



华腾教育  
HUA TENG EDUCATION

高等学校教材经典同步辅导丛书数学类(二)  
配清华大学出版社《数值分析》第4版 李庆扬等编

# 数值分析

第4版

## 同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心  
丛书主编 清华大学 范亮宇  
本书主编 清华大学 严奇荣



- ◆ 紧贴教材:精讲重点 点拨方法 联系考研
- ◆ 考试宝典:教材精华 经典试卷 常考试题
- ◆ 学习卡:资料下载 信息交流 互动论坛
- ◆ 课后习题:三级突破 分析要点 总结难点

中国矿业大学出版社

# 数值分析

(第四版)

## 同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心

丛书主编 清华大学 范亮宇

本书主编 清华大学 严奇荣

中国矿业大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

数值分析同步辅导及习题全解/严奇荣主编. —徐州：  
中国矿业大学出版社, 2006. 8

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 7 - 81107 - 396 - X

I . 数… II . 严… III . 数值计算—高等学校—教  
学参考资料 IV . O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086950 号

**书名** 数值分析同步辅导及习题全解

**主编** 严奇荣

**责任编辑** 罗 浩

**出版发行** 中国矿业大学出版社

**网 址** <http://www.cumtp.com> **E-mail** cumtpvip@cumtp.com

**印 刷** 北京市昌平百善印刷厂

**经 销** 新华书店

**开 本** 850×1168 1/32 **本册印张** 9 **本册字数** 182 千字

**版次印次** 2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

**总 定 价** 57.60 元

(图书出现印装质量问题, 本社负责调换)

# 本套丛书四大特色

本书在编写时充分考虑到您在学习过程中的需求，史无前例地把课后习题按照难度程度分成了三个等级，分别用○代表“简单”习题，◎代表“中等难度”习题，●代表“较高难度”习题，这是目前所有辅导书都没有的创新！针对不同的等级我们给出了不同程度的讲解，对于简单习题我们提供了详尽的解题过程，对于中等难度习题我们在简单习题的基础上，添加对该题的详尽分析；对于较高难度习题，我们在中等难度解答的基础上，更是对该题进行总结，以便举一反三，使您能够掌握重点、巩固所学。

## 特色一



课后习题分等级，开差异化习题全解之先河。

## 本书

附赠的考试宝典，它包

括以下丰富内容：

1. 知识卡片：这部分集中了教材中的精华部分，我们精选教材的重要公式、定理、定义，把教材中的重点难点知识进行总结，使您在最短的时间掌握最多的知识；
2. 为了让大家更零距离的接触考试，我们还特意整理了名校考研真题、名校期末真题、期末模拟试题各一套让您提前预热，掌握所学；
3. 期末考试常考50道试题索引，这是我们对全国100多所知名高校期中、期末考试题的研究总结出的常考易考的经典题目，对于那些重要的题，我们在正文中将对该题用加灰底的方式特别标注出来，如【●1.9】。有了这些常考题型，相信大家考试时一定会胸有成竹。

## 特色二



赠送考试宝典  
考试学习无忧

# 本套丛书四大特色

## 特色三

网络学习卡  
开拓学习新天地



现在是网络时代，我们的服务因此也是全方位的。通过随书赠送的学习卡，只要登陆华腾教育网([www.huatengedu.com.cn](http://www.huatengedu.com.cn))，您就可以获得在线学习、在线下载、论坛交流、信息浏览、各种课程课件下载、各种考研真题、课后习题全解下载等精彩服务内容。

## 本书

全部由专家执笔，编写严谨，具有较强的针对性、指导性和补充性等特点。  
内文结构安排合理，栏目设置系统实用（我们有内容提要、典型例题与解题技巧、历年考研真题评析等精彩设置），可以使您事半功倍地掌握更多知识。

## 特色四

内容合理  
结构科学



# 高等学校教材

## 经典同步辅导丛书编委会

主任：清华大学 王 飞  
副主任：清华大学 夏应龙  
中国矿业大学 李瑞华

### 编 委(按姓氏笔画排序)：

于志慧	王 煊	甘 露	师文玉
吕现杰	朱凤琴	刘胜志	刘淑红
严奇荣	李 丰	李凤军	李 冰
李 波	李炳颖	李 娜	李晓光
李晓炜	李雅平	李燕平	何联毅
邹绍荣	宋 波	张旭东	张守臣
张国良	张鹏林	张 慧	陈晓东
范亮宇	孟庆芬	唐亚楠	韩国生
韩艳美	曾 捷		

