世界名著

場與／或粒子

Fields and/or Particles

D. K. SEN 著

黃振麟
黃倉蘇 合譯

國家科學委員會補助
國立編譯館出版

維新書局印行

作 者 序

這本書的目的是想以整體的觀點對一些物理的基礎理論作一簡短的觀察。在這裡所要討論的題目是場－粒子二重性的問題。從這個觀點，我們可以將主要的物理理論分爲三類：二象性，非二象性以及統一的非二象性理論。我將用已經建立的與尙未完全建立的理論爲例，來說明歷史上想要瞭解並克服二象性問題的努力。我只想討論一些精華，對於細節以及其他方面的應用並不預備討論。

在解決所要討論的問題時，我並沒有用近代的公設量子場論，也沒有用S－矩陣或色散理論（dispersion theory），因爲這些後期的發展對於二象性基本問題並未加予任何新的希望，跟這個同樣的理由，對稱性只有在和瞭解海森伯的統一場論有關連的範圍內，才提出來。

對於學理論物理的研究生，這本書可以做爲場與粒子理論的基本教科書，本書的數學步驟是審愼簡明的；希望對用功的學生並不發生任何困難，然而在感覺上，似乎需要將黎曼幾何以及希耳伯空間的基本性質的簡短摘要（沒有證明）列入，若想要對這兩門問題作較深入的瞭解，讀者必須參考關於這兩個題目的數學課本。

本書大部份的題材可能以其他的形式在別的地方出現過，本人非常感謝那些原始的資料，當然我也感謝那些已經存在的書本，其中有一些是列在書後的普通參考資料欄內。

在這裡我要感謝加拿大國家研究委員會允許我做部分研究，使得這一個計劃成爲可能，最後我要感謝學院出版社的編輯們爲出版此書的辛勞的幫助。

Toronto, 1968

（多倫多）　　　　D. K. SEN

目　　次

作者序
前　言

第一部份　二象性理論

A.　古典理論……………………………… 5
　A.1 電磁學……………………………… 5
　A.2 重力……………………………… 13
B.　量子理論……………………………… 32
　B.1 粒子的量子理論……………………… 32

第二部份　非二象性理論

A.　古典理論……………………………… 46
　A.1 場的建構……………………………… 46
　A.2 粒子的建構……………………………… 51
B.　量子理論……………………………… 59
　B.1 場的量子理論……………………………… 59

第三部份　統一的非二象性理論

A.　古典理論……………………………… 84
　A.1 愛因斯坦與薛定諤理論……………………… 84
　A.2 惠勒－密斯納的幾何動力學………………121
B.　量子理論………………………………129
　B.1　海森伯的統一場理論……………………129
結　　論………………………………147
一般參考書………………………………148
名詞索引………………………………149

前 言

在基礎物理學的歷史上，沒有其他的基本觀念比“場”及“粒子”所佔的角色更重要的了。事實上，不得不將物質的物理性質描述得像場或像粒子，似乎是人類心智的一種奇異的特徵。整個物理的歷史看起來，就像要澄清或從“這個或者那個”的二分律中逃脫的一種掙扎

粒子的觀念首先由在牛頓力學的頂盛時期所完成的超距作用(at-a-distance)原理中出現，而且由這個原理而增加。由於電磁理論的發明以及超距作用（ action-at-a-distance ）原理的崩潰，必須用場的觀念來補粒子觀念的不足，但是電磁理論並不能完全用場來代替粒子，而需要同時用這兩種觀念。這可由古典電力學的兩組方程式來表明：一爲所謂的場方程式，描述場與源（即帶電的粒子）的關係，另一種爲運動方程式，描述粒子在場的作用下的運動狀況。

場與源的關係在古典及量子電力學中，一直是最困難的問題，用點粒子源的觀念可導至如自能（ self-energ）無限大的結果。但是若使用具有大小的源的觀念，則因爲不可避免的任意性，結果還是不能令人滿意。

若我們把場源（即具有特定質量與電荷…等等的粒子）與由它所引起的場各看成一個單元，我們將把這種理論稱爲“二象性理論”，古典電力學與廣義相對論屬於此類。雖然在這兩種理論中，場－粒子二象性是本來就有的，但後者則由於特別的下列幾點而與前者不同：廣義相對論可以免除分開的運動方程式；場奇點的運動方程式單獨由場方程式而來，而粒子的質量與電荷在此理論中則成積分常數。

