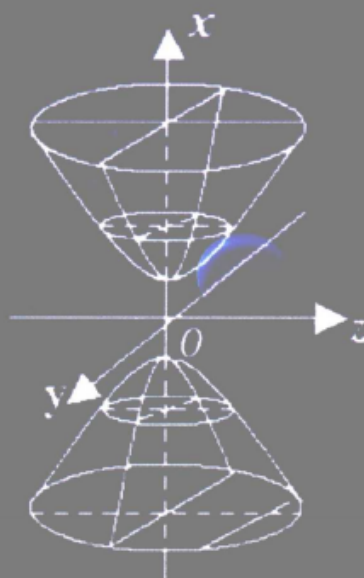


KONGJIAN JIEXI JIHE

空间解析几何

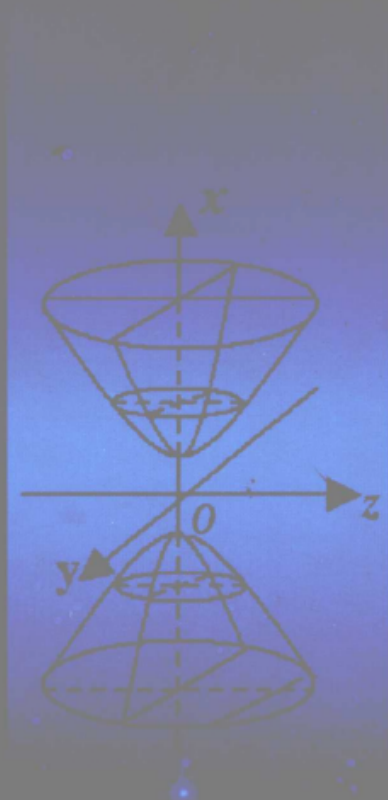
主 编 张荣锋

副主编 杨春燕 周巧姝 戚大伟



东北林业大学出版社

责任编辑：戴 千
封面设计：彭 宇



ISBN 978-7-81131-288-1



9 787811 312881 >

定价：35.00 元

空间解析几何

主 编 张荣锋

副主编 杨春燕 周巧姝 戚大伟

东北林业大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

空间解析几何/张荣锋主编. —哈尔滨: 东北林业大学出版社, 2008. 7
ISBN 978-7-81131-288-1

I. 空… II. 张… III. 空间几何: 解析几何 IV. 0182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 109060 号

责任编辑: 戴千

封面设计: 彭宇



NEFUP

空间解析几何

Kongjian Jiexi Jihe

主编 张荣锋

副主编 杨春燕 周巧妹 戚大伟

东北林业大学出版社出版发行

(哈尔滨市和兴路26号)

哈尔滨驿飞印务有限公司印装

开本787×960 1/16 印张14.5 字数300千字

2008年7月第1版 2008年7月第1次印刷

印数1—1 000册

ISBN 978-7-81131-288-1

0·89 定价: 35.00元

序 言

空间解析几何是高等院校数学专业的一门基础课，它是几何学的一个分科，是利用代数的方法研究几何图形性质的一门几何学。

本书主要以矢量为工具，研究空间解析几何，即研究空间中的直线、平面、二次曲线及平面上的二次曲线。共分四章，第一章 向量与空间坐标系，目的是使读者能够较好的掌握向量代数的基础知识及相关运算，并能运用向量来解决一些问题；第二章 空间中的平面方程和直线方程，目的是借助于向量这一工具，研究直角坐标系下的平面和直线的各种形式的方程，并讨论如何利用代数方法解决平面与平面、平面与直线，直线与直线，平面与点，直线与点相互之间关系等一系列问题；第三章 空间中的二次曲面，目的是从几种常见的特殊二次曲面（圆柱面、二次锥面、椭球面、双曲面、抛物面等）开始，研究空间中二次曲面的性质和形状；第四章 平面上二次曲线的一般理论，目的是，在一个给定的直角坐标系下，由给定的一般二元二次方程确定二次曲线的图像类型和某些性质，确定二次曲线图形的大小和准确地位置。

本书主编张荣锋，执教空间解析几何多年，不仅积累了丰富的教学经验，而且在他的教学及其教学研究中，探索出一套自己的符合学生实际的教学规律性及其特点。本书是在张荣锋老师几年来反复使用的解析几何讲义的基础上，结合多部空间解析几何的优秀部分改编、修订的，注重知识的系统性、严谨性、逻辑性、直观性和几何的实用性，并且配备了大量的典型例题和练习题，通俗易懂，条理清晰。在本书的编写过程中，东北林业大学理学院教授、博士生导师戚大伟老师给予了大量的帮助并予以指导性的意见。本书适合高等学校在校的本科、专科学生，电大、函授学生的学习。