# 前言

## PREFACE

《数值分析》是数学类专业重要的专业课程之一,也是报考数学类专业硕士研究生的考试课程。李庆扬、王能超、易大义的《数值分析》(第四版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学好这门课程,掌握更多知识,我们根据多年教学经验编写了这本与此教材配套的《数值分析同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到读者的不同情况,我们在内容上做了以下安排:

1. 内容提要:串讲概念,总结性质和定理,知识全面系统。
2. 典型例题与解题技巧:精选各类题型,涵盖本章所有重要知识点,对题目进行深入、详细的讨论与分析,并引导学生思考问题、能够举一反三,拓展思路。
3. 历年考研真题评析:精选历年考研真题进行深入的讲解。
4. 课后习题全解:本书给出了李庆扬、王能超、易大义《数值分析》各章习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程,而且还依照难易程度将习题分为三个等级,根据不同等级对习题进行了不同程度的讲解。

编写本书时，依据大学本科现行教材及教学大纲的要求，参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、人民大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写。

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助。同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

### 华腾教育教学与研究中心

学是专业基础，一线从业人员和管理人员。特别是对于初学者来说，学习起来相对容易，但随着工作年限的增加，经验的积累，会发现很多问题。因此，本教材在编写过程中，充分考虑到了这一点。教材的内容力求深入浅出，通俗易懂，便于理解。同时，教材还特别强调了实践性，通过大量的案例分析，帮助读者更好地理解和掌握理论知识。教材的编写遵循了“理论与实践相结合”的原则，注重培养学生的实际操作能力。教材的内容分为以下几个部分：第一章为绪论，主要介绍本课程的基本概念、研究对象及其应用领域；第二章为力学基础，主要介绍力学的基本原理和方法；第三章为材料力学，主要介绍材料的力学性质、强度理论、塑性理论、弹性理论等；第四章为结构力学，主要介绍结构的受力分析、变形计算、稳定性分析等；第五章为流体力学，主要介绍流体的基本性质、流动规律、流体的运动等；第六章为热力学，主要介绍热力学的基本定律、能量守恒定律、热力学第一定律、热力学第二定律等；第七章为电动力学，主要介绍电场、磁场、电磁感应、电容、电感等；第八章为光学，主要介绍光的传播、反射、折射、干涉、衍射等；第九章为声学，主要介绍声波的传播、反射、折射、干涉、衍射等；第十章为量子力学，主要介绍量子力学的基本概念、波动方程、薛定谔方程等；第十一章为统计力学，主要介绍统计力学的基本概念、玻尔兹曼分布、麦克斯韦-玻尔兹曼分布等；第十二章为凝聚态物理，主要介绍固体物理、液体物理、凝聚态物理等；第十三章为核物理，主要介绍核能、核反应、核裂变、核聚变等；第十四章为宇宙学，主要介绍宇宙学的基本概念、宇宙膨胀、宇宙加速膨胀等；第十五章为粒子物理学，主要介绍粒子物理学的基本概念、基本粒子、强相互作用、弱相互作用等；第十六章为天体物理学，主要介绍恒星、行星、星系、宇宙学等；第十七章为地球物理学，主要介绍地震学、地磁学、地热学等；第十八章为环境物理学，主要介绍大气物理学、水物理学、土壤物理学等；第十九章为生物物理学，主要介绍分子生物学、细胞生物学、生物化学、生物物理学等；第二十章为社会物理学，主要介绍社会物理学的基本概念、社会物理学的应用等。

# 目 录

## CONTENTS

<b>第 1 章 绪论</b>	1
内容提要	1
典型例题与解题技巧	3
历年考研真题评析	4
课后习题全解	5
<b>第 2 章 插值法</b>	11
内容提要	11
典型例题与解题技巧	16
历年考研真题评析	20
课后习题全解	21
<b>第 3 章 函数逼近与曲线拟合</b>	38
内容提要	38
典型例题与解题技巧	45
历年考研真题评析	51
课后习题全解	53

