刷

责任编辑：杨　力　责任校对：沈树东
封面设计：王昕为

统一书号：7371·182　定价：0.75元

目　录

	习题	答案
第一章　极限	(1)	(79)
复习参考题	(12)	(85)
第二章　导数和微分	(20)	(94)
一　导数概念	(20)	(94)
二　求导方法	(24)	(99)
三　微分	(32)	(105)
复习参考题	(35)	(108)
第三章　导数的应用	(41)	(116)
一　一阶导数的应用	(41)	(116)
二　二阶导数的应用	(45)	(119)
复习参考题	(46)	(121)
第四章　不定积分	(54)	(131)
复习参考题	(64)	(142)
第五章　定积分及其应用	(66)	(146)
一　定积分的概念和计算	(66)	(146)
二　定积分的应用	(70)	(150)
复习参考题	(73)	(153)

习 题 部 分

第一章 极 限

1. 在下面的各题中，a_n表示数列的通项，试指出各数列是否存在极限？如果存在极限，回答出极限的值.

（1）$a_n=2^{-n}$；（2）$a_n=(-1)^n 2^n$；

（3）$a_n=(-1)^n+2^{-n}$；（4）$a_n=5+(-1)^n 2^{-n}$；

（5）$a_n=-n$；（6）$a_n=(-1)^{2n}\cdot\dfrac{a}{b}(b\neq0)$；

（7）$a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$；（8）$a_n=a_1+(n-1)d(d\neq0)$；

（9）$a_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$；（10）$a_n=(\lg7)^n$，$n\leqslant10^5$.

2. 判断下列各命题是否正确. 将你判断的结果填在括号内，如果命题被否定，试举出一个反例说明.

（1）有穷数列无极限，无穷数列有极限；（ ）

（2）无穷递减数列有极限；（ ）

（3）无穷递增数列无极限；（ ）

（4）无穷等比数列有极限；（ ）

（5）公差的绝对值小于1的等差数列存在极限；（ ）

（6）无穷的常数列有极限。（ ）

3. a_n是数列的通项，试求项数N，当$n>N$时，满足$|a_n-A|<0.0001$。

（1）$a_n=-\frac{1}{n}$，$A=0$；

（2）$a_n=\frac{n}{2n-1}$，$A=\frac{1}{2}$；

（3）$a_n=3+\frac{1}{2^n}$，$A=3$；

（4）$a_n=\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)$，$A=0$。

4. 回答下列各题，要求选择一个正确答案。

（1）一个数列的极限是否属于这个数列？

(A) 是；　　(B) 不是；

(C) 不一定。

（2）在数列的极限定义里，N与ε二者的关系是：

(A) N要随着ε而确定；

(B) ε要随着N而确定；

(C) 二者无依赖关系。

5. 求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^{10}}{n^2}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\theta\left(|\theta|<\frac{\pi}{4}\right)$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^n}{n-1}$；

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$。

6. 求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4n^2}{3-n^2}$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\sqrt{n^2-4}}{n}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-3+\sqrt{n-3}}}{\sqrt{n-3}}$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$；　（6）$\lim\limits_{n\to\infty}[\lg(n+1)-\lg(n-1)]$；

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+\cdots+2n}{6+12+\cdots+6n}$；

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{5^n}}{1-\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{9^n}}$.

7. 求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+n})$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{\lg(n+1)}-\sqrt{\lg n})$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n^2-1})$；

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n-1}-\sqrt{n^2+n-1})$；

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})]$.

8. 试比较大小：

（1）0.1与$0.\dot{1}\dot{0}$；　（2）0.44444与$0.\dot{4}$；

（3）$0.0\dot{2}$与$0.0\dot{2}\dot{0}$；（4）$0.\dot{9}$与1。

9. 计算下列各题：

（1）$0.6+0.06+0.006+\cdots$；

（2）$\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{9}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}+\cdots$；

（3）$0.\dot{7}+0.0\dot{7}+0.00\dot{7}+\cdots$；

（4）$1-\cos\theta+\cos^2\theta-\cos^3\theta+\cdots$ $(\theta\neq k\pi)$；

（5）$\lg\sqrt{3}+\lg^2\sqrt{3}+\lg^3\sqrt{3}+\cdots$；

（6）$\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\cdots}}}}$.