编者

《空间解析几何》作者简介

主编：张荣锋，男，齐齐哈尔高等师范高等专科学校讲师（理学硕士），从事基础数学与应用数学的教学与研究。

第一副主编：杨春燕，女，齐齐哈尔高等师范高等专科学校讲师，从事基础数学与应用数学的教学与研究。

第二副主编：周巧姝，女，长春师范学院学报编辑部编辑，从事应用数学与编辑学研究。

第三副主编：戚大伟，男，东北林业大学理学院（教授、博士生导师），从事基础数学与应用数学的教学与研究。

空间解析几何简介

一、解析几何的产生

16 世纪以后, 由于生产和科学技术的发展, 天文、力学、航海等方面都对几何学提出了新的需要。比如, 德国天文学家开普勒发现行星是绕着太阳沿椭圆轨道运行的, 太阳处在这个椭圆的一个焦点上; 意大利科学家伽利略发现投掷物体是沿着抛物线运动的。这些发现都涉及圆锥曲线, 要研究这些比较复杂的曲线, 原先的一套方法显然已经不适应了, 这就导致了解析几何的出现。

1637 年, 法国的哲学家和数学家笛卡尔发表了著作《方法论》, 这本书的后面有三篇附录, 一篇叫《折光学》, 一篇叫《流星学》, 一篇叫《几何学》。当时的这个“几何学”实际上指的是数学, 就像我国古代“算术”和“数学”是一个意思一样。

笛卡尔的《几何学》共分三卷, 第一卷讨论尺规作图; 第二卷是曲线的性质; 第三卷是立体和“超立体”的作图, 但它实际是代数问题, 探讨方程的根的性质。后世的数学家和数学史学家都把笛卡尔的《几何学》作为解析几何的起点。



笛卡尔·R.

从笛卡尔的《几何学》中可以看出, 笛卡尔的中心思想是建立起一种“普遍”的数学, 把算术、代数、几何统一起来。他设想, 把任何数学问题化为一个代数问题, 再把任何代数问题归结到去解一个方程式。

为了实现上述的设想, 笛卡尔从天文和地理的经纬制度出发, 指出平面上的点和实数对 (x, y) 的对应关系。 x, y 的不同数值可以确定平面上许多不同的点, 这样就可以用代数的方法研究曲线的性质。这就是解析几何的基本思想。

具体地说, 平面解析几何的基本思想有两个要点: 第一, 在平面建立坐标系, 一点的坐标与一组有序的实数对相对应; 第二, 在平面上建立了坐标系后, 平面上的一条曲线就可由带两个变数的一个代数方程来表示了。从这里可以看到, 运用坐标法不仅可以把几何问题通过代数的方法解决, 而且还把变量、函数以及数和形等重要概念密切联系了起来。

解析几何的产生并不是偶然的。在笛卡尔写《几何学》以前, 就有许多学者研究过用两条相交直线作为一种坐标系; 也有人在研究天文、地理的时候, 提出了一

点位置可由两个“坐标”（经度和纬度）来确定。这些都对解析几何的创建产生了很大的影响。

在数学史上，一般认为和笛卡尔同时代的法国业余数学家费尔马也是解析几何的创建者之一，应该分享这门学科创建的荣誉。

费尔马是一个业余从事数学研究的学者，对数论、解析几何、概率论三个方面都有重要贡献。他性情谦和，好静成癖，对自己所写的“书”无意发表。但从他的通信中知道，他早在笛卡尔发表《几何学》以前就已写了关于解析几何的小文，就已经有了解析几何的思想，只是直到 1679 年，费尔马死后，他的思想和著述才从给友人的通信中公开发表。

笛卡尔的《几何学》，作为一本解析几何的书来看，是不完整的，但重要的是引入了新的思想，为开辟数学新园地做出了贡献。

二、解析几何的基本内容

在解析几何中，首先是建立坐标系，取定两条相互垂直的、具有一定方向和度量单位的直线，叫做平面上的一个直角坐标系 xOy 。利用坐标系可以把平面内的点和一对实数 (x, y) 建立起一一对应的关系。除了直角坐标系外，还有斜坐标系、极坐标系、空间直角坐标系等等，在空间坐标系中还有球坐标和柱面坐标。