<b>第 4 章 数值积分与数值微分</b>	71
内容提要	71
典型例题与解题技巧	76
历年考研真题评析	81
课后习题全解	85
<b>第 5 章 解线性方程组的直接方法</b>	99
内容提要	99
典型例题与解题技巧	105
历年考研真题评析	109
课后习题全解	113
<b>第 6 章 解线性方程组的迭代法</b>	131
内容提要	131
典型例题与解题技巧	134
历年考研真题评析	137
课后习题全解	139
<b>第 7 章 非线性方程求根</b>	147
内容提要	147
典型例题与解题技巧	152
历年考研真题评析	156
课后习题全解	160
<b>第 8 章 矩阵特征值问题计算</b>	174
内容提要	174
典型例题与解题技巧	177
历年考研真题评析	181
课后习题全解	186

第9章 常微分方程初值问题数值解法 .....	198
内容提要 .....	198
典型例题与解题技巧 .....	203
历年考研真题评析 .....	208
课后习题全解 .....	211

无关的差数叫做舍入误差。  
圆,零或负数时取0,即 C1 取正数或取 -1,0 时实

# 第1章 绪论

计算机的内部表示都是二进制的,但是显示输出时,由于  
浮点数的尾数部分是有限的,所以输出的结果也是有限的,  
如果要精确表示一个数,则需要无限位数,这是不可能的。因此  
在表示数时,必须舍去一部分,即截断数。

## 内容提要

### 一、误差度量

1. 数值分析研究两类误差:舍入误差和截断误差. 由于计算机字长的有限性,对相关数据进行存储表示时便产生舍入误差,计算机必须在有限的时间内得到运行结果,于是无穷的运算过程必须截断为有限过程,由此产生截断误差.
2. 误差的度量方式有:绝对误差(限)、相对误差(限)和有效数字.  
设  $x^*$  是真值  $x$  的一个近似. 绝对误差为  $e(x^*) = x^* - x$ , 相对误差为  $e_r(x^*) = \frac{e(x^*)}{x} \approx \frac{e(x^*)}{x^*}$ . 绝对误差限  $\epsilon(x^*)$  和相对误差限  $\epsilon_r(x^*)$  分别是  $|e(x^*)|$  和  $|e_r(x^*)|$  的上限.
3. 对于非零近似值  $x^*$  的如下规格化标准形式

$$x^* = \pm 10^m \times 0.x_1 x_2 \dots x_n \dots x_p, \quad x_1 \neq 0 \quad (1.1)$$

如果存在尽可能大的  $n$ , 使得  $|e(x^*)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$ , 则称  $x^*$  有  $n$  位有效数字. 进而当  $n=p$  时, 称  $x^*$  是有效数.



#### 4. 有效数字和相对误差的关系

**定理 1.1** 如果形如式(1.1)的  $x^*$  有  $n$  位有效数字, 则

$$|e_r(x^*)| \leq \frac{1}{2x_1} \times 10^{1-n}.$$

**定理 1.2** 如果形如式(1.1)的  $x^*$  的相对误差满足

$$|e_r(x^*)| \leq \frac{1}{2(x_1+1)} \times 10^{1-n}, \text{ 则 } x^* \text{ 至少有 } n \text{ 位有效数字.}$$

### 二、浮点数系统

对于  $s+t+2$  位的浮点数系( $s$  表示二进制阶码数值的二进制位数,  $t$  表示尾数的二进制位数, 其他两位表示阶码和尾数的符号), 机器数绝对值的范围是  $2^{-2^s} \sim 2^{2^s-1}$ , 实数表示的相对舍入误差限是  $2^{-t}$ . 当数据的绝对值大于  $2^{2^s-1}$  时, 计算机非正常停机, 称之为上溢, 当非零数据的绝对值小于  $2^{-2^s}$ , 用机器零表示, 精度损失, 称之为下溢.

### 三、误差传播

如果在运算过程中舍入误差能够得到控制, 或者舍入误差的增长不影响产生可靠的结果, 则称该算法是数值稳定的.

函数值绝对误差传播公式如下

$$e(f(x^*)) \approx f'(x^*) e(x^*) \quad (1.2)$$

$$e(f(x_1^*, \dots, x_n^*)) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} e(x_i^*) \quad (1.3)$$

$$\epsilon(f(x^*)) \approx |f'(x^*)| \epsilon(x^*) \quad (1.4)$$

### 四、数值稳定性

不同的教材对数值方法稳定性的定义有所不同, 有的要求随计算过程的深入误差不增长, 有的则要求误差增长速度不能太快. 只要不影响产生具有有效数字的近似值即认为是稳定的. 读者应注意教材中的定义. 随着学习的深入, 会针对各种具体算法给出稳定性的确切定义.