量子理論的發明則出現了另一種場－粒子二象性。在古典的理論中，場與粒子各自成一單元，在量子理論中，每一粒子各自顯示自己的場，是因爲在同時測量古典粒子特性時的測不準性所產生的結果，

故量子的場－粒子二象性顯然與古典的不同。

歷史上第一次想避免場－粒子二分律的是米氏*，在他 1912 年根據古典的法則而做的工作內，米氏說明了在電磁理論中，避免場－粒子的二象性是可能的，而且還單獨從場的理論導出帶電粒子的存在；然而在米氏的抱負不凡的理論中，尤其存在着下列的缺陷：其理論隨位勢（ potential ）的絕對值而變的情形，使得物質粒子在恒勢場中的存在爲不可能。波恩及陰飛德‡ 將他們的理論直接以場變數爲根基，而用以克服此困難，源粒子的質量及電荷則完全由場的特性來決定。

若一理論是基於純粹場的觀念，或僅以粒子爲物質的基礎結構，我們稱之爲“非二象性”理論。在古典的標準上，我們即有米氏以及波恩－應飛德的純場理論。但是既然能夠建立純場理論，則純粒子理論也應該有可能。惠勒及費曼§在電力學中將超距作用復活了，他們證明了馬克士威－羅倫徵的電荷間的純推遲作用的理論，加上用以顯示各電荷的輻射阻尼的自力（ self-force），是相當於電荷間的半推遲加上半迎進作用的純粒子理論。緊接着愛因斯坦之後懷赫德# 提出了在平坦空間中重力的超距作用理論。在這理論中，各粒子以推遲的重力勢相互作用。最近霍依爾及那立卡‖導出了重力的純粒子理論的式子，使馬赫原理有了確定的理論基礎，他的方法甚至連愛因斯坦都會爲之迷惑，雖然愛氏深受他的影響。

*Mie, G. (1912) Ann. Physik 37, 511 ; 39, 1

‡ Born, M., and Infeld, L. (1934) Proc. R. Soc. A 144, 425

§ Wheeler, J. A. and Feynman, R. P. (1949) Rev. mod. Phys. 21, 425.

Whitehead, A. N. (1922) "The Principle of Relativity." Cambridge.

‖ Hoyle, F. and Narlikar, J. V. (1964) Proc. R. Soc. A 282, 191.

無可疑問的，非二象性理論比二象性理論更有些令人滿意的地方，第一是觀念的經濟，其次在古典的觀點上，最少也沒有任何發散的困難。

非二象性理論最令人滿意的是具有交互作用的場的量子論，這是直接從單粒子量子論延伸到多粒子的理論。

雖然在古典的非二象性理論中，粒子論與場論都沒有發散的困難；正如無限大的問題困擾了二象性的馬克士威－羅倫徹理論，無量子場論也被無限大的問題所圍困，重正化法（ renormalization method）也沒有成功的把這理論的基本觀念上的困難移去，質量與耦合常數，在量子場論中，仍然是任意的參數。

看起來物理最後要從場－粒子二分律中，以不太令人滿意的方式出現。現在正是處理所有場與粒子的統一問題的時候了。這個建立物質的統一非二象性理論的大問題，愛因斯坦－薛定諤* 以及惠勒－密斯納# 曾以古典的觀點，而海森伯§則用量子的觀點考慮過。這些理論都是場論，所以在衡量上好像以場作爲基本觀念較爲適當。但是很不可能的，將來令人滿意的理論，將以跟場或粒子完全不同的基本觀念爲基礎。

* Einstein, A. and Strauss, E. G. (1946) Ann. Math. 47, 731
Schrödinger, E (1947) Proc. R. Irish. Acad. 31, 163 and 205.

\# Wheeler, J. A. and Misner, C. W. (1957) Ann. Phys. 2, 525

§ Heisenberg, W et al. (1959) Z. f. Naturforsch. 14a, 441.

