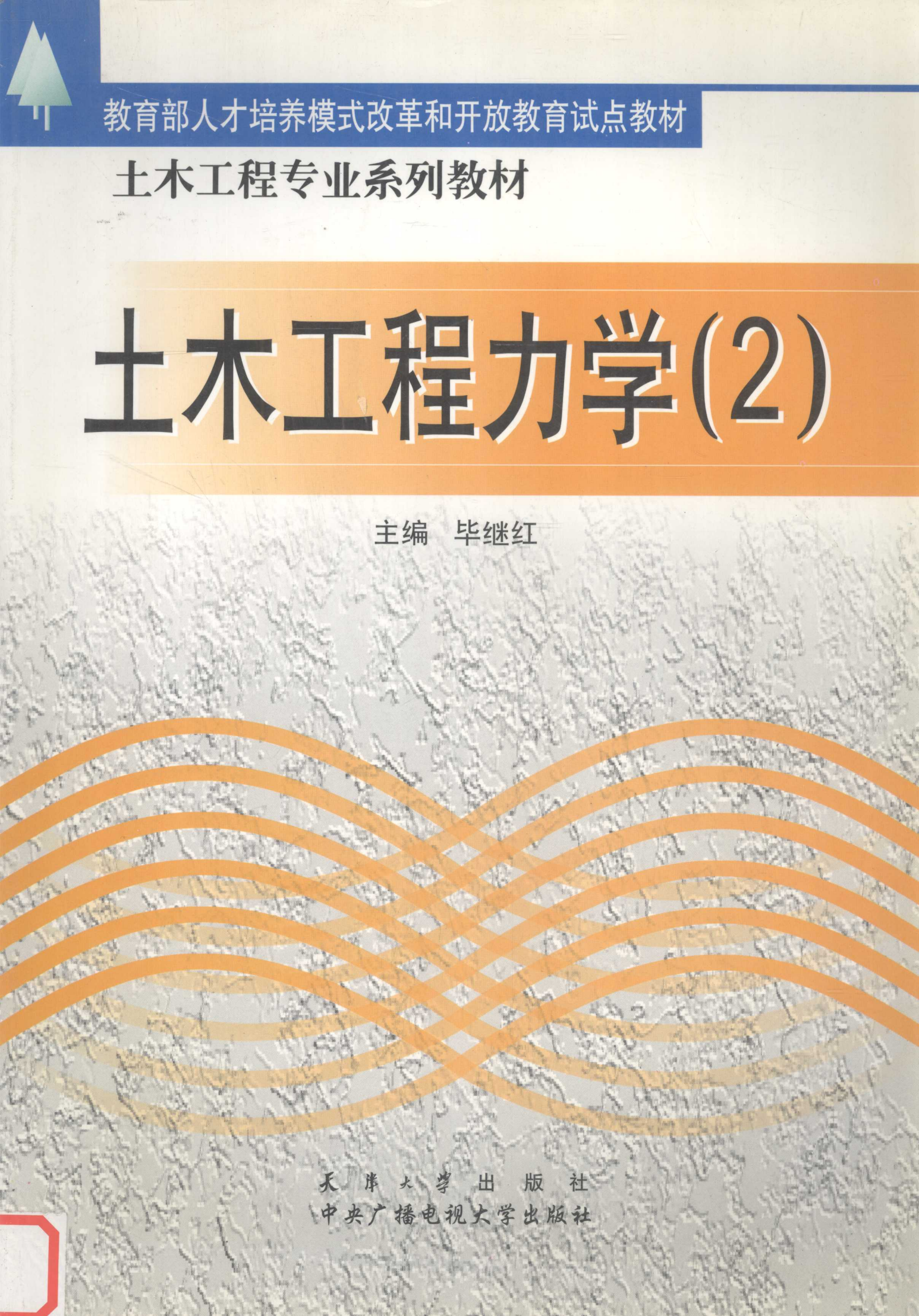




教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

土木工程专业系列教材

土木工程力学(2)

主编 毕继红

天津大学出版社
中央广播电视大学出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材
土木工程专业系列教材

土木工程力学(2)

主编 毕继红



天津大学出版社
中央广播电视大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

土木工程力学(2)/毕继红主编. —天津:天津大学出版社,2003.2
ISBN 7-5618-1737-1

I. 土… II. 毕… III. 土木工程—工程力学—电视大学—教材 IV. TU311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 010132 号

书 名 土木工程力学(2)
主 编 毕继红
出版发行 天津大学出版社
中央广播电视大学出版社
出 版 人 杨风和
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(天津大学出版社)
北京市复兴门内大街 160 号(中央广播电视大学出版社)
电 话 营销部:022-27403647 邮购部:022-27402742(天津大学出版社)
发行部:010-68519502 邮购部:010-68511268(中央广播电视大学出版社)
印 刷 北京云浩印刷有限责任公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 210mm×297mm
印 张 13.25
字 数 460 千
版 次 2003 年 2 月第 1 版
印 次 2003 年 2 月第 1 次
印 数 1—3000
书 号 ISBN 7—5618—1737—1
定 价 18.00 元