## 典型例题与解题技巧

**【例 1】** 求  $\sqrt{3}$  的近似值, 使其绝对误差限精确到  $\frac{1}{2} \times 10^{-1}, \frac{1}{2} \times 10^{-2}$ ,  
 $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ .

**解题分析** 本题考查绝对误差限的知识.

**解题过程** 因为  $\sqrt{3}=1.73205\dots$ . 由于

$$\epsilon^*(1.7)=|\sqrt{3}-1.7|=0.03205\dots<0.05$$

$$\epsilon^*(1.73)=|\sqrt{3}-1.73|=0.00205\dots<0.005$$

$$\epsilon^*(1.732)=|\sqrt{3}-1.732|=0.00005$$

所以  $x_1^*=1.7, x_2^*=1.73, x_3^*=1.732$ .

**【例 2】** 下列数据作为  $x=e$  的近似值, 试确定它们各有几位有效数字, 并确定相对误差限.

$$x_1^*=2.7, x_2^*=2.71, x_3^*=2.72$$

**解题分析** 本题考查了有效数字与相对误差的基础知识.

**解题过程**  $x_1^*=2.7=10^0 \times 2.7$ , 于是有  $m=0$ , 由

$$|e(x_1^*)|=|x_1^*-x|=|2.7-e|=0.018\dots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-1} = \frac{1}{2} \times 10^{0-2+1}$$

可知  $x_1^*$  具有两位有效数字. 利用不等式

$$|e_r(x_1^*)|=\frac{|e(x_1^*)|}{|x_1^*|}=\frac{0.018\dots}{2.7}\leq\frac{0.019}{2.7}\approx 0.0070$$

得相对误差限  $\epsilon_r(x_1^*) \approx 0.0070$ .

同理可求得  $x_2^*$  和  $x_3^*$  的有效数字及相对误差限.

**【例 3】** 请给出一种算法计算  $x^{256}$ , 要求乘法次数尽可能少.

**解题分析** 要尽可能地减少运算量, 其中一种思路是尽可能运用已经计算出的结果. 如  $x^{256}=(x^{128})^2$ , 当  $x^{128}$  计算出来之后,



再需一次乘法便可以得到  $x^{256}$ ; 而  $x^{128} = (x^{64})^2$ , 同样地, 当  $x^{64}$  计算出来后, 再需一次乘法就可以计算出  $x^{128}$ ; 依此类推, 这样就得到一种比通常乘法次数要少得多的算法.

## 解题过程

$$\begin{aligned} x^{256} &= x^{128} \times x^{128} = x^{64} \times x^{64} \times x^{128} \\ &= x^{32} \times x^{32} \times x^{64} \times x^{128} \\ &= x^{16} \times x^{16} \times x^{32} \times x^{64} \times x^{128} \\ &= x^8 \times x^8 \times x^{16} \times x^{32} \times x^{64} \times x^{128} \\ &= x \times x \times x^2 \times x^4 \times x^8 \times x^{16} \times x^{32} \times x^{64} \times x^{128} \end{aligned}$$

这样共需要 8 次乘法就可以计算出结果.

**【例 4】** 试给出一种计算积分  $I_n = e^{-1} \int_0^1 x^n e^x dx$  近似值的稳定递推算法.

## 解题分析

本题考查了算法的稳定性的知识.

## 解题过程

经分部积分有  $I_n = 1 - nI_{n-1}$ , 虽然从  $I_0 = 1 - e^{-1}$  出发, 可以建立一种递推算法, 但当对  $I_0$  近似时, 因在递推公式中出现  $nI_{n-1}$ , 随着递推过程的进行, 导致算法误差迅速增长, 因而是一种不稳定算法. 但从该递推公式中解出  $I_{n-1}$ , 就可以得到误差迅速减小的递推算法.



