21世纪高等院校教材

数学分析（下册）

王 政 宋元平 主编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

数学分析

（下册）

王　政　宋元平　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是根据近年普通高等院校的教学情况，结合教学实践的经验，并对传统的数学分析教材体系做出较大变化的基础上编写而成的. 本书分上、下两册，上册内容是函数、极限与连续、一元函数的微分学、一元函数的积分学、多元函数的微分学、隐函数定理及应用，共 6 章；下册内容是重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、极限与实数理论、积分学理论与广义积分、级数理论、含参变量积分，共 7 章.

本书可作为高等院校数学专业的教材，也可作为相关教师或研究生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 下册/王政，宋元平主编. —北京：科学出版社，2008
21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-022541-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①王…②宋… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 106845 号

责任编辑：王 静 房 阳 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 9 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 9 月第一次印刷 印张：15 1/4
印数：1—3 000 字数：291 000

定价：48. 00 元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

前　言

近年来，随着高等教育招生规模的不断扩大以及社会对人才需求的不断变化，为适应培养宽口径、厚基础、高素质、知识型与能力型并举的数学人才的发展需要，数学专业的各类选修课剧增，传统数学分析课程无论在学时上还是在教学内容的编排上都受到严峻挑战. 结合普通高等院校理科专业课程体系的特点和数学分析的教学体系的改革，总结山东理工大学理学院三十多年来从事数学分析教学的经验与体会，精心编写了这套教材.

本书分上、下两册，上册内容主要有函数、极限与连续、一元函数的微分学、一元函数的积分学、多元函数的微分学、隐函数定理及应用，共 6 章；下册内容主要有重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、极限与实数理论、积分学理论与广义积分、级数理论、含参变量积分，共 7 章.

本书需 3 个学期合计约 260 学时讲授，3 个学期的周学时依次按 6,6,4 安排.

在本书的编写过程中，我们注意了以下几个方面：

(1) 本书与目前国内通用的数学分析教材最大的不同之处是在涵盖数学分析基本内容的基础上，注重概念的深入理解与基础训练的强化；同时在传统内容的编排上作了较大的调整，将知识难点的重心后移，这样可使大一新生尽快适应数学分析的学习，提高学生的学习兴趣.

(2) 为了使难点分散和便于理解，本书把微积分的极限与实数理论分两阶段完成. 第一阶段在一元函数微积分部分，把极限理论的有关定理不加证明而直接据此展开一系列讨论，给出它们的应用，以期解释这些定理并使读者易于理解掌握. 第二阶段在下册的实数理论部分，集中论证极限理论有关定理的等价性及其典型方法，以供报考研究生和以后从事数学教学与研究工作的读者进一步学习.

(3) 由于章节顺序的变化及篇幅等原因，本书在内容的处理上与国内通用教材有所不同，如考虑到计算机的应用与普及，本书明显淡化了函数作图、求导计算、求不定积分计算、近似计算以及定积分在几何及物理方面的应用等. 另外，书中突出并加大了重难点内容的例题，尤其是大量引用了近年考研试题，力求通过一些典型例子使读者初步掌握分析问题与解决问题的方法. 各章节习题的难度有所降低，给教师和学生留有一定的空间，有利于培养学生创新性学习的能力.

本书上册编写组由周运明、尚德生、李亿民、王豫鲁、王政组成；下册编写组由王政、宋元平、尚德生、王豫鲁、李亿民组成. 全书由尚德生和王政修改、统稿.

本书在编写过程中参考了华东师范大学数学系等重点院校的《数学分析》教材

和习题集，得到了山东理工大学教务处的支持和理学院院长孟昭为教授的具体指导、帮助，在此深表感谢. 同时真诚感谢试用本讲义并提出宝贵意见的周翠莲博士、潘丽丽老师、王玉田老师以及 06 级与 07 级数学专业全体同学. 我们要特别感谢科学出版社的领导与编辑对本书的及时出版所给予的大力支持.

编写本书过程中，虽然我们尽了很大努力，但由于知识与能力所限，深感难度很大，疏漏之处在所难免，诚恳希望广大读者给予批评指正.

编　者

2008 年 7 月于山东理工大学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第 7 章　重　积　分

解决许多几何、物理及其他实际问题，不仅需要一元函数的积分（定积分），还需要各种不同的多元函数的积分. 本章主要讨论二元函数在平面有界区域上的积分和三元函数在空间有界区域上的积分，即**二重积分**和**三重积分**，统称为**重积分**. 重积分定义的方法和步骤与定积分类似，即按照“**分割、近似求和、取极限**”给出的，因此本章有的结论述而不证.