内 容 提 要

本教材共分 8 章,内容包括绪论、力法、位移法、用力矩分配法计算超静定结构、结构在移动荷载作用下的计算、结构矩阵分析、结构动力计算和梁的极限荷载。

为了适应远程教学特点,满足以自学为主的学生需求,编写时力求深入浅出。为了贯彻理论联系实际的原则和培养学生分析、解决问题的能力,将部分内容列为选学内容,并在每章后附有思考题。

本教材可作为中央广播电视大学远程教育土木工程专业的技术基础课教材,也可作为给水排水、建筑学、建筑材料、道桥等专业的教材,还可供广大工程技术人员参考。

土木工程专业课程建设

委员会名单

顾 问:	刘锡良	江见鲸	顾晓鲁		
策 划:	钱辉镜	杨风和	任 岩	陈家修	
主 任:	姜忻良				
副主任:	蒋克中	王铁成	刘兴业		
委 员:	丁 阳	丁红岩	于俊英	王 圻	王金敏
	方根男	刘宗仁	刘津明	包世华	罗福午
	孙天正	孙天杰	匡文起	李 杰	李林曙
	李砚波	李运光	任兴华	毕继红	严士超
	杨春风	陈永灿	陈中良	吴铭磊	旷天鑑
	郑 刚	郑家扬	邹积明	何勇军	邵立国
	张晋元	张质文	陆培毅	周建滨	赵奎生
	赵 彤	赵铁生	常春伟	洪 钧	高学平
	黄世昌	康谷贻	韩庆华	温庆涛	鄢小平
	魏鸿汉	戴自强			
秘 书:	郭 鸿	陈英蕙			

前 言

中央广播电视大学是一所从事远程开放教育的新型学校,学习者主要是在职的成人和社会青年。他们的学习目的明确,实践经验丰富。他们或为提高自身的业务水平而学习,或为准备就业而学习。为了适应电大远程学习的特点,满足以业余自学为主的学生需求,特编写此教材。

本教材是依据 2001 年 11 月审定的中央广播电视大学开放教育试点“工科土建类土木工程专业”土木工程力学(2)课程教学大纲和 2002 年 3 月审定的土木工程力学(2)多媒体教材一体化设计方案编写的,是土木工程专业的系列教材之一。

土木工程力学(2)课程包括文字教材、录像、IP 课件及 CAI 课件。文字教材是学生主要学习的主要媒体。IP 课件是本课程的重要媒体之一,以课程的知识点为线索,采用系统讲授、重点精讲与交互辅导相结合的方式制作,与文字教材密切呼应,达到启迪学生独立思考及提高学生自学能力的目的。录像教材是本课程学习的强化媒体,是文字教材、IP 课件的重要补充。CAI 课件重点是练习题。本教材就是以上提到的文字教材。因为学生以自学为主,所以教材中 * 部分为选学内容。

全书共分 8 章,即绪论、力法、位移法、用力矩分配法计算超静定结构、结构在移动荷载作用下的计算、结构矩阵分析、结构动力计算及梁的极限荷载。

参加本书编写的有毕继红(编写第 1 章、第 7 章及第 8 章)、侯朝胜(编写第 4 章及第 6 章)、鄢小平(编写第 3 章)、王晖(编写第 2 章)及田力(编写第 5 章),由毕继红主编。中央广播电视大学鄢小平老师做了本书的教学设计。

本书由清华大学包世华教授、天津大学李增福教授及张韞美教授主审。专家们对此书进行了详细的审阅,并提出了宝贵意见。

由于编者水平有限,对于中央广播电视大学的教学模式的研究还远远不够,书中若有不妥之处,恳请各位专家及广大读者指正。

编者

2002 年 12 月

目 录

第1章 绪论	(1)
1.1 土木工程力学(2)的主要内容	(1)
1.2 荷载的分类	(2)
1.3 土木工程力学(2)的学习方法	(2)
本章小结	(3)
第2章 力法	(4)
2.1 超静定结构的概念和超静定次数的确定	(4)
2.2 力法原理和力法方程	(6)
2.3 用力法计算超静定梁和刚架	(9)
2.4 用力法计算超静定桁架和组合结构	(13)
2.5 用力法计算超静定拱	(16)
2.6 对称结构的计算	(19)
2.7 温度变化和支座移动时超静定结构的计算	(24)
* 2.8 超静定结构的位移计算	(28)
本章小结	(28)
思考题	(29)
习题	(30)
第3章 位移法	(36)
3.1 位移法的基本概念	(36)
3.2 等截面直杆的形常数和载常数	(38)
3.3 位移法的基本未知量和基本结构	(42)
3.4 位移法方程	(45)
3.5 位移法应用举例	(48)
3.6 用位移法计算对称结构	(58)
本章小结	(64)
思考题	(65)
习题	(66)
第4章 用力矩分配法计算超静定结构	(71)
4.1 力矩分配法的基本概念	(71)
4.2 用力矩分配法计算连续梁	(73)
4.3 用力矩分配法计算无结点线位移的刚架	(82)
本章小结	(85)
思考题	(85)
习题	(86)
第5章 结构在移动荷载作用下的计算	(89)
5.1 影响线的概念	(90)
5.2 用静力法作直接荷载作用下单跨静定梁的影响线	(91)
5.3 间接荷载作用下的影响线	(94)
5.4 用机动法作单跨静定梁的影响线	(95)
5.5 桁架影响线	(98)