10. 选择答案，将各题正确结果的题号填入括号内。

（1）条件甲：数列$\{a_n\}$与数列$\{b_n\}$的极限都存在；

条件乙：数列$\{a_n-b_n\}$的极限存在。

A：甲是乙的必要条件；*B*：甲是乙的充分条件；

C：甲是乙的充要条件；*D*：什么条件都不是。（　）

（2）条件甲：数列$\{a_n\}$或数列$\{b_n\}$的极限不存在；

条件乙：数列$\{a_n+b_n\}$的极限不存在。

A：甲是乙的必要条件；

B：甲是乙的充分条件；

C：甲是乙的充要条件；

D：什么条件都不是。（　）

（3）条件甲：$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$；

条件乙：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$或$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。

A：甲是乙的必要条件；

B：甲是乙的充分条件；

C：甲是乙的充要条件；

D：什么条件都不是。 （ ）

（4）条件甲：数列 $\{a_n\}$ 的极限存在；

条件乙：数列 $\{a^2_n\}$ 的极限存在。

A：甲是乙的必要条件；

B：甲是乙的充分条件；

C：甲是乙的充要条件；

D：什么条件都不是。 （ ）

11．已知 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$，求下列不等式自变量x 的范围（已知 $x>-1$）。

（1）$|y-1|<10^{-2}$； （2）$|y-1|<10^{-4}$；

（3）$|y-1|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$；（4）$|y-2|<10^{-4}$。

12．（1）试用定理证明 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$；

（2）求证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$不存在。

13．求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+7}{x+1}$； （2）$\lim\limits_{x\to 4}\left(x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1+\sec x}$； （4）$\lim\limits_{x\to 0}(10^{x}+10^{-x})^2$；

（5）$\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x}+\lg x)$；（6）$\lim\limits_{x\to -1}\operatorname{arcctg}x$。

14．求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{9x}$, $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{9x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}+1\right)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}+1\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\sin(\pi-x)$, $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\sin(\pi-x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2(x-1)}{|x-1|}$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2(x-1)}{|x-1|}$.

15. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-4^x}{1+4^x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+4x^2+6x^3+\cdots+2kx^k}{x+3x^2+5x^3+\cdots+(2k-1)x^k}$（$k$ 是自然数）；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

16. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+1)(x+2)}-x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$。

17. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$； (2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{x^2-x-20}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$； (4) $\lim\limits_{\theta\to\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{tg}^2\theta-1}{\mathrm{tg}\theta+1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$；

(6) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$。

18. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$；

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$。

19. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}}{2\cdot\sqrt[3]{x}-3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{2\cdot\sqrt[3]{x}-3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{x}-3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{2\cdot\sqrt[3]{x}-3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$。

20. 指出下列函数间断点及连续区间:

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+7x-8}{x^2+x-2}$,($x\geqslant 0$时);

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2x}$;

(3) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$;

(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0; & x=0;\end{cases}$

（5）$f(x)=\lg|x-2|$；

（6）$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^3-1}$。

21．选择答案，将下面正确的结果题号全写在括号内：（　　）

A：如果 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在，那么 $f(x)$ 在 x_0 处就连续；

B：如果 $f(x)$ 在 x_0 连续，那么 $f(x)$ 在 x_0 处极限就存在；

C：如果 $f(x)$ 在 x_0 处左连续与右极限存在，那么 $f(x)$ 在 x_0 处就连续；

D：如果 $f(x)$ 在 x_0 处左连续且右连续，那么 $f(x)$ 在 x_0 处就连续。

22．如设符号 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0+0)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0-0)$，

下列各式子都表示什么意义：

（1）$f(8-0)=3$；　　（2）$f(0+0)=-\dfrac{1}{2}$；

（3）$f(1+0)=f(1-0)$；（4）$f(3+0)=f(3)$；

（5）$f(3+0)=f(3-0)=f(3)$；

（6）$f(x_0+0)=+\infty$；

（7）$f(x_0+0)=f(x_0)\neq f(x_0-0)$；

（8）$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$。

23．设函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{当 } 0\leqslant x<1;\\ 1, & \text{当 } x=1;\\ -x+3, & \text{当 } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