我們可將下表做爲總結，以供參考：

- 二象性理論
  - 古典
    - 電力學（馬克士威－羅倫徹）
    - 重力（牛頓－愛因斯坦）
  - 量子（粒子理論）

- 非二象性理論
  - 古典
    - 粒子的形式體系
      - 電力學（惠勒及費曼）
      - 重力（懷赫德及霍伊爾－那立卡）
    - 場的形式體系（米及波恩－應飛德的電力學）
  - 量子（場論）

- 統一非二象性理論
  - 古典（愛因斯坦－薛定諤及惠勒－密斯納）
  - 量子（海森伯）

第一部份

二象性理論

A．古典理論
B．量子理論

A．古典理論

1. 電力學

§時空連續統

物理現象（此時爲電磁）都假設在明科夫斯基的時空世界中發生。設時空點的座標以 x^{μ}（$\mu=1, 2, 3, 4$）表示。其中 x^{i}（$i=1,2$ 3）代表空間座標的三個分量，而 $x^{4}=ict$，是時間的虛量*。

假設我們的理論在均勻的羅倫徵群的運作下是不變的，即座標的線性均勻變換群爲：

$$x^{\mu'}=L_{\lambda}^{\mu'}x^{\lambda} \tag{1}$$

或爲　$x'=Lx$（以矩陣的形式表示）

$L^{-1}=L^{T}$，L^{T} 爲 L 的轉置

在羅倫徵變換下，一個多分量的張量場 $\phi_{A}(x)$ 變換成

$$\phi_{A'}(Lx)=S_{A'}^{B}\phi_{B}(x) \tag{2}$$

其中 $S_{A'}^{B}$ 是 $L^{\cdot}$ 的線性函數而下標 A'（或 B）代表分量指標。

度量區間 ds 可寫成

*其中 c =光速。爲方便起見，所有重復指標代替累加。實座標有時也常用到，必要時度量張量及其正負號將會明白的表示出來。

其中
$$ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$
$$g_{\mu\lambda} = \delta_{\mu\lambda} \tag{3}$$

所以張量場的協變與逆變分量沒有分別：$\phi_A = \phi^A$ 。

§自由粒子

自由粒子由其靜止質量 m，以及位置四元向量 $\xi_\mu = (\boldsymbol{\xi}, ict)$ 所決定，向量的分量與質點的本徵時間 l 有關（在靜止系統中 $l = \tau$ ），設 $\dot{\xi}_\mu = d\xi_\mu / dl$ 。

自由粒子的運動方程式假設可依據作用原理

$$\delta S_P = 0 \tag{4}$$
$$S_P = -mc\int\sqrt{[-(\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu)]}\,dl,$$

S_P 在連接兩時空點的世界線上積分，而 ξ_μ 則依在端點 $\delta\xi_\mu = 0$ 的法則變分，(4)式相當於 $\ddot{\xi}_\mu = 0$ 。因爲

$$-\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu = c\left(\frac{d\tau}{dl}\right)^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right), \tag{5}$$

$\mathbf{v} = d\boldsymbol{\xi}/d\tau$ ，我們也可寫成

$$S_P = \int L_P d\tau, \tag{6}$$

其中自由粒子的拉格朗日函數爲 $L_P = -mc^2\sqrt{1-(\frac{v^2}{c^2})}$ 。

動量的三元向量定義爲

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L_P}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(\frac{v^2}{c^2})}}, \tag{7}$$

能量則定義爲

$$E = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L_P = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v^2}{c^2})}} 。 \tag{8}$$

所以 E 與 p 的關係爲

$$E^2/c^2 = p^2 + m^2c^2 。 \tag{9}$$

§電磁場

爲描述帶電粒子的運動情形，我們不能再以瞬間的超距作用，來說一個粒子相互作用於另一個粒子了，因爲在一個特定時刻，作用於一個粒子的力，不能由其他粒子在那時刻的位置來決定。我們只能說一個帶電粒子在它周圍產生場，而此場則對場範圍內的其他粒子產生力，所以場本身具有物理實質而成一單元。

我們對於電磁場的基本假設是，它的特徵可由反對稱張量場 $f_{\mu\lambda}(x) = -f_{\lambda\mu}(x)$ 代表，且在“任何情況下”皆適合下列方程式：

$$f_{\mu\lambda,\nu} + f_{\lambda\nu,\mu} + f_{\nu\mu,\lambda} = 0 \ , \tag{10}$$

其中 $f_{\mu\lambda,\nu} = \partial f_{\mu\lambda} / \partial x^{\nu}$. 所以電場 $\mathbf{E}$ 與磁場 $\mathbf{H}$ 爲

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\equiv (f_{23}, f_{31}, f_{12}) \\ \mathbf{E} &\equiv \frac{1}{i} (f_{41}, f_{42}, f_{43}) 。\end{aligned} \tag{11}$$