5.6 影响线的应用	(100)
本章小结	(105)
思考题	(106)
习题	(107)
第6章 结构矩阵分析	(109)
6.1 矩阵位移法的基本概念及连续梁的计算	(110)
6.2 平面杆件结构的单元分析	(117)
6.3 坐标变换	(120)
6.4 结点、单元及未知位移分量编号	(122)
6.5 平面杆件结构的整体分析	(127)
6.6 非结点荷载的处理	(133)
6.7 平面杆件结构的解题步骤及算例	(138)
本章小结	(144)
思考题	(144)
习题	(145)
第7章 结构动力计算	(148)
7.1 基本概念	(148)
7.2 单自由度体系的运动方程	(151)
7.3 单自由度体系的自由振动	(156)
7.4 单自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动	(159)
7.5 单自由度体系在任意荷载作用下的动力计算	(164)
7.6 多自由度体系运动方程的建立	(166)
7.7 多自由度体系的自由振动	(171)
7.8 多自由度体系振型的正交性	(175)
7.9 两个自由度体系在简谐荷载下的强迫振动	(176)
* 7.10 振型叠加法	(179)
* 7.11 能量法计算自振频率	(182)
本章小结	(184)
思考题	(185)
习题	(185)
第8章 梁的极限荷载	(188)
8.1 概述	(188)
8.2 基本概念	(189)
8.3 三个定理	(192)
8.4 超静定梁破坏机构的可能形式	(193)
8.5 超静定梁的极限荷载	(195)
本章小结	(199)
思考题	(199)
习题	(200)
参考文献	(201)

第1章 绪 论

学习目标

1. 了解土木工程力学(2)与其他课程的关系。
2. 了解土木工程力学(2)的主要内容。
3. 了解荷载的分类。
4. 掌握此课程的学习方法。

学习重点

掌握此课程的学习方法。

1.1 土木工程力学(2)的主要内容

1.1.1 土木工程力学(2)与其他课程的关系

土木工程力学是土木工程类专业的一门重要技术基础课。它主要研究杆件体系的强度、刚度问题,分为土木工程力学(1)及土木工程力学(2)。土木工程力学(1)是土木工程类专科教学内容,土木工程力学(2)是专接本的教学内容。土木工程力学(1)是土木工程力学(2)的基础。

除了土木工程力学(1)以外,理论力学和材料力学也是土木工程力学(2)的基础。理论力学主要研究刚体的运动规律及力学分析。材料力学研究单根杆件(或称梁)的强度、刚度。土木工程力学主要研究杆件体系的强度、刚度问题,所以理论力学与材料力学是土木工程力学的重要基础课。

土木工程力学(2)又是混凝土结构、钢结构及地基基础等课程的基础。在土木、道桥、地下工程及水利工程各专业的学习中起着十分重要的作用。

1.1.2 主要研究内容

1. 用力法计算超静定结构的内力

在土木工程力学(1)课程中已有力法一章,它只研究一次超静定结构在荷载作用下的内力计算问题。在土木工程力学(2)中研究二次及高次超静定结构在荷载作用下的内力计算和超静定结构在温度变化、支座移动及存在制造误差时的内力计算。

2. 用位移法计算超静定结构的内力

在土木工程力学(1)位移法一章中研究具有一个结点位移结构的内力计算,在土木工程

本书前两章的内容与土木工程力学(1)有部分重复。

力学(2)中主要研究具有两个及多个结点位移结构的内力计算。

3. 用力矩分配法计算超静定结构

本节主要讨论用力矩分配法计算连续梁和无结点线位移的刚架。

4. 结构矩阵分析

以位移法为理论基础,以计算机为工具,解决杆件结构的计算问题。

5. 结构在移动荷载作用下的计算

研究结构在移动荷载作用下的内力计算,包括影响线的概念、做法及应用。

6. 结构的动力计算

此部分内容研究在动力荷载作用下,结构的动内力与动位移的分析及计算方法。

7. 梁的极限荷载

研究梁的极限状态及极限承载能力。

1.2 荷载的分类

荷载是作用在结构上的外力,如结构的自重、风荷载、工业厂房的吊车荷载及建筑楼梯上的人群荷载等。

1.2.1 按荷载的分布情况分为集中荷载和分布荷载

集中荷载是指作用在结构的个别点上的力。实际上,没有绝对的集中荷载,荷载应分布在某一小段上,只是此小段的面积与结构的尺寸相比非常小,所以简化为作用在一点上的集中荷载。

