普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI
（高职高专教育）

Applied Mathematics

YINGYONG SHUXUE

应用数学

段东东 胡志刚 主编
吴少祥 胡雅彬
任晓全 吴文海 副主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS
中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育"十一五"规划教材

PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

（高职高专教育）

YINGYONG SHUXUE

应用数学

主　编　段东东　胡志刚

副主编　吴少祥　胡雅彬　任晓全　吴文海

编　写　马小燕　余庆红　李东光　赵启峰

主　审　胡庆平

江苏工业学院图书馆

藏书章

中国电力出版社

http://jc.cepp.com.cn

内容提要

本书为普通高等教育“十一五”规划教材（高职高专教育）。全书共分七章，主要内容包括线性代数、线性规划、概率论、统计推论、复变函数、数学建模简介、MATLAB简介及附表等。各章末附有小结及自测题，并附有部分习题答案及提示；习题按小节配置，量大、题型多，便于学生深刻理解所学内容。

本书不拘泥于数学科学自身的系统性和逻辑性；对于基础理论不追求严格的论证和推导，只作简要的说明；不强调复杂的计算和变换，选配适量的例题、习题；有较强的选择性、实用性；文字叙述简明扼要，通俗易懂。

本书可作为高职高专院校工科类或经管类各专业的教材，也可作为中职院校、电大和自学考试的教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学/段东东，胡志刚主编．—北京：中国电力出版社，2009

普通高等教育“十一五”规划教材．高职高专教育

ISBN 978-7-5083-8192-3

Ⅰ．应…　Ⅱ．①段…②胡…　Ⅲ．应用数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．029

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第202496号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号　100044　http：//jc.cepp.com.cn）

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2009年2月第一版　2009年2月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　14.75印张　354千字

定价 **24.00** 元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签，加热后中心图案消失

本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版权专有　翻印必究

前　言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神，加强教材建设，确保教材质量，中国电力教育协会组织制订了普通高等教育"十一五"教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校，满足学科发展和人才培养的需求，坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与修订相结合。本书为新编教材。

本书依据教育部最新制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，由西安电力高等专科学校数学课程组，在多年的教学实践基础上编写的。全书内容满足高职高专教育培养高技能型人才的需要，适用于高职高专工科类或经管类各专业。

本书由段东东、胡志刚任主编，胡雅彬、吴少祥、任晓全、吴文海任副主编。编写分工如下：第一章由段东东编写，第二章由吴少祥编写，第三章由胡雅彬、赵启峰编写，第四、五章由任晓全编写，第六章由余庆红编写，第七章由马晓燕编写。吴文海、李东光承担了部分书稿的统稿工作。

本书各章内容分模块、分层次编排，用"*"号标注的内容可供不同学校与专业选用；每章后具有一定难度的习题用"*"表示，供不同层次的学生选用；每章后有本章小结和自测题，并附有部分习题答案及提示。

本书力求贯彻"以应用为目的，以必须够用为度，以可读性为基点，以创新为导向"的编写原则，其具有以下特点：

（1）不拘泥于数学科学自身的系统性和逻辑性。

（2）对于基础理论不追求严格的论证和推导，只作简要的说明。

（3）不强调过分复杂的计算和变换，选配适量的例题、习题，使学生能掌握基本的理论和方法。

（4）针对高职高专各专业的实际而编写，有较强的选择性。为了适应各专业的使用，选定各专业都必须使用的基本内容作为基点，构成不同的层次。

（5）有较强的实用性。编写了数学建模方面的内容，以培养学生运用数学的意识；介绍了 MATLAB 软件的使用方法，使学生掌握用计算机解题方法，解决了数学应用中的计算瓶颈。

西北大学胡庆平教授审阅了全书，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。本书在编写过程中，广泛地参考了国内外的教材和书籍，借鉴和吸收同行的研究成果，在此一并表示感谢。

限于编者的经验与水平，书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正。

编　者

2008 年 10 月

目录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 线 性 代 数

研究线性方程和线性方程组的理论及应用的科学，称为线性代数．线性代数是离散数学的基础之一．行列式和矩阵来源于对线性方程组解的研究，它们既是线性代数的研究对象，又是解决线性代数问题的有力工具．本章将介绍有关行列式、矩阵及向量组线性相关性的一些基础知识，同时利用它们讨论一般线性方程组的解法及解的结构．

第一节 行 列 式

一、行列式的概念

1．二阶和三阶行列式

行列式是线性代数的一个重要概念，它是为解线性方程组而引出的，且在数学其他分支的应用也很广泛．下面首先讨论二元线性方程组的解法．

设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

用加减消元法可以看出，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组（1-1）有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了便于记忆，将上式中的分母用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