（1）求出在0、1、2处的左及右极限；

（2）函数在0、1、2处连续情况怎样？

24. 利用中间变量，写出下列函数复合过程：

（1） $y=\sqrt{\lg(x^2+1)}$；

（2） $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$；

（3） $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x^2+x-2|}$；

（4） $y=2\operatorname{arcctg}(\sin x)$；

（5） $y=5^{2x}-3\cdot 5^x+10$。

25. 求复合函数的定义域及值域：

（1） $y=\frac{2x}{x^2+x+1}$；（2） $y=\lg\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$；

（3） $y=\operatorname{ctg}(\sin x)$；（4） $y=\frac{1}{\sqrt{\arcsin x-1}}$。

26. （1）如果 $y=f(x)$ 及 $z=\varphi(x)$ 当 $x\in R$ 时都是增函数，求证 $y=f[\varphi(x)]$ 也是增函数。

（2）如果 $y=f(x)$ 及 $z=\varphi(x)$ 当 $x\in R$ 时 $\varphi(x)$ 是偶函数，求证 $y=f[\varphi(x)]$ 也是偶函数。

27. 回答下列各题：

（1）已知 $f(x)=\frac{1}{x}$，求 $f\{f[f(x)]\}$；

（2）已知 $f(x)=\log_2 x$，$\varphi(x)=4^x$，求 $f[\varphi(x)]$；

（3）已知 $f[\varphi(x)]=x^2-3x+2$，$\varphi(x)=x+1$，求 $f(x)$；

（4）已知 $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{当 } x>0; \\ 0, & \text{当 } x=0; \\ x-1, & \text{当 } x<0。\end{cases}$ 求 $f[f(x)]=?$

28. 判断下列命题是否正确：

（1）如果 $f(x)$ 在$x=2$处的极限存在，$\varphi(x)$ 在$x=2$处极限也存在，那么 $\lim\limits_{x\to 2} f[\varphi(x)]$一定存在；

（2）如果 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，$\varphi(x)$ 在 $x=2$处也连续，那么$f[\varphi(x)]$ 在 $x=2$ 处一定连续；

（3）如果 $x=2$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点，那么 $x=2$一定是 $f[\varphi(x)]$的间断点；

（4）如果 $x=2$ 是 $f(x)$ 的间断点，那么 $x=2$一定是 $f[\varphi(x)]$的间断点。

29. 求下列复合函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}[\lg(x^2+1)-\lg(x^2-1)]$；

（2）$\lim\limits_{x\to 1}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1})$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$；（4）$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{1-\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\right)^2}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\left(1+\sin\dfrac{x}{2}\right)\cos^2\dfrac{x}{2}}{1+\cos x}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\sin x}-1}{\operatorname{tg}x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-|x|}$是否存在。

30. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}$;　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}$;　(6) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$;　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\cdot\sin\dfrac{x}{2^n}$;

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$;　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 3x-\cos 3x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\left(x^2-\dfrac{\pi^2}{4^2}\right)\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$;

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$;

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^x$;　(14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x}$;　(16) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{x-2}}$;

(17) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{-1}{x-1}}$;　(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\arcsin x}$.

复习参考题

1. 已知数列 $\{a_n\}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，试问 $a_1, a_4, a_7, \cdots, a_{3k+1}, \cdots$ 即 $\{a_{3k+1}\}$ 这个数列有没有极限，如果有极限这个极限还是不是 A，并用定义证明。

2．试用极限的定义证明对于数列 $\{a_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$时，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |A|$.

3．对于数列 $\{a_n\}$，如果 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = A$，并且$\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = A$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

4．已知无穷数列 $\{a_n\}$ 以A为极限，另外一个数列 $\{b_n\}$，这里 $b_n = a_{n+1} - a_n$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

5．试用数列极限定义证明：如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$a_n > A$，$n = 1, 2, \cdots$，$A > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \lg a_n = \lg A$.

6．求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ba^n + ab^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)+(n^2+2)+\cdots+(n^2+n)}{n^3+n^2}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n+1}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - \cdots - \dfrac{2n}{n}\right]$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n}\right)$；

（6）设 $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$，其中为$n$重根号，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

7．求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^n\theta - \cos^n\theta}{\sin^n\theta + \cos^n\theta}\left(0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$；