分布荷载是连续分布在结构上的力,当此荷载集度相等时,称为均布荷载。

1.2.2 按荷载作用时间的长短分为活载和恒载

恒载是指作用在结构上的永久不变的荷载,如结构的自重及固定设备的重量等。

活载是暂时作用在结构上的力,如风载、雪载、建筑物里的人群重量、吊车梁上的吊车荷载等。活载又可分为可动荷载和移动荷载。可动荷载是指作用在结构上任意位置的荷载,如风载和雪载。移动荷载是指一系列平行、间距不变的可移动荷载,如桥面上的车辆荷载、吊车梁上的吊车荷载等。

1.2.3 按荷载作用的性质分为静力荷载和动力荷载

静力荷载是逐级变化的荷载,力的大小、方向和作用位置均缓慢变化,不致引起结构的显著振动。

动力荷载是指能引起结构振动的荷载,即力的大小、方向或作用位置随时间迅速变化,如地震荷载。

1.3 土木工程力学(2)的学习方法

学习此课程时,要多做习题,并且一定要先看书,后做习题。

土木工程力学(2)是土木、水利等专业的技术基础课,理论性较强。学好此课程,可为今后混凝土、地基、钢结构、桥梁等课程的学习打下基础,也可为以后解决工程实际问题提供必要的理论基础和计算技能。

学习此课程时,应对照教学大纲要求认真体会每一章。注意培养分析问题和解决问题的能力,不要死记硬背解题方法和解题步骤,要认清问题的实质并掌握解题的思路。

学习时,注意理论联系实际,将在土木工程力学(2)中学到的理论应用到工程实际,注意观察工程实际结构,用所学的知识分析它们的受力特点。联系实际学习理论,有助于更好地掌握理论。

本章小结

本章主要讲述了土木工程力学(2)与其他课程的关系、主要研究内容、荷载的分类及学习方法。

土木工程力学(1)、理论力学和材料力学是土木工程力学(2)的基础。土木工程力学(2)又是混凝土结构、钢结构、地基基础等课程的基础。

土木工程力学(2)的主要研究内容有力法、位移法、力矩分配法、结构矩阵分析、影响线、结构的动力计算和梁的极限荷载。

作用在结构上的外力称为荷载。荷载有三种不同的分类方法。按荷载的分布情况分为集中荷载和分布荷载;按荷载作用的时间长短分为活载和恒载;按荷载作用的性质分为静力荷载和动力荷载。

在学习土木工程力学(2)时,应注意培养分析问题和解决问题的能力,并注意理论联系实际。

第2章 力 法

学习目标

1. 理解本章的基本概念,如超静定次数、多余未知力、基本结构。
2. 掌握超静定次数的确定。
3. 掌握力法原理及力法方程的建立。
4. 掌握用力法计算超静定梁、刚架、桁架、组合结构及拱在外荷载、温度变化和支座移动时的内力及其内力图的绘制。
5. 掌握对称性的利用。
6. 了解超静定结构的位移计算原理及方法。

学习重点

1. 掌握超静定次数的确定及基本结构的建立。
2. 掌握根据所去多余约束处的位移条件建立力法方程。
3. 掌握力法方程中的系数和自由项的计算。
4. 掌握利用对称性简化结构的计算。

学习建议

1. 本章内容偏难,建议利用 IP 课件及录像等多种媒体进行自学。
2. 注重基本概念和原理的理解及超静定结构的受力分析。

2.1 超静定结构的概念和超静定次数的确定

2.1.1 超静定结构的概念

从几何构造方面看,所谓超静定结构为有多余约束的几何不变体系;从静力分析方面看,这种结构的支座反力和各截面的内力不能完全由静力平衡条件惟一地确定。超静定结构区别于静定结构的基本特点是:内力是超静定的,约束是有多余的。

超静定结构中多余约束的选取方案不惟一。如图 2-1 所示,支杆 C 可看做是多余约束,支杆 B 也可看做多余约束。某个约束能否视为多余,要看它是否为维持结构的几何不变性所必需。对于一个超静定结构而言,多余约束的选取方案虽有多多样性,但它们的总数目却固

定不变。图 2-1 所示的结构为具有一个多余约束的超静定结构。

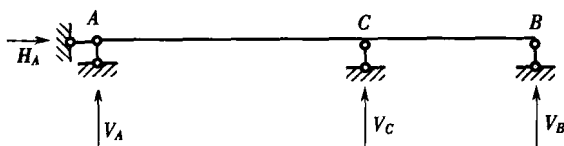


图 2-1

多余约束中产生的约束力称为多余未知力。在图 2-1 中,当支座 B 被认为是多余约束时,其反力 V_B 即是多余未知力。超静定结构中的多余未知力不能用静力平衡条件确定。