7.1　二 重 积 分

7.1.1　二重积分的概念

1. 曲顶柱体的体积

设有一立体，它的底是 xOy 平面上的闭区域 D，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面 $S: z=f(x,y)$，其中 $f(x,y)$ 是定义在 D 上的正值连续函数. 这种立体叫做**曲顶柱体**（图 7.1）.

注 7.1　为简便起见，本书除特别说明外，都假定平面闭区域和空间闭区域是有界的，且平面闭区域有有限面积，空间闭区域有有限体积.

现在来讨论如何计算曲顶柱体的体积 V.

类似于求曲边梯形的面积，仍采用“分割、近似求和、取极限”这几个步骤来求曲顶柱体的体积 V.

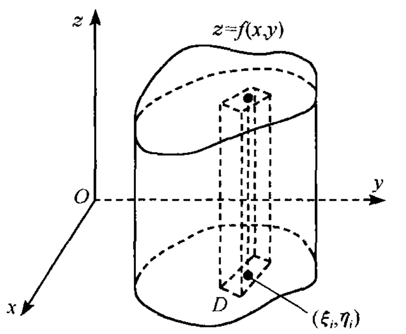

图 7.1

首先，用任意的曲线网格对 D 作分割 T，将区域 D 分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$（仍以 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$ 表示它们的面积）. 以每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 的边界曲线为准线，作母线平行于 z 轴的柱面，这些柱面将曲顶柱体相应地分成 n 个小的曲顶柱体，其体积记为 $\Delta V_i (i=1,2,\cdots,n)$. 当小区域 $\Delta\sigma_i$ 很小时，对应的小曲顶柱体可近似看成平顶柱体，因此任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，则有

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

在每个小曲顶柱体上都实施这一步骤，再把它们累加起来，就得到整个曲顶柱

体体积的近似值,即

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i.$$

很明显,当对区域 D 的分割越来越细密时,上式的近似程度就越好.记 $\|T\|$ 为 $\Delta\sigma_i$ 的直径(一个**闭区域的直径**是指区域上任意两点间的距离的最大值)中的最大者($\|T\|$ 也称为分割 T 的**模**或**细度**),则 $\|T\|\to0$ 就刻画了区域 D 无限细分的过程,因此所求曲顶柱体的体积为

$$V=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i.$$

2. 平面薄片的质量

设有一平面薄片占有 xOy 平面上的闭区域 D,它在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$,假设 $\rho(x,y)$ 为 D 上的非负连续函数.下面计算该薄片的质量 M.

如果薄片是均匀的,即 $\rho(x,y)$ 恒为常数,则薄片的质量为

$$质量=面密度\times面积.$$

现在面密度 $\rho(x,y)$ 是变化的,薄片质量就不能直接用上述公式来计算.但是处理曲顶柱体体积的思想方法完全可以移植过来.

由于 $\rho(x,y)$ 连续,当把薄片分成若干小片后,只要每片所占的小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径充分小,这些小片就可以近似地看成均匀薄片,在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i),则

$$\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$$

就是第 i 个小片的质量的近似值(图 7.2),通过求和,取极限,得到

$$M=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i.$$

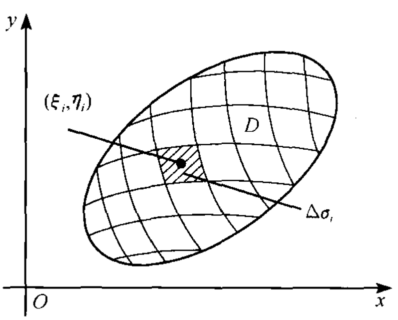

图 7.2

上面两个问题的实际意义虽然不同,但所求的量都归结为同一形式的和式的极限,很多实际应用问题都可归结为求上述和式的极限.对以上现象抽去问题的具体含义而加以概括,就得到二重积分的概念.

定义 7.1　设 $f(x,y)$ 是闭区域 D 上的有界函数,将闭区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$,小区域的面积仍记为 $\Delta\sigma_i$.在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)(也称为**介点**),作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i.$$

若当$\|T\|\to 0$时,上述和式的极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$$

总存在,且极限值与区域D的分法及介点(ξ_i,η_i)的取法均无关,则称$f(x,y)$在D上**可积**,且此极限值称为$f(x,y)$在D上的**二重积分**,记为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \text{ 或 } \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中x,y称为**积分变量**,$f(x,y)$称为**被积函数**,D称为**积分区域**,$\mathrm{d}\sigma$或$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$称为**面积元素**.