方程式(10)意示 $f_{\mu\lambda}$ 可從一個向量場 A_μ 導出，A_μ 稱爲電磁勢，其關係爲

$$f_{\mu\lambda} = A_{\mu,\lambda} - A_{\lambda,\mu} \ 。 \tag{12}$$

但是(12)並不能唯一的定義 A_μ，僅定義到差一個“規範變換”：

$$A_\mu \to A_\mu' = A_\mu + \phi_{,\mu} \ , \tag{13}$$

其中 ϕ 是任意的無向量場。

§自由場

現在我們要討論自由場，也就是沒有任何帶電粒子存在的電磁場。

自由場方程式可從作用原理得來：

$$\left. \begin{aligned} \delta S_f &= 0 \\ S_f &= -\frac{1}{16\pi} \int f_{\mu\lambda} f_{\mu\lambda} \, dx \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

其中 $dx = d\mathbf{r}\,dt = dx_1 dx_2 dx_3 dt$；這是封閉體積分，在邊界上 A_μ 須依 $\delta A_\mu = 0$ 法則變分。故場方程式爲

$$f_{\mu\lambda,\lambda}=0 \tag{15}$$

方程式(15)以及(10)決定了一個自由電磁場。

§ 場－粒子系

現在我們討論場－粒子系，這個系統的作用函數包含三項

$$S=S_p+S_f+S_{pf}\ , \tag{16}$$

上面定義的 S_p 與 S_f 分別爲粒子坐標與場勢的汎函（functionals）。S_{pf} 描述場與粒子的相互作用，是場跟粒子變數的汎函：

$$S_{pf}=(e/c)\int dl\int \rho(x-\xi)[\dot{\xi}_\mu(A_\mu+A_\mu^{ex})]dx\ , \tag{17}$$

其中電荷 e 決定相互作用的強度，ρ 是擬－δ 的密度函數，其定義如下：

$$\rho(x-\xi)=\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)\ 。 \tag{18}$$

A_μ 是粒子所產生的場，A_μ^{ex}則是帶電粒子所處的自由外場。因爲我們對外場（滿足(15)）的場方程式不感興趣，所以我們不把 $f_{\mu\lambda}^{ex}$ 包含在S_f裡。現在作用原理表示

$$\delta S=0\ 。 \tag{19}$$

對 ξ_μ 的變分就可以得到在場作用下的粒子的運動方程式，而對 A_μ 變分則可得到場－粒子系的場方程式。

我們先考慮對 ξ_μ 變分。因爲S_f 與 ξ_μ 無關，所以根本對(19)式不生影響，我們可寫成

$$\delta S'=0\ ,\qquad S'=\int L'dl \tag{20}$$

$$L'=-mc\sqrt{(-\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu)}+(e/c)\int\rho(x-\xi)[\dot{\xi}_\mu(A_\mu+A_\mu^{ex})]dx$$

這個問題的歐勒－拉格朗日方程式爲

$$\frac{\delta L'}{\delta\xi_\mu}\equiv\frac{\partial L'}{\partial\xi_\mu}-\frac{d}{dl}\left(\frac{\partial L'}{\partial\dot{\xi}_\mu}\right)=0\ 。 \tag{21}$$

根據(20)與(21)我們得到

$$\frac{mc\ddot{\xi}_\mu}{\sqrt{(-\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu)}}+\frac{mc\dot{\xi}_\mu(\ddot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\nu)}{(-\dot{\xi}_\lambda\dot{\xi}_\lambda)^{3/2}}=F_\mu+F_\mu^{ex}\ , \tag{22}$$

其中 F_μ 就是所謂的自力

$$F_\mu = (e/c)\,\dot{\xi}_\nu \int \rho(\xi - x) f_{\mu\nu}(x)\,dx = (e/c)\,\dot{\xi}_\nu f_{\mu\nu}(\xi)\ , \tag{23}$$