2.1.2 超静定次数的确定

通常将结构中多余约束的数目称为结构的超静定次数。

判断超静定次数可以用去掉多余约束使原结构变成静定结构的方法进行。

通常去掉多余约束有以下方式:

① 去掉支座处的一根支杆或切断一根链杆,相当于去掉一个约束,如图 2-2 所示的一次超静定结构;

超静定结构的次数等于超静定结构中多余约束的个数。

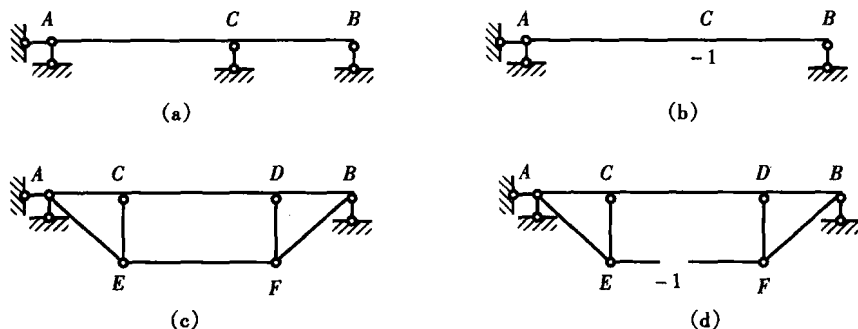


图 2-2

② 去掉一个铰支座或联结两刚片的单铰,相当于去掉两个约束,如图 2-3 所示的二次超静定结构;

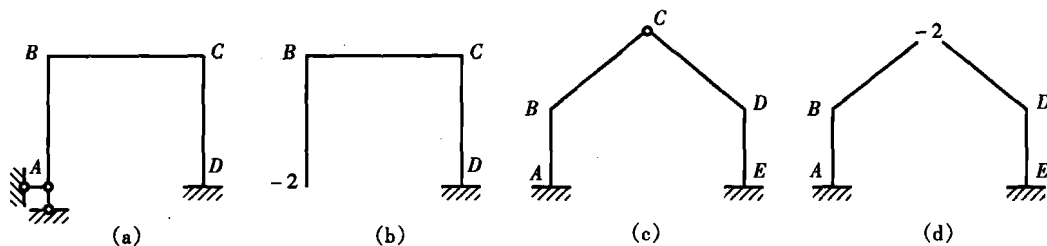


图 2-3

③ 将固定端支座改成铰支座,或将连续杆件上的刚性联结改成单铰联结,相当于去掉一个约束,如图 2-4 所示的一次超静定结构;

④ 去掉一个固定端支座,或将刚性联结切断,相当于去掉三个约束,如图 2-5 所示的三次超静定结构。

去掉多余约束时应注意以下几点:

① 不要把原结构拆成一个几何可变体系。在如图 2-1 所示的结构中,若将中支座 A 处的水平支杆去掉,则变成了几何可变体系。

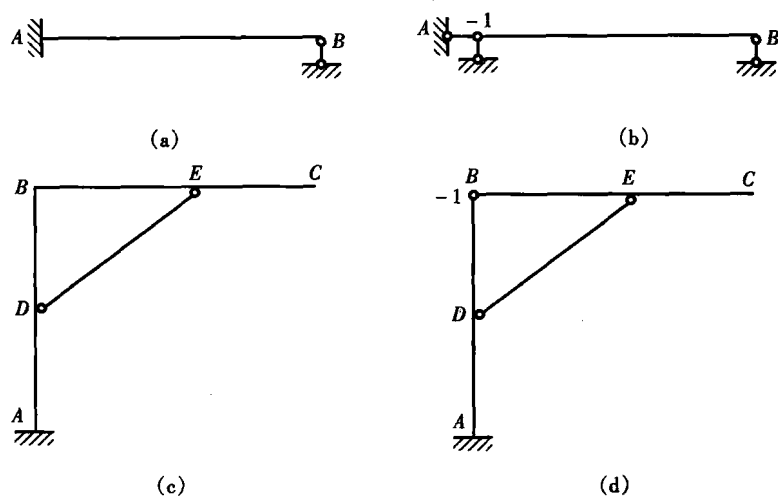


图 2-4

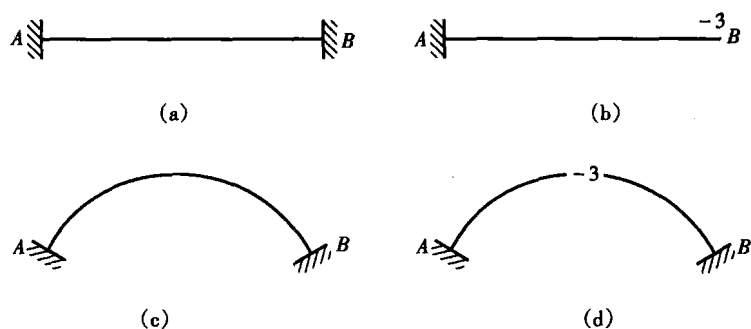


图 2-5

②要把全部多余约束都去掉。在如图 2-6 所示的结构中,若只去掉支座处的一根竖向支杆,此时闭合框仍有三个多余约束,因此必须把闭合框再切开一个截面,才能成为静定结构。由此可见,原结构共有四个多余约束,是四次超静定结构。