定义 7.1 的**等价形式**为

存在常数I,对$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,对D的任意分法及任取介点$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$,当$\|T\|<\delta$时,恒有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i-I\right|<\varepsilon,$$

则称I为$f(x,y)$在区域D上的**二重积分**,记为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I.$$

注 7.2 当$f(x,y)\geqslant 0$时,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的**几何意义**是以区域$D$为底面,以曲面$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积,即

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别地,当$f(x,y)\equiv 1$时,$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\Delta D$($\Delta D$表示区域$D$的面积).

7.1.2 二重积分的可积条件

类似于一元函数定积分的情形,可以证明:函数$f(x,y)$在区域D上可积的必要条件是$f(x,y)$在D上有界.

设$f(x,y)$是闭区域D上的有界函数,分割T将区域D分成n个小区域:

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n.$$

记

$$M_i=\sup_{(x,y)\in\Delta\sigma_i} f(x,y),\quad m_i=\inf_{(x,y)\in\Delta\sigma_i} f(x,y).$$

仍记小区域 $\Delta\sigma_i$ 的面积为 $\Delta\sigma_i$，作和式

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\sigma_i,\quad s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\sigma_i,$$

称 $S(T)$ 和 $s(T)$ 分别为 $f(x,y)$ 在 D 上关于分割 T 的**上和**与**下和**.

类似于一元函数的情形，有下述定理成立.

定理 7.1　设 $f(x,y)$ 是闭区域 D 上的有界函数，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是

$$\lim_{\|T\|\to 0}[S(T)-s(T)]=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i=0,$$

其中 $\omega_i=M_i-m_i$ 称为 $f(x,y)$ 在 $\Delta\sigma_i$ 上的**振幅**.

7.1.3　可积函数类

定理 7.2　若 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

证明　由 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续，即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$，当 $\rho(P_1,P_2)<\delta$ 时，有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\frac{\varepsilon}{\Delta D},$$

其中 ΔD 表示区域 D 的面积.

任取 D 的分割 T，且使 $\|T\|<\delta$，分割 T 把 D 分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，于是在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 上，有

$$\omega_i=M_i-m_i=\sup_{\Delta\sigma_i}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\Delta D}.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i\leqslant\frac{\varepsilon}{\Delta D}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i=\frac{\varepsilon}{\Delta D}\cdot\Delta D=\varepsilon,$$

即 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

定理 7.3　设 $f(x,y)$ 是闭区域 D 上的有界函数，若 $f(x,y)$ 的全体不连续点仅分布在 D 上的有限条光滑曲线上，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

证明略.

推论 7.1　设 $f(x,y)$ 是闭区域 D 上的有界函数，且只有有限个不连续点，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

定理 7.3 及推论 7.1 表明，若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，改变其在有限个点处的函数值，或改变其在有限条光滑曲线上的函数值，则 $f(x,y)$ 的可积性不变，且还可进一步证明其积分值也不变.

7.1.4　二重积分的性质

二重积分有类似于一元函数定积分的性质，下面只给出中值定理的证明，其余

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

性质的证明留给读者.

性质 7.1 若 $f(x,y)$在区域 D 上可积,k 为常数,则 $kf(x,y)$在 D 上也可积,且

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

性质 7.2 若 $f(x,y)$,$g(x,y)$均在区域 D 上可积,则 $f(x,y)\pm g(x,y)$在 D 上也可积,且

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

性质 7.3 若 $f(x,y)$,$g(x,y)$在区域 D 上可积,则 $f(x,y)\cdot g(x,y)$在 D 上也可积.

性质 7.4 若 $D=D_1\cup D_2$,且 D_1 与 D_2 无公共内点,则 $f(x,y)$在 D 上可积的充要条件是:$f(x,y)$在 D_1 和 D_2 上都可积,且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

性质 7.5 若 $f(x,y)$,$g(x,y)$在区域 D 上可积,且

$$f(x,y)\leqslant g(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别地,

(1) 当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时,有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0.$$

(2) 当 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$ 时,有

$$m\cdot\Delta D \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant M\cdot\Delta D,$$

其中 ΔD 表示区域 D 的面积.