## 历年考研真题评析

**【题】** (东南大学 2006 年) 取  $\sqrt{99}$  的 6 位有效数 9.94987, 则以下两种算法各有几位有效数字?

$$10 - \sqrt{99} \approx 10 - 9.94987 = 0.05013 \quad ①$$

$$\frac{1}{10 + \sqrt{99}} \approx \frac{1}{10 + 9.94987} = \frac{1}{19.94987} = 0.0501256399\cdots \quad ②$$

## 解题分析

本题考查了误差估计有效数字的判断, 读者应该注意新旧判别方式的差别.

## 解题过程

记  $x^* = \sqrt{99}$ ,  $x = 9.94987$ ,  $e(x) = x^* - x$ , 则



$$|e(x)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

由  $e(10-x) \approx -e(x)$  得

$$|e(10-x)| \approx |e(x)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

因而算式①

$$10 - \sqrt{99} \approx 0.05013$$

至少具有 4 位有效数字.

又由

$$e(10+x) \approx e(x), \quad |e(10+x)| \approx |e(x)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

和

$$e\left(\frac{1}{10+x}\right) \approx -\frac{e(10+x)}{(10+x)^2} \approx -\frac{e(x)}{(10+x)^2}$$

得

$$\left|e\left(\frac{1}{10+x}\right)\right| \approx \frac{|e(x)|}{(10+x)^2} \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-5}}{(10+9.94987)^2} = 0.1256 \times 10^{-7}$$

因而算式②

$$\frac{1}{10 + \sqrt{99}} \approx 0.0501256399\dots$$

至少具有 6 位有效数字, 即  $\frac{1}{10 + \sqrt{99}} = 0.0501256$ .



## 课后习题全解

**○1.** 设  $x > 0$ ,  $x$  的相对误差为  $\delta$ , 求  $\ln x$  的误差.

$$\text{解 } \ln x - \ln x^* = \ln \frac{x}{x^*} = \ln \frac{x - x^* + x^*}{x^*} = \ln(\delta + 1) \approx \delta$$

**○2.** 设  $x$  的相对误差为 2%, 求  $x^n$  的相对误差.

$$\text{解 } e(x^n) \approx nx^{n-1}(x - x^*)$$



$$e_r(x^n) \approx n \frac{x^{n-1}(x-x^*)}{x^n} = n \frac{x-x^*}{x^*}$$

$$= ne_r(x) = 0.02n$$

- 3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数, 即误差限不超过最后一位的半个单位, 试指出它们是几位有效数字:

$$x_1^* = 1.1021, \quad x_2^* = 0.031, \quad x_3^* = 385.6,$$

$$x_4^* = 56.430, \quad x_5^* = 7 \times 1.0.$$

解  $x_1^* = 1.1021$  有 5 位有效数字;  $x_2^* = 0.031$  有 2 位有效数字;  
 $x_3^* = 385.6$  有 4 位有效数字;  $x_4^* = 56.430$  有 5 位有效数字;  
 $x_5^* = 7 \times 1.0$  有 1 位有效数字.

- 4. 利用公式(1.4)(在课本中是公式(2.3))求下列各近似值的误差限:

$$(i) x_1^* + x_2^* + x_4^*, (ii) x_1^* \cdot x_2^* \cdot x_3^*, (iii) x_2^* / x_4^*.$$

其中  $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$  均为第 3 题所给的数.

解 (i)  $e^*(x_1^* + x_2^* + x_4^*)$

$$\leq e(x_1^*) + e(x_2^*) + e(x_4^*)$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} + \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\leq 1.05 \times 10^{-3} = \epsilon^*.$$

(ii)  $e^*(x_1^* \cdot x_2^* \cdot x_3^*)$

$$\approx x_2^* \cdot x_3^* (x_1 - x_1^*) + x_1^* \cdot x_3^* (x_2 - x_2^*) + x_1^* \cdot x_2^* (x_3 - x_3^*)$$

$$(x_3 - x_3^*)$$

$$\approx 0.215 = \epsilon^*$$

$$(iii) e^*(x_2^* / x_4^*) \leq \left| \frac{1}{x_4^*} (x_2 - x_2^*) - \frac{x_2^*}{(x_4^*)^2} (x_4 - x_4^*) \right|$$

$$= \left| \frac{x_2^*}{x_4^*} e_r^*(x_2) - \frac{x_2^*}{x_4^*} e_r^*(x_4) \right|$$

$$\leq \left| \frac{x_2^*}{x_4^*} \right| [ |e_r^*(x_2)| + |e_r^*(x_4)| ]$$