坐标系将几何对象和数，几何关系和函数之间建立了密切的联系，这样就可以对空间形式的研究归结成比较成熟也容易驾驭的数量关系的研究了。用这种方法研究几何学，通常就叫做解析法。这种解析法不但对于解析几何是重要的，就是对于几何学的各个分支的研究也是十分重要的。

解析几何的创立，引入了一系列新的数学概念，特别是将变量引入数学，使数学进入了一个新的发展时期，这就是变量数学的时期。解析几何在数学发展中起了推动作用。恩格斯对此曾经作过评价“数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了……”

三、解析几何的应用

解析几何又分作平面解析几何和空间解析几何。

在平面解析几何中，除了研究直线的有关直线的性质外，主要是研究圆锥曲线（圆、椭圆、抛物线、双曲线）的有关性质。

在空间解析几何中，除了研究平面、直线有关性质外，主要研究柱面、锥面、旋转曲面等二次曲面的图形与性质。

椭圆、双曲线、抛物线的有些性质，在生产或生活中被广泛应用。比如电影放映机的聚光灯泡的反射面是椭圆面，灯丝在一个焦点上，影片门在另一个焦点上；探照灯、聚光灯、太阳灶、雷达天线、卫星的天线、射电望远镜等都是利用抛物线原理制成的。

总的来说，解析几何运用坐标法可以解决两类基本问题：一类是满足给定条件点的轨迹，通过坐标系建立它的方程；另一类是通过方程的讨论，研究方程所表示的曲线性质。

运用坐标法解决问题的步骤是：首先在平面上建立坐标系，把已知点的轨迹的几何条件“翻译”成代数方程；然后运用代数工具对方程进行研究；最后把代数方程的性质用几何语言叙述，从而得到原先几何问题的答案。

坐标法的思想促使人们运用各种代数的方法解决几何问题。先前被看作几何学中的难题，一旦运用代数方法后就变得平淡无奇了。坐标法对近代数学的机械化证明也提供了有力的工具。

目 录

第一章 向量与空间坐标系	(1)
1.1 向量的概念	(1)
1.2 向量的线性运算	(4)
1.3 空间直角坐标系	(12)
1.4 线段定比分点	(19)
1.5 向量之间的线性关系	(21)
1.6 向量在轴上的射影	(26)
1.7 向量的内积	(30)
1.8 两向量的外积	(35)
1.9 三向量的混合积	(41)
第二章 空间的平面方程和直线方程	(46)
2.1 空间曲面、曲线的方程	(46)
2.2 平面的方程	(55)
2.3 平面的一般方程及方程	(61)
2.4 空间中两个平面的相关位置	(67)
2.5 两平行平面的距离	(71)
2.6 空间直线的方程	(76)
2.7 点与直线的相关位置	(82)
2.8 空间两条直线的位置	(84)
2.9 直线与平面的相关位置	(90)
2.10 平面族	(95)
2.11 三个平面的位置关系	(101)
第三章 空间中的二次曲面	(105)
3.1 柱面	(106)
3.2 锥面	(112)
3.3 旋转曲面	(117)
3.4 椭球面	(124)
3.5 双曲面	(130)

3.6 抛物面·····	(138)
3.7 曲面的直纹性·····	(145)
3.8 二次曲面的作图 ·····	(156)
第四章 平面内的二次曲线的性质·····	(161)
4.1 平面上的平移变换与转轴变换·····	(162)
4.2 平面上的仿射变换 ·····	(169)
4.3 二次曲线的分类·····	(173)
4.4 二次曲线与直线的相关位置·····	(176)
4.5 二次曲线的渐近方向、中心、渐近线·····	(178)
4.6 二次曲线的切线和奇点·····	(183)
4.7 二次曲线的直径·····	(189)
4.8 二次曲线的主直径与主方向·····	(193)
4.9 利用不变量来判定二次曲线的类型·····	(197)
附录·····	(208)
参考文献·····	(222)

第一章 向量与空间坐标系

向量这一概念是由物理学和工程技术抽象出来的,反过来,向量的理论和方法又成为解决物理学和工程技术的重要工具,向量之所以有用,关键是它具有一套良好的运算性质,通过向量可把空间图形的性质转化为向量的运算,这样通过向量就能较容易地研究空间的直线和平面的各种有关问题。