性质 7.6 若 $f(x,y)$在 D 上可积,则$|f(x,y)|$在 D 上也可积,且

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

性质 7.7(积分中值定理) 若 $f(x,y)$在闭区域 D 上连续,$g(x,y)$在 D 上可积且不变号,则$\exists(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint_D f(x,y)\cdot g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明 不妨设 $g(x,y)\geqslant 0$,由于 $f(x,y)$在闭区域 D 上连续,故 $f(x,y)$在 D

上存在最大值和最小值，分别记为 M 和 m，于是

$$mg(x,y) \leqslant f(x,y) \cdot g(x,y) \leqslant Mg(x,y),$$

$$m\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_D f(x,y) \cdot g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant M\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ 时，结论显然成立.

当 $\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$ 时，有 $m \leqslant \dfrac{\iint_D f(x,y) \cdot g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \leqslant M.$

由二元连续函数的介值性定理，$\exists(\xi,\eta) \in D$，使得

$$f(\xi,\eta) = \frac{\iint_D f(x,y) \cdot g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

即

$$\iint_D f(x,y) \cdot g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

推论 7.2　若 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则 $\exists(\xi,\eta) \in D$，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta) \cdot \Delta D,$$

其中 ΔD 表示区域 D 的面积.

习　题　7.1

1. 利用二重积分的性质，比较下列二重积分的大小：

(1) $\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由坐标轴与直线 $x+y=1$ 所围成的区域.

(2) $\iint_D \ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint_D \ln^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由点 $(1,0)$，$(1,1)$ 与 $(2,0)$ 所围成的三角形区域.

2. 若函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且对 D 内任一子区域 D' 都有 $\iint_{D'} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，证明：$f(x,y) \equiv 0$，$(x,y) \in D$.

3. 若函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上非负连续，且 $f(x,y) \not\equiv 0$，证明：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0.$$

4. 设函数 $f(x,y)$ 为连续函数，求 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2$.

7.2　二重积分的计算

7.2.1　化二重积分为累次积分

二重积分的定义给出了计算二重积分的方法，但定义中的和式极限往往是很复杂的，因此通过定义计算二重积分是不太实际的. 下面将区域 D 上的二重积分的计算化为求两次定积分，此方法也称为**化二重积分为累次积分**.

1. 矩形区域的情形

定理 7.4　设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，且对任意固定的 $x\in[a,b]$，积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在，则先对 y 后对 x 的累次积分 $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ 也存在，且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

也简记为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

证明　令 $F(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$，则 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的函数. 对区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 分别作任意分割：

$$T_1: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$
$$T_2: c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_m=d.$$

再作两组直线 $x=x_i$，$y=y_j$，记这个分割为 $T=T_1\times T_2$. 则 T 把矩形区域 D 分成 $n\times m$ 个小矩形 $\Delta\sigma_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$（图 7.3）. 设在每个 $\Delta\sigma_{ij}$ 上 $f(x,y)$ 的上确界和下确界分别为 M_{ij} 和 m_{ij}. 任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，并记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 及 $\Delta y_j=y_j-y_{j-1}$，则

$$m_{ij}\Delta y_j\leqslant\int_{y_{j-1}}^{y_j}f(\xi_i,y)\mathrm{d}y\leqslant M_{ij}\Delta y_j.$$

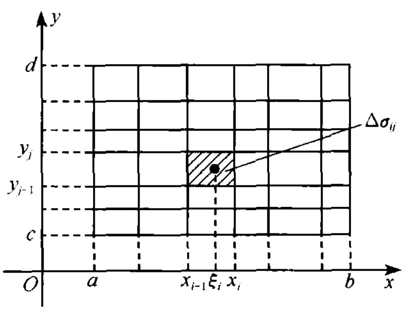

图 7.3

对 $j=1,2,\cdots,m$ 求和，得

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}\Delta y_j\leqslant\int_c^d f(\xi_i,y)\mathrm{d}y\leqslant\sum_{j=1}^m M_{ij}\Delta y_j$$

或

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \leqslant F(\xi_i) \leqslant \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j,$$

即

$$s(T) \leqslant \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S(T),$$

其中 $s(T)$,$S(T)$分别表示 $f(x,y)$关于分割 T 的下和与上和.

由于 $f(x,y)$在 D 上可积,所以当$\|T\|\to 0$ 时,有

$$\lim_{\|T\|\to 0} s(T) = \lim_{\|T\|\to 0} S(T) = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由追敛性知

$$\lim_{\|T_1\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

推论 7.3　若 $f(x,y)$在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$上连续,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

推论 7.4　若 $f(x)$在$[a,b]$上可积,$g(y)$在$[c,d]$上可积,则 $f(x)\cdot g(y)$在 $D=[a,b]\times[c,d]$上可积,且

$$\iint_D f(x)\cdot g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_c^d g(y)\mathrm{d}y.$$

2. 一般区域的情形

如果平面区域是由两条连续曲线 $y=\varphi(x)$和 $y=\psi(x)$及两条直线 $x=a$,$y=b$所围成,其中 $\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)$($a\leqslant x\leqslant b$),即

$$D=\{(x,y)\,|\,\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x),a\leqslant x\leqslant b\},$$

则称区域 D 为 x **型区域**(图 7.4).