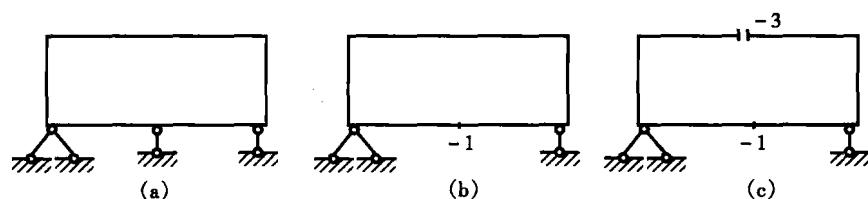


图 2-6

2.2 力法原理和力法方程

2.2.1 力法原理

力法是计算超静定结构最基本的方法。力法计算的基本思路是利用位移条件求出多余未知力,由此可把超静定结构的计算问题转化为静定结构的计算问题。

图 2-7(a)为具有一个多余约束的原结构。若将支座 B 处的支杆看做多余约束,则其中的约束反力为多余未知力(简称多余力),用 X_1 表示。去掉多余约束,用多余力 X_1 代替

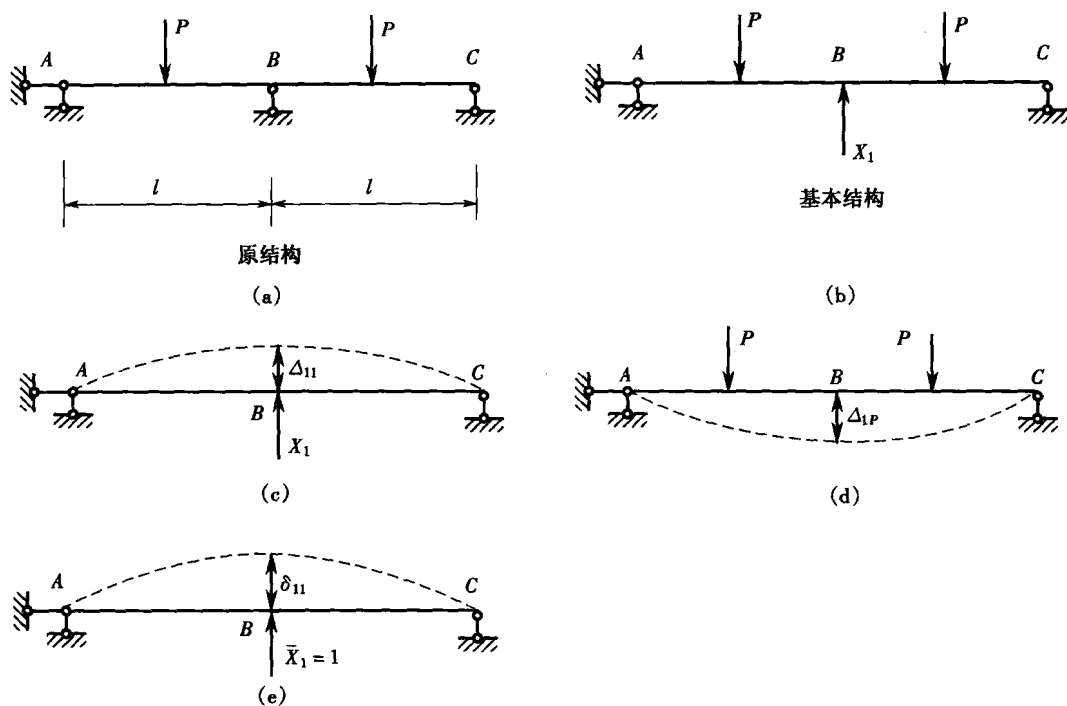


图 2-7

它的作用,如图 2-7(b)所示,此时 X_1 的数值和指向不能用静力平衡条件惟一确定。这种去掉多余约束后所得到的静定结构称为原结构的基本结构。基本结构在外荷载 P 和多余力 X_1 共同作用下的变形和内力显然与原结构在外荷载 P 的作用下相同。为了求出多余力,应考察支座 B 的位移情况。由于原结构中支座 B 处支杆的约束作用,支座 B 处的竖向位移为零。相应的在基本结构中, B 点的竖向位移(沿 X_1 方向的位移)也应为零,即 $\Delta_1 = 0$ 。根据叠加原理,有

