华腾教育
HUA TENG EDUCATION

高等学校教材经典同步辅导丛书数学类(二)

配清华大学出版社《数值分析》第4版　李庆扬等编

数值分析

第4版

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心

丛书主编　清华大学　范亮宇

本书主编　清华大学　严奇荣

- **紧贴教材**：精讲重点　点拨方法　联系考研
- **考试宝典**：教材精华　经典试卷　常考试题
- **学习卡**：资料下载　信息交流　互动论坛
- **课后习题**：三级突破　分析要点　总结难点

中国矿业大学出版社

数值分析

（第四版）

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编　清华大学　范亮宇
本书主编　清华大学　严奇荣

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数值分析同步辅导及习题全解/严奇荣主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2006.8

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 7 - 81107 - 396 - X

Ⅰ.数… Ⅱ.严… Ⅲ.数值计算—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086950 号

书　　名　数值分析同步辅导及习题全解

主　　编　严奇荣

责任编辑　罗　浩

出版发行　中国矿业大学出版社

网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**　cumtpvip@cumtp.com

印　　刷　北京市昌平百善印刷厂

经　　销　新华书店

开　　本　850×1168　1/32　**本册印张** 9　**本册字数** 182 千字

版次印次　2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

总 定 价　57.60 元

本套丛书四大特色

特色一

课后习题分等级，开差异化习题全解之先河。

本书在编写时充分考虑到您在学习过程中的需求，史无前例地把课后习题按照难易程度分成了三个等级，分别用○代表**“简单”习题，◎代表“中等难度”习题，●代表“较高难度”习题，这是目前所有辅导书都没有的创新！**针对不同的等级我们给出了不同程度的讲解，对于简单习题我们提供了详尽的解题过程，对于中等难度习题我们在简单习题的基础上，添加对该题的详尽分析；对于较高难度习题，我们在中等难度解答的基础上，更是对该题进行总结，以便举一反三，使您能够掌握重点、巩固所学。

特色二

赠送考试宝典
考试学习无忧

本书附赠的考试宝典，它包括以下丰富内容：

1.知识卡片：这部分集中了教材中的精华部分，我们精选教材的重要公式、定理、定义，把教材中的重点难点知识进行总结，使您在最短的时间掌握最多的知识；

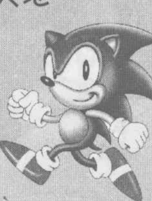
2.为了让大家更零距离的接触考试，我们还特意整理了**名校考研真题、名校期末真题、期末模拟试题**各一套让您提前预热，掌握所学；

3.期末考试常考50道试题索引，这是我们对全国100多所知名高校期中、期末考试题的研究总结出的常考易考的经典题目，对于那些重要的题，我们在正文中将对该题用加灰底的方式特别标注出来，如$\boxed{○ 1.9}$。有了这些常考题型，相信大家考试时一定会胸有成竹。

本套丛书四大特色

特色三

网络学习卡
开拓学习新天地

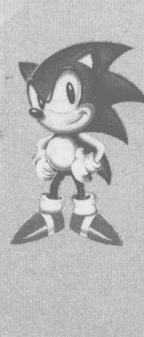


现在是网络时代，我们的服务因此也是全方位的。通过随书赠送的学习卡，只要登陆华腾教育网(www.huatengedu.com.cn)，您就可以获得在线学习、在线下载、论坛交流、信息浏览、各种课程课件下载、各种考研真题、课后习题全解下载等精彩服务内容。

本书全部由专家执笔，编写严谨，具有较强的针对性、指导性和补充性等特点。内文结构安排合理，栏目设置系统实用（我们有**内容提要**、**典型例题与解题技巧**、**历年考研真题评析**等精彩设置），可以使您事半功倍地掌握更多知识。

特色四

内容合理
结构科学



高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前言

PREFACE

《数值分析》是数学类专业重要的专业课程之一，也是报考数学类专业硕士研究生的考试课程。李庆扬、王能超、易大义的《数值分析》(第四版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学好这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《数值分析同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1. 内容提要：串讲概念，总结性质和定理，知识全面系统。

2. 典型例题与解题技巧：精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题、能够举一反三，拓展思路。