F_μ^{ex} 則是由於自由外場的存在而具有的羅倫徹力。

$$F_\mu^{ex} = (e/c)\,\dot{\xi}_\nu f_{\mu\nu}^{ex}(\xi)\ 。 \tag{24}$$

因爲 $f_{\mu\lambda}$ 及 $f_{\mu\lambda}^{ex}$ 的反對稱性，我們可得到 $\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\lambda f_{\mu\lambda} = \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\lambda f_{\mu\lambda}^{ex} = 0$。因此可導致 $\dot{\xi}_\mu F_\mu = \dot{\xi}_\mu F_\mu^{ex} = 0$。由(22)式可得到 $\ddot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu = 0$ 或者 $\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu =$ 常數。這個常數是 $-c^2$，因爲對一個靜止粒子而言 $\dot{\xi}_k = 0$ 而 $\dot{\tau} = 1$。最後我們可以得到運動方程式

$$m\ddot{\xi}_\mu = F_\mu + F_\mu^{ex} \tag{25}$$

現在我們考慮由於帶電粒子而來的場方程式。因 S_P 對於 A_μ 的變分不生影響，所以我們可寫成

$$\delta S'' = 0\ , \qquad S'' = \int L'' dx \tag{26}$$

$$L'' = -\frac{\pi}{16} f_{\mu\lambda} f_{\mu\lambda} + \left(\frac{e}{c}\right) \int \rho(x - \xi)\,\dot{\xi}_\mu A_\mu\, dl\ 。$$

歐勒－拉格朗日方程式

$$\frac{\delta L''}{\delta A_\mu} \equiv \frac{\partial L''}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial L''}{\partial A_{\mu,\nu}}\right) = 0$$

就是馬克士威方程式

$$f_{\mu\lambda,\lambda} = \frac{4\pi e}{c} \int \rho(x - \xi)\,\dot{\xi}_\mu\, dl\ 。 \tag{27}$$

右邊的式子可用 $(4\pi/c)j_\mu$ 表示（ j_μ 稱爲流四元向量）。(27)式變成

$$f_{\mu\lambda,\lambda} = (4\pi/c)\,j_\mu\ 。 \tag{28}$$

從 $f_{\mu\lambda}$ 的反對稱性可以得到連續方程式： $j_{\mu,\mu} = 0$ 。

方程式(10)，(25)，以及(27)完全決定了在電力學中的場－粒子系統。

由於規範變換式（ gauge transformation ）(13)的自由性，使我們可以選擇下述的規範條件，也就是所謂的羅倫徹規範：

$$A_{\mu,\mu} = 0\ 。 \tag{29}$$

從(12)，(27)以及(29)我們可以得到

$$\square A_\mu = -\frac{4\pi e}{c}\int \rho(x-\xi)\,\dot{\xi}_\mu dl \text{ 。} \tag{30}$$

(30)式的推遲的解爲

$$A_\mu = e\int \dot{\xi}_\mu \frac{\delta(\tau - t + R'/c)}{cR'}\, dl \text{ ,} \tag{31}$$

其中 $R' = \mathbf{r}(t) - \xi(\tau)$ 。

§ 場的能量－動量張量

由(25)與(27)式可以得到

$$\int F_\mu dl = \frac{1}{4\pi}\int f_{\mu\nu} f_{\nu\lambda,\lambda}\, dx \text{ 。} \tag{32}$$

以(10)式爲輔，我們可把右式的積分變成散度

$$\int F_\mu dl = \int T_{\mu\lambda,\lambda} dx \text{ ,} \tag{33}$$

其中 $$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} = \frac{1}{4\pi} f_{\mu\lambda} f_{\lambda\nu} + \frac{1}{16\pi}\,\delta_{\mu\nu}\, f_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \text{ 。} \tag{34}$$

$T_{\mu\nu}$ 就是所謂的場的能量－動量張量。各分量可用電場與磁場表示：

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_k + H_i H_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}(H^2 + E^2)\right];\ i,k = 1,2,3$$

$$(T_{14}, T_{24}, T_{34}) = -\frac{i}{4\pi}[E \times H],\ T_{44} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) \text{ 。} \tag{35}$$

對於自由場（即無任何電荷之存在）而言，由(33)式可得

$T_{\mu\lambda,\lambda} = 0$ 。故

$$G_\mu = -\frac{1}{ic}\int T_{\mu 4}\, d\mathbf{r}$$

爲四元向量，稱爲場－動量四元向量。

在場－粒子系裡，由(25)與(33)可得

$$\int d[m\dot{\xi}_\mu + G_\mu] = \int F_\mu^{ex} dl + \int dt \oint T_{\mu k}\, dS_k \tag{36}$$