如果平面区域 D 是由两条连续曲线 $x=g(y)$和 $x=h(y)$及两条直线 $y=c$,

$y=d$ 所围成,其中 $g(y)\leqslant x\leqslant h(y)(c\leqslant y\leqslant d)$,即

$$D=\{(x,y)\mid g(y)\leqslant x\leqslant h(y),c\leqslant y\leqslant d\},$$

则称区域 D 为 y **型区域**(图 7.5).

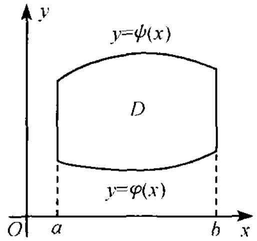

图 7.4

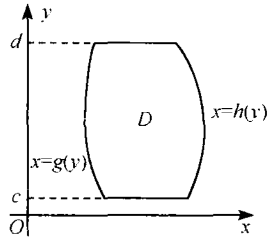

图 7.5

x 型区域和 y 型区域统称为**平面简单区域**. 当区域 D 不是简单区域时,一般总可用平行于 x 轴或 y 轴的有限条直线段,把它分成有限个简单区域.

定理 7.5 设函数 $f(x,y)$ 在 x **型区域**

$$D=\{(x,y)\mid\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x),a\leqslant x\leqslant b\}$$

上可积,$\varphi(x)$、$\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,若对每个固定的 $x\in[a,b]$,积分 $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在,则先对 y 后对 x 的累次积分 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 也存在,且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

证明 作矩形区域 $G=[a,b]\times[c,d]$,使 $D\subset G$(图 7.6). 在 G 上定义函数

$$F(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\in G\setminus D,\end{cases}$$

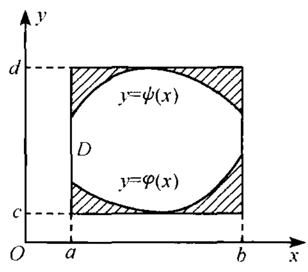

图 7.6

则 $F(x,y)$ 在 G 上可积. 由定理 7.4,得

$$\iint_G F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d F(x,y)\mathrm{d}y.$$

又

$$\begin{aligned}\int_c^d F(x,y)\mathrm{d}y&=\int_c^{\varphi(x)}F(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}F(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\psi(x)}^{d}F(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}F(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

所以

$$\iint_G F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

又由 $F(x,y)$ 的定义知

$$\iint_G F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{G\setminus D} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

类似地，若函数 $f(x,y)$ 在 y 型区域

$$D=\{(x,y)\mid g(y)\leqslant x\leqslant h(y),c\leqslant y\leqslant d\}$$

上可积，$g(y)$，$h(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，且对每个固定 $y\in[c,d]$，积分 $\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$ 存在，则累次积分 $\int_c^d \mathrm{d}y\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$ 也存在，且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

例 7.1　将二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为两种不同次序的累次积分，其中区域 D 由 $y^2=2x$ 与 $y=x-4$ 所围成(图 7.7).

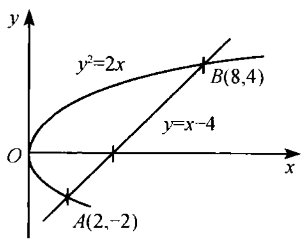

图 7.7

解　解方程组 $\begin{cases}y^2=2x,\\ y=x-4\end{cases}$ 得交点为 $A(2,-2)$，$B(8,4)$.

(1) 先对 x 后对 y 的累次积分为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^4 \mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 先对 y 后对 x 的累次积分为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^8 \mathrm{d}x\int_{x-4}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

例 7.2　计算 $\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x=0$，$y=1$ 及 $y=x$ 所围成的区域(图 7.8).

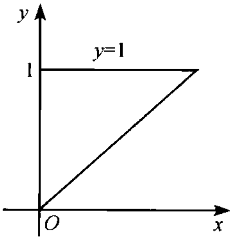

图 7.8

解　由于 $\int \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 不能用初等函数表示出来，所以用先对 y 后对 x 的累次积分无法进行计算. 现利用先对 x 后对 y 的累次积分计算.

$$\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com