向量不同于数量,它是一种新的量,关于数量的代数运算在向量范围内不都适用。因此,本章在介绍向量概念时,重点说明了向量与数量的区别,然后又重新给出了向量代数的部分运算法则,包括加法、减法、实数与向量的积、向量的内积、外积、混合积的运算法则等。之后,又将向量与坐标联系起来,把关于向量的代数运算与数量(向量的坐标)的代数运算联系起来,这就为研究和解决有关几何问题又提供了两种方法——向量法和坐标法。

1.1 向量的概念

在日常生活或物理学中经常碰到许多简单的量,只要取定度量单位以后,就可以用一个实数来表示这种量,例如时间、长度、距离、质量、面积、体积、密度、温度、功等;这种只有大小的、只用实数就可以表示的量叫做数量(或纯量);另一种量比较复杂,不但有大小而且还有方向。例如,我们说,从甲地向东走20km才到乙地,显然一个质点沿着一个方向移动一段距离,这就是一点的位移,显然位移是一种既有大小又有方向的量,这样的量还有很多,如力、加力矩等,这些量所具有的力学或物理学的内容虽然各不相同,但是都是既有大小又有方向的量。

定义1.1.1: 既有大小又有方向的量称之为向量(或矢量)。

注意: 数量与向量的区别:数量只有大小,是一个代数量,可以进行代数运算、比较大小;向量既有方向,又有大小,具有双重性,不能比较大小。

数学中,有向线段包含了起点、方向、长度三个要素,知道了有向线段的起点、

方向和长度, 它的终点就唯一确定。我们用有向线段表示向量, 有向线段的始点与终点叫做向量的始点与终点, 有向线段的方向表示向量的方向, 而有向线段的长度表示向量的大小, 以 A 为始点, B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$, 有时也有粗体字母或一个上面加有箭头的字母表示向量, 如向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 、 $\cdots$ 或 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\cdots$ (图1)。

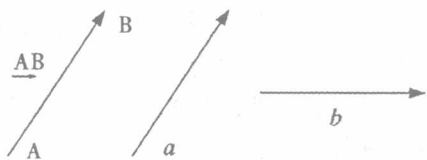


图 1

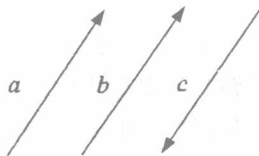


图 2

定义 1.1.2: 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小 (长度) ——称为向量的模, 记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$ 。

定义 1.1.3: 长度为 0 的向量叫零向量, 记作 $\mathbf{0}$ 。

由于 $\mathbf{0}$ 的起点与终点重合, 所以 $\mathbf{0}$ 没有确定方向, 即 $\mathbf{0}$ 的方向是任意的。因此规定一切零向量都相等。

定义 1.1.4: 长度为 1 个单位长度 (即模长等于 1) 的向量, 叫单位向量 (或幺矢)。

定义 1.1.5: 方向相同或相反的非零向量叫平行向量; 平行向量就是共线向量, 这是因为任一组平行向量都可移到同一直线上。向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 平行 (图 2), 记作 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$ 。

我们规定 $\mathbf{0}$ 与任一向量平行。

定义 1.1.6: 长度相等且方向相同的向量叫相等向量。向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 相等, 记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 。

任意两个相等的非零向量, 都可用同一条有向线段来表示, 并且与有向线段的起点无关, 如果把相等向量, 看作是起点在不同位置的同一向量, 这样便得到了起点可以任意移动而保持大小相等方向相同的向量, 叫做自由向量, 在解析几何中, 如果不加说明, 向量都是可以自由移动的。

定义 1.1.7: 若向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的模相等, 又互相平行, 且方向相反, 则称向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 互为反矢量, 并记作 $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ 。

例 1: 如 (图 3) 设 $\mathbf{O}$ 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心, 分别写出图中与向量 $\overrightarrow{OA}$ 相

等的向量与 $\overrightarrow{OB}$ 相反的向量。

解：与向量 $\overrightarrow{OA}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{CB}$ 、 $\overrightarrow{DO}$ 、 $\overrightarrow{EF}$ 。

与向量 $\overrightarrow{OB}$ 相反的向量有 $\overrightarrow{CD}$ 、 $\overrightarrow{OE}$ 、 $\overrightarrow{AF}$ 。

习 题

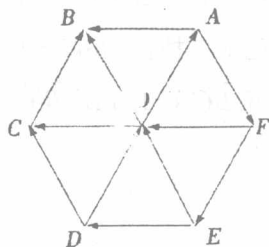


图 3

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点, 则 ()

A. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线 B. $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 共线
C. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 相等 D. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 相等。

2. 下列命题正确的是 ()

A. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是两平行向量
B. 若 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 都是单位向量, 则 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$
C. 若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, 则 A 、 B 、 C 、 D 四点构成平行四边形
D. 两向量相等的充要条件是它们的始点、终点相同。

3. 在下列结论中, 正确的结论为 ()

(1) $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 且 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$ 是 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 的必要不充分条件
(2) $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 且 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$ 是 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 的既不充分也不必要条件
(3) $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 方向相同且 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$ 是 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 的充要条件
(4) $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 方向相反或 $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ 是 $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ 的充分不必要条件

A. (1) (3) B. (2) (4) C. (3) (4) D. (1) (3) (4)

4. 把平行于某一直线的一切向量归结到共同的始点, 则终点所构成的图形是_____;
若这些向量为单位向量, 则终点构成的图形是_____。

5. 已知 $|\overrightarrow{AB}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=2$, 若 $\angle BAC=60^\circ$, 则 $|\overrightarrow{BC}|=_____$ 。

6. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$, 则四边形 $ABCD$ 是_____。

7. 设在平面上给定了一个四边形 $ABCD$, 点 K , L , M , N 分别是 AB , BC , CD , DA 的中点, 求证: $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$ 。

8. 设在平面上给定了四边形 $ABCD$, 点 E , F , M , N 分别是 AB , BC , CD , DA 的中点, 求证:

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$. 当 $ABCD$ 是空间四边形时, 等式是否成立?

9. 已知三棱台 $ABC-A'B'C'$ 的上、下底面是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$, 试指出在向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ 中, 有几对共线向量? 有几组共面向量?

1.2 向量的线性运算

一、向量的加法

先考虑这样两个实例:

力的合成, 设两个力 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同时作用某物体于一点 A , 如图 1, 根据试验得知, 该物体在点 A 就等于受到这两个力的合力 $\boldsymbol{c}$ 的作用, 力 $\boldsymbol{c}$ 的大小是以分力 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边所构成的平行四边形的对角线 AC 的长, 其方向就是对角线 AC 的方向. 这种力的合成方法, 称为平行四边形法则。

连续实行两次位移也是一个位移, 从点 A 位移到点 B , 再从点 B 位移到点 C , 合并起来就是从点 A 到点 C 的位移, 结合的方法可以采用三角形来表示, 称为三角形法则 (图 1)。

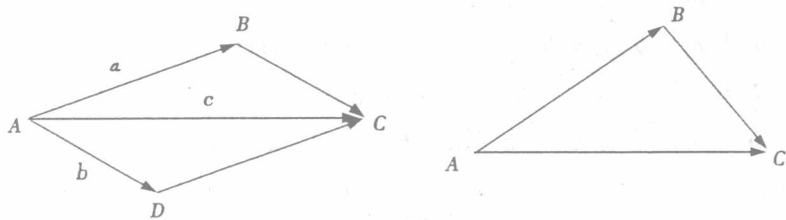


图 1

定义 1.2.1: 求两个向量和的运算, 叫做向量的加法。

几何中向量加法是用几何作图来定义的, 一般有两种方法, 即向量加法的三角形法则 (“首尾相接, 首尾连”) 和平行四边形法则 (对于两个向量共线不适用)。课本中采用了三角形法则来定义, 这种定义, 对两向量共线时同样适用, 当向量不共线时, 向量加法的三角形法则和平行四边形法则是一致的。

如图 2, 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在平面内任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$

叫做 a 和 b 的和, 记作 c , 即 $a+b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

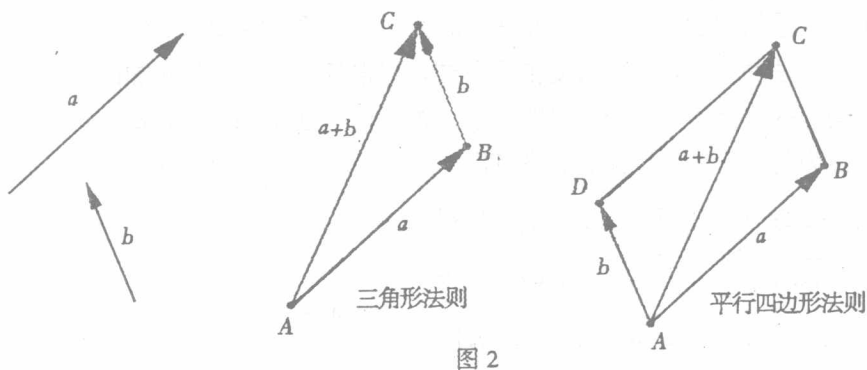


图 2

特殊情况: 对于零向量与任一向量 a , 有 $a+0=0+a=a$ 。

强调: (1) 两向量的和仍是一个向量;