其中右邊第二式包含面積分。在這種情況下 G_μ 普通不再是四元向量。這就是所謂的帶電粒子的電磁質量理論失敗的一個理由。根據這個理

論，一個帶電粒子（如電子）沒有慣性質量，粒子質量完全來自其本身的自場的慣性。下列條件若是正確的話，這種理論才能成立：(a)自場必須具有一個有限的能量，才能使所發現的粒子皆具有限質量；(b)自場動量須具有粒子動量的正常變換性質。

我們曾經注意到在普通情形下，條件(b)並不能滿足，而且以後我們將會發現點粒子的自能是無限大的。

§自力與自能

我們可直接計算出電荷所產生的場作用於電荷本身的自力。首先假設電荷的分佈爲 $\rho(\mathbf{r})$ ，且只考慮粒子沿 x 軸的非相對論性運動（ $v \ll c$ ）。則運動方程式可寫爲

$$m\ddot{x} = eE^{ex} + e\int \overline{E}\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \tag{37}$$

其中 E^{ex} 爲外加電場，$\overline{E}$ 則爲帶電粒子本身產生的自場。

$$\overline{E} = \int E\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$$

以及

$$\int \rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} = 1\ 。\tag{38}$$

爲計算 E，由(31)式可得，（ $\varphi = \frac{A_4}{i}$，$A = (A_1, A_2, A_3)$）

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$\varphi = e\int \frac{\delta(t' - t + R'/c)}{R'}dt'$$

$$A_x = \frac{e}{c}\int v(t')\frac{\delta(t' - t + R'/c)}{R'}dt' \tag{39}$$

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')\ 。$$

將 δ－函數展開形成上式的冪級數

$$\delta(t' - t + \frac{R'}{c}) = \delta(t' - t) + \frac{R'}{c}\dot{\delta}(t' - t) + \frac{R'^2}{2c^2}\ddot{\delta}(t' - t)$$
$$+ \frac{R'^3}{6c^3}\dddot{\delta}(t' - t) + \cdots\cdots \tag{40}$$

並由(39)式可得

$$E = e\frac{R_x}{R^3} - \frac{e}{2c^2R}\left(\frac{R_x^2}{R^2}\dot{v}+\dot{v}\right) + \frac{2}{3}\ \frac{e}{c^3}\ddot{v}+\cdots\cdots$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)\ ,$$

故運動方程式最後變為

$$m\ddot{x} = eE^{ex} - m_{el}\ddot{x} + \frac{2}{3}\ \frac{e^2}{c^3}\dddot{x} \tag{41}$$

其中
$$m_{el} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2}\int d\mathbf{r}'\int\frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{R}\ d\mathbf{r}\ 。$$

m_{el} 稱為帶電粒子的電磁質量，而且可以寫成

$$m_{el} = \frac{4}{3}\frac{U_0}{c^2}\ ,$$

其中U_0 為電荷的靜電“自能”。當然對一點粒子而言$U_0 \to \infty$，所以$m_{el} \to \infty$ 。另一方面，若我們假設電荷是分佈在半徑為r_0的球面上，則$U_0 = e^2/2r_0$ ，所以

$$m_{el} = \frac{2}{3}\ \frac{e^2}{r_0c^2}\ ,$$

r_0稱為電子的古典半徑。當然，面分佈的選擇是非常隨意的。若我們不管粒子的結構，而寫成$m+m_{el}=M$，M為所觀測到的質量，則我們可暫時忽略掉自力的所有效應。但對於自由粒子我們將因之得到（僅保留$\dddot{x}$項，因為在(41)式中，只有這一項與粒子的結構無關）

$$-\frac{2}{3}\ \frac{e^2}{c^3}\dddot{x} + M\ddot{x} = 0$$

或者
$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}(0)\exp\left[\frac{3}{2}\frac{Mc^3}{e^2}\right]t\ 。$$

因此，自由粒子的運動會自己加速。

所以我們可以看出馬克士威－羅倫徹理論被基本的困難所困擾，它的根源可歸之於場－粒子的二象性。在後面我們將會看到，如何用

非二象性理論的架構來處理這些問題。

2. 重力

§等效原理

牛頓的重力理論，一種純粹粒子理論，是基於瞬間的超距作用的。但是開始的時候馬克士威－羅倫徵的電磁理論，若恰正是羅倫徵協變式的話 Lorentz - covariant，重力律就不是了。一些人（比較重要的如潘卡禮 Poincare 與明科夫斯基）曾想把牛頓的超距作用理論，寫成羅倫徵協變式。因爲場論的內容比較容易弄成協變式，所以注意力即接着轉到牛頓重力理論的場－粒子形構的修正上面，這個理論包含（所有古典二象性理論的特徵）(i)重力勢Φ（由密度爲ρ的物質的分佈而來）的場方程式，即所謂的柏瓦松 Poisson 方程式：