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{1P} = 0 \quad (a)$$

式中: Δ_{11} 表示基本结构单独受多余力 X_1 作用时, B 点沿多余力 X_1 方向的位移,如图 2-7(c)所示; Δ_{1P} 表示基本结构单独受外荷载作用时 B 点沿 X_1 方向的位移,如图 2-7(d)所示。

由图 2-7(e)可见,由于单位多余力 $\bar{X}_1 = 1$ 的作用,基本结构在 B 点沿 X_1 方向的位移为 δ_{11} 。于是有

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1 \quad (b)$$

将式(b)代入式(a),可得

$$\Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (2-1)$$

此式即为多余力 X_1 应满足的位移条件。式中 Δ_1 、 δ_{11} 和 Δ_{1P} 都以与所设 X_1 的方向相同时为正。 δ_{11} 和 Δ_{1P} 为静定结构在已知外力作用下的位移。将 δ_{11} 和 Δ_{1P} 代入式(2-1),即可求出多余力 X_1 。求得 X_1 后即可应用静力平衡条件计算基本结构在外荷载 P 及多余力 X_1 共同作用下的支座反力和内力。它们就是原结构的反力和内力。上述计算超静定结构所用的概念和方法统称为力法原理。

2.2.2 力法方程

力法的基本特点是以多余力作为基本未知量,并根据与去掉的多余约束相应的位移条件建立关于多余力的方程或方程组。这样的方程或方程组称为力法典型方程,简称力法方程。式(2-1)是对应一次超静定结构的力法方程,它的一般形式是

基本结构是指去掉超静定结构中的多余约束后得到的静定结构。注意基本结构仅指结构本身而不考虑其上作用的荷载。

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = \Delta_1 \quad (2-2)$$

式中: Δ_1 是与多余约束相对应的已知位移。

图 2-8(a)所示为二次超静定结构。将原结构的支座 B 看成多余约束,则其中的约束反力为多余未知力,用 X_1 和 X_2 表示。去掉多余约束,用多余力 X_1 、 X_2 代替它们的作用,如图 2-8(b)所示。基本结构在外荷载和多余力 X_1 、 X_2 共同作用下的变形和内力应和原结构相

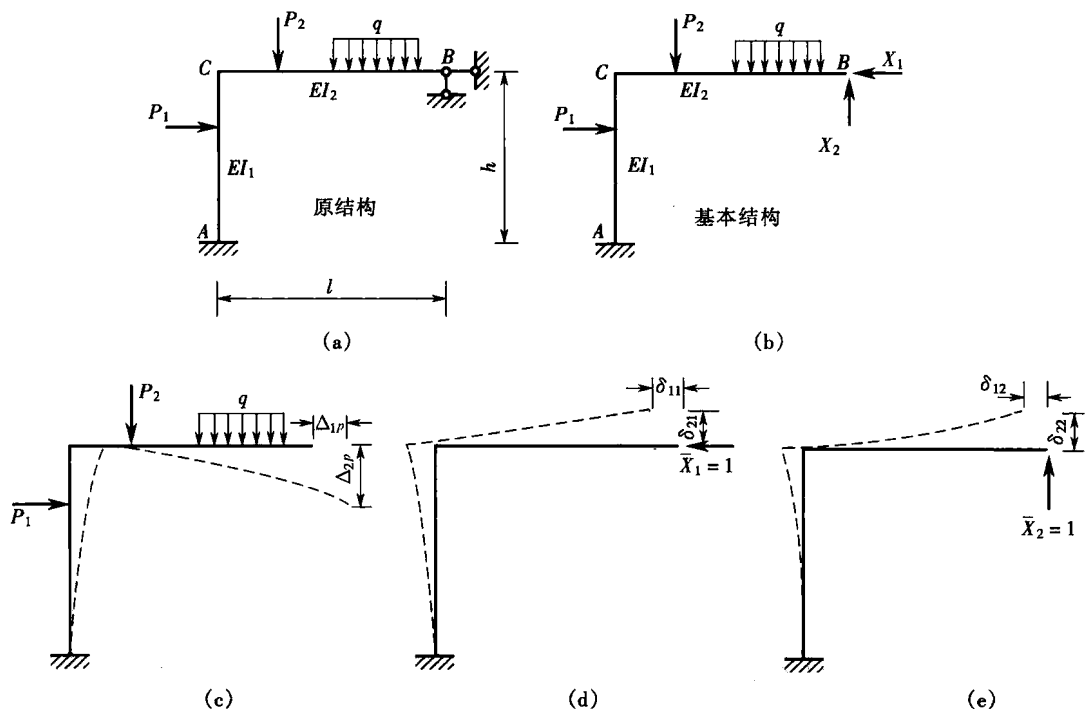


图 2-8

同。为了确定多余未知力 X_1 、 X_2 ,可利用多余约束处的位移条件(基本结构在外荷载和多余力共同作用下,其结构在 B 处沿多余力 X_1 、 X_2 方向的位移与原结构相同,即应等于零)

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= 0 \\ \Delta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