定义 1-1 符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{21}$ 称为二阶行列式，记作 D．它由两行两列 2^2 个数组成，代表一个算式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \tag{1-2}$$

其中 a_{ij}（i，j=1，2）称为行列式的元素，第一个下标 i 表示第 i 行，称为行指标．第二个下标 j 表示第 j 列，称为列指标．如：a_{ij} 就表示第 i 行第 j 列相交处的那个元素，式（1-2）的右端 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ 称为二阶行列式的展开式．它是两项的代数和，一项是从左上角 a_{11} 到右下角 a_{22} 的连线（称为主对角线）上两元素的乘积，取正号；另一项从左下角 a_{21}

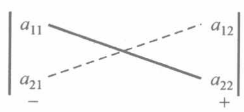

图 1-1

到右上角 a_{12} 的连线（称为次对角线）上两元素的乘积，取负号. 如图 1-1 所示.

根据此定义，则线性方程组（1-1）的解可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

若令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则线性方程组（1-1）的解可简单地表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \end{cases} \quad (D\neq 0)$$

例 1-1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=3 \\ 2x_1+x_2=6 \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=9 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=0$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3 \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=0$$

类似地，为了解由 3 个线性方程式构成的三元线性方程组，引进三阶行列式的概念.

定义 1-2 符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式，它由 3^2 个数组成，也代表一个算式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

上式的右端称为三阶行列式的展开式，其展开式表示的代数和共有 6 项，3 项正，3 项负，每项都是不同行不同列的 3 个元素的乘积. 三阶行列式的这一展开规律，可以用画线（如图 1-2 所示）的方法来记忆，其中各实线连接的 3 个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连接的 3 个元素的乘积是代数和中的负项，这种计算行列式的方法

称为对角线法.

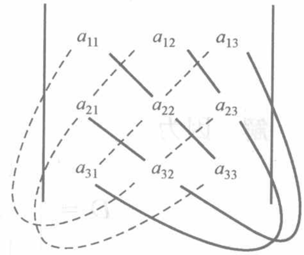

图 1-2

由消元法及三阶行列式，可以得出三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-3}$$

的解可简单地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (D \neq 0)$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 1-2 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & y & 3 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$.

解 (1) 由对角线法则，得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= 2\times1\times(-2)+(-3)\times1\times3+1\times1\times1-1\times1\times3 \\ &\quad -2\times1\times1-(-3)\times1\times(-2) \\ &=-23 \end{aligned}$$

(2) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & y & 3 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = xyz+0+0-0-0-0=xyz$

例 1-3 已知行列式 $\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ k & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$，求 k 的值.

解 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ k & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9k+1+k-3k+k-3=-10k-2$$

由已知得 $-10k-2=0$，所以 $k=-\dfrac{1}{5}$.

例 1-4 用行列式解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ -2x_1+x_2-x_3=-3 \\ x_1-4x_2+2x_3=-5 \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}=2+8-2-1+8-4=11\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=33 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}=11$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix}=-22$$

所以得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-2$$

2. n 阶行列式

定义 1-3 n 阶行列式由 n^2 个元素构成，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-4}$$

其中 a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）称为行列式第 i 行第 j 列的元素．为了方便起见，n 阶行列式（1-4），可简记为 $D=|a_{ij}|_n$．阶数 n 大于 3 的行列式称为高阶行列式．

从左上角到右下角的元素 a_{11}，a_{22}，a_{33}，…，a_{nn} 称为主对角线上元素，从左下角到右上角的元素 a_{n1}，$a_{n-1,2}$，$a_{n-2,3}$，…，a_{1n} 称为次对角线上元素．划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列上所有元素后形成的 $n-1$ 阶行列式

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，而将 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式．

例如三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

元素 a_{23} 的余子式是

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

元素 a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -M_{23}$$

定理 1-1 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 等于它任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$
$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

这样，可以通过计算 n 个 $n-1$ 阶行列式来计算 n 阶行列式，这个定理称为拉普拉斯定理，上式称为拉普拉斯展开式.

例如用定理 1-1 考察三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

现在按第 2 行展开得

$$\begin{aligned} D &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= a_{21} \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

可知定理成立.

推论 行列式的某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j \tag{1-5}$$
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j \tag{1-6}$$
$$(i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,n)$$

把定理 1-1 和推论结合起来可写成

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

特殊地

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为主对角行列式.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为上三角行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为下三角行列式. 根据定理 1-1 可得，这 3 个行列式的值都为 $a_{11}a_{22}a_{33}\dots\ a_{nn}$.