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (G = \text{重力常數}), \tag{42}$$

以及(ii)運動方程式：

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\operatorname{grad}\ \Phi\ 。$$

愛因斯坦假設重力律在廣義的座標變換下爲協變。隱爲廣義協變的假設之後的動機就是所謂的等效原理。在牛頓的原理內，在均勻重力場裡的座標系，是完全相當於沒有任何重力場的均勻加速的座標系。也就是說一個非慣性座標系，是完全相當於重力場。這種等效關係是所有粒子的慣性質量與重力質量相等的結果。對非均勻重力場等效原理可寫成：“在任何極小的時空區域裡，經常存在着一個能使粒子的運動不受重力影響的座標”。

根據愛因斯坦，廣義協變的假設與等效原理可用數學語言合述如下：

(a)“祇要是論到重力的現象時，物理上的時空就是黎曼簇 Riemannian manifold V_4”。

(b)“V_4的度量結構由它本身所有之物項來決定”，玆舉一個特殊的

例子：V_4的度量張量$g_{\mu\lambda}$ 代表了重力勢。事實上這就構成了重力的"幾何化"。

廣義協變在V_4裡是自動成立的，而在V_4裡總是存在着一個座標系，使在任意特定的點上$g_{\mu\lambda,\alpha}=0$，由於這個事實等效原理因此也成立。

§黎曼時空

黎曼簇是具有一定度量和仿射（affine）的結構的廣義簇* 。在廣義簇內，幾何上的物項，可依它們在任意座標變換下的性質來分類，座標的變換是根據：

$$x^{\mu} \to x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^{\mu})$$

以及

$$\left|\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\right| \equiv \left|A^{\mu'}_{\mu}\right| \neq 0 ‡ 。\tag{43}$$

多分量的混合張量場，因此可以如下變換：

$$\xi^{\lambda_1'\cdots\lambda_p'}_{\mu_1'\cdots\mu_q'} = A^{\lambda_1'}_{\lambda_1}\cdots A^{\lambda_p'}_{\lambda_p}\cdot A^{\mu_1}_{\mu_1'}\cdots A^{\mu_q}_{\mu_q'}\,\xi^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_q} 。\tag{44}$$

混合張量密度場的變換則爲：

$$\mathcal{A}^{\lambda_1'\cdots\lambda_p'}_{\mu_1'\cdots\mu_q'} = \left|A^{\lambda}_{\lambda'}\right| A^{\lambda_1'}_{\lambda_1}\cdots A^{\lambda_p'}_{\lambda_p}\cdot A^{\mu_1}_{\mu_1'}\cdots A^{\mu_q}_{\mu_q'}\,\mathcal{A}^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_q} 。\tag{45}$$

現在討論逆變向量場（contravariant vector field）$\xi^{\mu}(x^{\lambda})$。由於(43)的任意座標變換的緣故，不可能不變的方式，比較在極小的鄰近兩點（x^{λ} 與 $x^{\lambda}+dx^{\lambda}$）上的場值 ξ^{μ} 與 $\xi^{\mu}+d\xi^{\mu}$。但是若假定 $\nabla\xi^{\mu}\equiv d\xi^{\mu}-\delta\xi^{\mu}$ 爲向量，則在點 $x^{\lambda}+dx^{\lambda}$ 上，比較 $\xi^{\mu}+d\xi^{\mu}$ 與所謂的平行位移向量（$\xi^{\mu}+\delta\xi^{\mu}$）是可能的。若假設平行位移 $\delta\xi^{\mu}$ 可以如下表示

$$\delta\xi^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\xi^{\alpha}\,dx^{\beta}$$

其中

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} 。\tag{46}$$

*所謂廣義簇較清楚的意義是沒有其他結構的可微分簇，故這種簇可被座標鄰域所覆蓋。（cover）

‡ $\left|A^{\mu'}_{\mu}\right|$ ＝變換的雅科畢式（Jacobian）