为了计算基本结构在外荷载和多余未知力 X_1 、 X_2 共同作用下的位移 Δ_1 和 Δ_2 ,先分别计算基本结构在每种力单独作用下的位移。

如图 2-8(c)所示,基本结构在外荷载单独作用时,在 B 处沿多余力 X_1 、 X_2 方向的位移分别为 Δ_{1P} 和 Δ_{2P} 。由图 2-8(d)可见,基本结构在单位力 $\bar{X}_1 = 1$ 单独作用时, B 点处相应位移为 δ_{11} 和 δ_{21} ;在未知力 X_1 单独作用时,相应位移为 $\delta_{11} X_1$ 和 $\delta_{21} X_1$ 。由图 2-8(e)可见,基本结构在单位力 $\bar{X}_2 = 1$ 单独作用时, B 点处相应位移为 δ_{12} 和 δ_{22} ;在未知力 X_2 单独作用时,相应位移为 $\delta_{12} X_2$ 和 $\delta_{22} X_2$ 。

应用叠加原理可将位移条件式(c)写成展开形式

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \Delta_2 &= \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

式中: δ_{ij} 表示基本结构由于 $\bar{X}_j = 1$ 的作用,在 X_i 作用点沿 X_i 方向的位移,也称为柔度系数; Δ_{iP} 表示基本结构单独承受外荷载作用时,在 X_i 作用点沿 X_i 方向的位移。 Δ_i 、 δ_{ij} 和 Δ_{iP} 都以与所设 X_i 的方向相同时为正。式(2-3)为求多余力 X_1 和 X_2 而建立的力法方程,其中的系数和自由项都是静定结构在已知外力作用下的位移。由力法方程式(2-3)可解得 X_1 和 X_2 。

用力法计算 n 次超静定的结构时,可以去掉 n 个多余约束,得到静定的基本结构,并作用以与多余约束作用相当的 n 个多余力。根据基本结构在 n 个多余力和外荷载共同作用下沿 n 个多余力方向的位移应与原结构相应位移相等的原则,利用叠加原理可以建立 n 个关于多余力的力法方程

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \cdots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1P} &= \Delta_1 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \cdots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2P} &= \Delta_2 \\ &\vdots \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \delta_{n3} X_3 + \cdots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nP} &= \Delta_n \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

当与多余力相应的位移都等于零,即 $\Delta_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时,上式变为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \cdots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \cdots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2P} &= 0 \\ &\vdots \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \delta_{n3} X_3 + \cdots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nP} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

式(2-4)为力法方程的一般形式,常称为力法典型方程。

在以上的方程组中,主对角线上的系数 δ_{ii} 称为主系数,主对角线两侧的其他系数 $\delta_{ij} (i \neq j)$ 称为副系数,最后一项 Δ_{iP} 称为自由项。所有系数和自由项都是基本结构上与某一多余力相应的位移,并以与所设多余力方向一致时为正。由于主系数 δ_{ii} 代表由于单位力 $\bar{X}_i = 1$ 的作用在其本身方向所引起的位移,所以总是与该单位力的方向一致,故总是正的。而副系数 $\delta_{ij} (i \neq j)$ 可能为正、负或零。根据位移互等定理,有

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

因此力法方程中位于主对角线两侧对称位置的两个副系数相等。

基本结构通常取为静定结构,力法方程(2-4)的系数和自由项都可以按静定结构求位移的方法求得。

从力法方程中解出多余力 $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 后,即可按静定结构的分析方法求原结构的反力和内力,或按下述叠加公式求出内力:

$$M = X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \cdots + X_n \bar{M}_n + M_P \quad (2-6)$$

$$Q = X_1 \bar{Q}_1 + X_2 \bar{Q}_2 + \cdots + X_n \bar{Q}_n + Q_P \quad (2-7)$$

$$N = X_1 \bar{N}_1 + X_2 \bar{N}_2 + \cdots + X_n \bar{N}_n + N_P \quad (2-8)$$

式中: $\bar{M}_i$ 、 $\bar{Q}_i$ 、 $\bar{N}_i$ 、 M_P 、 Q_P 、 N_P 分别表示在 $\bar{X}_i = 1$ 和外荷载单独作用下基本结构的内力。

2.3 用力法计算超静定梁和刚架

对于梁和刚架,在计算力法方程中的系数和自由项时,通常可略去剪力和轴力对位移的影响,而只考虑弯矩的影响。因此力法方程中的系数和自由项可按下列公式直接积分或用图乘法计算:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ii} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i^2}{EI} dx \\ \delta_{ij} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx \\ \Delta_{iP} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

式中: $\bar{M}_i$ 、 $\bar{M}_j$ 和 M_P 分别代表在 $\bar{X}_i = 1$ 和 $\bar{X}_j = 1$ 及外荷载单独作用下基本结构中的弯矩。

用力法求解超静定结构内力时,如果不利用对称性进行简化,那么基本未知量的个数等于超静定的次数。