3. 历年考研真题评析：精选历年考研真题进行深入的讲解。

4. 课后习题全解：本书给出了李庆扬、王能超、易大义《数值分析》各章习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程，而且还依照难易程度将习题分为三个等级，根据不同等级对习题进行了不同程度的讲解。

编写本书时，依据大学本科现行教材及教学大纲的要求，参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、人民大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写。

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助。同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

华腾教育教学与研究中心

目录 CONTENTS

第1章 绪 论

内容提要

一、误差度量

1. 数值分析研究两类误差：**舍入误差**和**截断误差**. 由于计算机字长的有限性，对相关数据进行存储表示时便产生舍入误差，计算机必须在有限的时间内得到运行结果，于是无穷的运算过程必须截断为有限过程，由此产生截断误差.

2. **误差的度量分式有：绝对误差(限)、相对误差(限)和有效数字.** 设 x^* 是真值 x 的一个近似. 绝对误差为 $e(x^*)=x^*-x$，相对误差为 $e_r(x^*)=\dfrac{e(x^*)}{x}\approx\dfrac{e(x^*)}{x^*}$. 绝对误差限 $\varepsilon(x^*)$ 和相对误差限 $\varepsilon_r(x^*)$ 分别是 $|e(x^*)|$ 和 $|e_r(x^*)|$ 的上限.

3. 对于**非零近似值** x^* 的如下**规格化标准形式**

$$x^*=\pm 10^m\times 0.\underline{x_1x_2\cdots x_n\cdots x_p},\quad x_1\neq 0 \qquad (1.1)$$

如果存在尽可能大的 n，使得 $|e(x^*)|\leqslant\dfrac{1}{2}\times 10^{m-n}$，则称 x^* 有 n 位有效数字. 进而当 $n=p$ 时，称 x^* 是有效数.

4. 有效数字和相对误差的关系

定理 1.1 如果形如式(1.1)的 x^* 有 n 位有效数字，则 $|e_r(x^*)| \leqslant \frac{1}{2x_1} \times 10^{1-n}$.

定理 1.2 如果形如式(1.1)的 x^* 的相对误差满足 $|e_r(x^*)| \leqslant \frac{1}{2(x_1+1)} \times 10^{1-n}$，则 x^* 至少有 n 位有效数字.

二、浮点数系统

对于 $s+t+2$ 位的浮点数系(s 表示二进制阶码数值的二进制位数，t 表示尾数的二进制位数，其他两位表示阶码和尾数的符号)，机器数绝对值的范围是 $2^{-2^s} \sim 2^{2^s-1}$，实数表示的相对舍入误差限是 2^{-t}. 当数据的绝对值大于 2^{2^s-1} 时，计算机非正常停机，称之为**上溢**，当非零数据的绝对值小于 2^{-2^s}，用机器零表示，精度损失，称之为**下溢**.

三、误差传播

如果在运算过程中舍入误差能够得到控制，或者舍入误差的增长不影响产生可靠的结果，则称该算法是数值稳定的.

函数值绝对误差传播公式如下

$$e(f(x^*)) \approx f'(x^*)e(x^*) \tag{1.2}$$

$$e(f(x_1^*,\cdots,x_n^*)) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_i} e(x_i^*) \tag{1.3}$$

$$\varepsilon(f(x^*)) \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*) \tag{1.4}$$

四、数值稳定性

不同的教材对数值方法稳定性的定义有所不同，有的要求随计算过程的深入误差不增长，有的则要求误差增长速度不能太快．只要不影响产生具有有效数字的近似值即认为是**稳定的**. 读者应注意教材中的定义．随着学习的深入，会针对各种具体算法给出稳定性的确切定义.

典型例题与解题技巧

【例 1】 求$\sqrt{3}$的近似值,使其绝对误差限精确到$\frac{1}{2}\times10^{-1}$,$\frac{1}{2}\times10^{-2}$,$\frac{1}{2}\times10^{-3}$.

解题分析 本题考查绝对误差限的知识.

解题过程 因为$\sqrt{3}=1.73205\cdots$. 由于

$$\varepsilon^*(1.7)=|\sqrt{3}-1.7|=0.03205\cdots<0.05$$

$$\varepsilon^*(1.73)=|\sqrt{3}-1.73|=0.00205\cdots<0.005$$

$$\varepsilon^*(1.732)=|\sqrt{3}-1.732|=0.00005$$

所以 $x_1^*=1.7$, $x_2^*=1.73$, $x_3^*=1.732$.