(2) 当向量 a 与 b 不共线时, $a+b$ 的方向与 a 和 b 不同向, 且 $|a+b| < |a| + |b|$;

(3) 当 a 与 b 同向时, 则 $a+b$ 、 a 、 b 同向, 且 $|a+b| = |a| + |b|$; 当 a 与 b 反向时, 若 $|a| > |b|$, 则 $a+b$ 的方向与 a 相同, 且 $|a+b| = |a| - |b|$; 若 $|a| < |b|$, 则 $a+b$ 的方向与 b 相同, 且 $|a+b| = |b| - |a|$ 。

(4) “向量平移”(自由向量): 使前一个向量的终点为后一个向量的起点, 可以推广到 n 个向量连加。

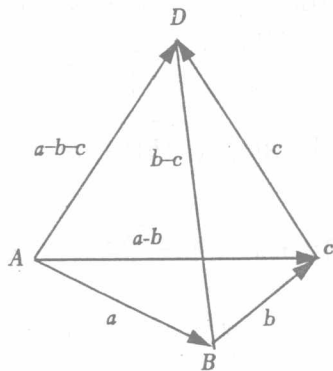


图 3

二、向量加法的运算律

1. 向量加法的交换律: $a+b=b+a$

证明: 交换律的证明从向量的加法定义即可得证, 结合律的证明从(图 2)可得证。

2. 向量加法的结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$

证明: 如(图 3): 使 $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{BC}=b$, $\overrightarrow{CD}=c$, 则 $(a+b)+c = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ 。

$$a + (b+c) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\therefore (a+b) + c = a + (b+c)$$

从而, 多个向量的加法运算可以按照任意的次序、任意的组合来进行。

由向量加法的三角形法则及交换律、结合律得任意多个向量相加的法则如下: 以前一个向量的终点作下一个向量的始点, 相继作向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 再以第一个向量的起点为起点, 最后一向量的终点作一向量, 这个向量即为所求的和 (图 4),

定义 1.2.2: 做多边形 $A_1A_2\dots A_n$, 使得 $\overrightarrow{A_1A_2} = a_1, \overrightarrow{A_2A_3} = a_2, \dots, \overrightarrow{A_nA_{n+1}} = a_n$, 于是 $\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$ 就是这 n 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的和。记作: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \overrightarrow{A_1A_{n+1}}$

例 1: 如 (图 5), 一艘船从 A 点出发以 $2\sqrt{3}$ km/h 的速度向垂直于对岸的方向行驶, 同时河水的流速为 2 km/h, 求船的实际航行的速度的大小与方向 (用与流速间的夹角表示)。

解: 设 $\overrightarrow{AD}$ 表示船垂直于对岸行驶的速度, $\overrightarrow{AB}$ 表示水流的速度, 以 AD, AB 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 则 $\overrightarrow{AC}$ 就是船的实际航行的速度。

$$\text{在 Rt} \triangle ABC \text{ 中, } |\overrightarrow{AB}| = 2, |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{3}$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2} = 4$$

$$\text{因为 } \tan \angle CAB = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle CAB = 60^\circ$$

答: 船的实际航行的速度的大小为 4 km/h, 方向与水流速间的夹角为 60° 。

三、向量的减法

定义 1.2.3: 若 $c = a + b$, 则我们把 b 叫做 c 与 a 差, 记为 $b = c - a$

减法的三角形法则作法: 在平面内取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$, 则 $\overrightarrow{BA} = a - b$ 即 $a - b$ 可以表示为从向量 b 的终点指向向量 a 的终点的向量。

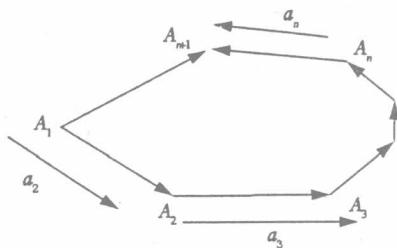


图 4

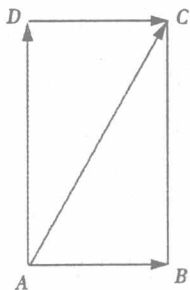


图 5