例 1-5 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$

解 根据定理 1-1

$$D=a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}\cdot a_{24}(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}.$$

例 1-6 试证下三角形行列式的值等于其主对角线上全体元素的乘积，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$$

证明 利用定理 1-1，依次降低其阶数，每次都仅有一项不为零，故有

$$D=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot a_{22}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\dots\cdot(-1)^{1+1}a_{nn}=a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

二、行列式的性质

为了简化行列式的求值计算，下面不加证明地介绍 n 阶行列式的一些基本性质.

定义 1-4 将行列式 D 的行与相应的列互换后得到的新行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^{T}.

即若
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则
$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式具有如下性质.

性质 1 行列式转置后，其值不变，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由性质 1 可知，行列式中凡是对行成立的性质，对列也成立，反之亦然.

性质 2 互换行列式中的任意两行（列），行列式仅改变符号.

容易验证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由性质 2 可得性质 3、性质 4

性质 3 如果行列式中有两行（列）的对应元素相同，则此行列式为零.

性质 4 如果行列式中有一行（列）元素全为零，则这个行列式等于零.

性质 5 把行列式的某一行（列）的每一个元素同乘以数 k，等于以数 k 乘该行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 1 如果行列式某行（列）的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式外面.

推论 2 如果行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式等于零.

性质 6 如果行列式中的某一行（列）所有元素都是两个数的和，则此行列式等于两个行列式的和，而且这两个行列式除了这一行（列）以外，其余的元素与原行列式的对应元素相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 7 以数 k 乘行列式的某一行（列）的所有元素，然后加到另一行（列）的对应元素上，则行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

规定：

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$（$c_i \leftrightarrow c_j$）表示第 i 行（列）与第 j 行（列）交换位置.

(2) kr_i+r_j（kc_i+c_j）表示第 i 行（列）的元素乘数 k 加到第 j 行（列）上.

行列式的基本计算方法之一是根据行列式的特点，利用行列式的性质，把它逐步化成上（或下）三角形行列式，由前面的结论可知，这时行列式的值就是主对角线上元素的乘积，这种方法一般称为化三角形法. 计算行列式的另外一种基本方法是先用性质把某一行（列）的元素化为仅有一个非零元素，然后再按这一行（列）展开，这种方法一般称为降阶法.

例 1-7 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 297 & 101 & 99 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解 (1) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 297 & 101 & 99 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 300-3 & 100+1 & 100-1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 300 & 100 & 100 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=2$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[-r_1+r_4]{-r_1+r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -21$$

(3) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$$

例 1-8 利用行列式的性质证明

$$\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

证明 $$\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_3} \begin{vmatrix} a+b+(-a) & c & -a \\ a+c+(-c) & b & -c \\ b+c+(-b) & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & -a \\ a & b & -c \\ c & a & -b \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} \xlongequal[c_2 \leftrightarrow c_3]{} \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

例 1-9 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a & a \\ a & x-a & x-a & \cdots & a & a \\ a & a & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a & a \\ a & a & a & \cdots & a & x-a \end{vmatrix}$$

解法一 此行列式的特点为：各行（列）的元素之和相同，都是 $x+(n-2)a$，因此把 D 的第 2，3,…，n 列都加到第 1 列上去，再提出第 1 列的公因子 $x+(n-2)a$，最后化为三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-2)a & x-a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-2)a & a & x-a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x+(n-2)a & a & a & \cdots & x-a & a \\ x+(n-2)a & a & a & \cdots & a & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 1 & x-a & a & \cdots & a & a \\ 1 & a & x-a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x-a & a \\ 1 & a & a & \cdots & a & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-2a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-2a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}$$

解法二 因为 D 中除主对角线上元素外，其余元素都是 a，所以可先用行列式性质 7 使 D 中元素尽可能多地化为 0，再化为三角形行列式.

$$D\xlongequal[(i=2,3,\ldots,n)]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a & a \\ -x+2a & x-2a & 0 & \cdots & a & 0 \\ -x+2a & 0 & x-2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x+2a & 0 & 0 & \cdots & x-2a & 0 \\ -x+2a & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-2a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+c_j]{(j=2,3,\ldots,n)}\begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & a & \ldots & a & a \\ 0 & x-2a & 0 & \ldots & a & 0 \\ 0 & 0 & x-2a & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x-2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x-2a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}$$

三、克莱姆法则

这部分主要讨论利用行列式，解 n 元线性方程组的方法.

含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-7}$$

将线性方程组系数组成的行列式记为 D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

用常数项 b_1，b_2，…，b_n 代替 D 中的第 j 列，组成的行列式记为 D_j，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad (j=1,2,\ldots,n)$$

定理 1-2 （克莱姆法则）若线性方程组（1-7）的系数行列式 $D\neq 0$，则存在唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n=\frac{D_n}{D}.$$

例 1-10 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \end{cases}$$

解 因为方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-9\times 17=-153\neq 0$$

根据定理 1-2，方程组有唯一解. 且

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com