【例 2】 下列数据作为 $x=\mathrm{e}$ 的近似值,试确定它们各有几位有效数字,并确定相对误差限.

$$x_1^*=2.7, x_2^*=2.71, x_3^*=2.72$$

解题分析 本题考查了有效数字与相对误差的基础知识.

解题过程 $x_1^*=2.7=10^0\times2.7$, 于是有 $m=0$, 由

e=2.718282;

$$|e(x_1^*)|=|x_1^*-x|=|2.7-\mathrm{e}|=0.018\cdots$$ =0.18×10

$$\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-1}=\frac{1}{2}\times10^{0-2+1}$$

可知 x_1^* 具有两位有效数字. 利用不等式

$$|e_r(x_1^*)|=\frac{|e(x_1^*)|}{|x_1^*|}$$

$$=\frac{0.018\cdots}{2.7}\leqslant\frac{0.019}{2.7}\approx0.0070$$

得相对误差限 $\varepsilon_r(x_1^*)\approx0.0070$.

同理可求得 x_2^* 和 x_3^* 的有效数字及相对误差限.

【例 3】 请给出一种算法计算 x^{256},要求乘法次数尽可能少.

解题分析 要尽可能地减少运算量,其中一种思路是尽可能运用已经计算出的结果. 如 $x^{256}=(x^{128})^2$,当 x^{128} 计算出来之后,

再需一次乘法便可以得到 x^{256}；而 $x^{128}=(x^{64})^2$，同样地，当 x^{64} 计算出来后，再需一次乘法就可以计算出 x^{128}；依此类推，这样就得到一种比通常乘法次数要少得多的算法.

解题过程
$$\begin{aligned}x^{256}&=x^{128}\times x^{128}=x^{64}\times x^{64}\times x^{128}\\&=x^{32}\times x^{32}\times x^{64}\times x^{128}\\&=x^{16}\times x^{16}\times x^{32}\times x^{64}\times x^{128}\\&=x^{8}\times x^{8}\times x^{16}\times x^{32}\times x^{64}\times x^{128}\\&=x\times x\times x^{2}\times x^{4}\times x^{8}\times x^{16}\times x^{32}\times x^{64}\times x^{128}\end{aligned}$$

这样共需要 8 次乘法就可以计算出结果.

【例 4】 试给出一种计算积分 $I_n=e^{-1}\int_0^1 x^n e^x\,\mathrm{d}x$ 近似值的稳定递推算法.

解题分析 本题考查了算法的稳定性的知识.

解题过程 经分部积分有 $I_n=1-nI_{n-1}$，虽然从 $I_0=1-e^{-1}$ 出发，可以建立一种递推算法，但当对 I_0 近似时，因在递推公式中出现 nI_{n-1}，随着递推过程的进行，导致算法误差迅速增长，因而是一种不稳定算法. 但从该递推公式中解出 I_{n-1}，就可以得到误差迅速减小的递推算法.

历年考研真题评析

【题】 （东南大学 2006 年）取 $\sqrt{99}$ 的 6 位有效数 9.94987，则以下两种算法各有几位有效数字？

$$10-\sqrt{99}\approx 10-9.94987=0.05013 \qquad ①$$

$$\frac{1}{10+\sqrt{99}}\approx\frac{1}{10+9.94987}=\frac{1}{19.94987}=0.0501256399\cdots \qquad ②$$

解题分析 本题考查了误差估计有效数字的判断，读者应该注意新旧判别方式的差别.

解题过程 记 $x^*=\sqrt{99}$，$x=9.94987$，$e(x)=x^*-x$，则

$$|e(x)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

由 $e(10-x)\approx-e(x)$ 得

$$|e(10-x)|\approx|e(x)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

因而算式①

$$10-\sqrt{99}\approx0.05013$$

至少具有 4 位有效数字.

又由

$$e(10+x)\approx e(x),\quad |e(10+x)|\approx|e(x)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

和

$$e\left(\frac{1}{10+x}\right)\approx-\frac{e(10+x)}{(10+x)^2}\approx-\frac{e(x)}{(10+x)^2}$$

得

$$\left|e\left(\frac{1}{10+x}\right)\right|\approx\frac{|e(x)|}{(10+x)^2}\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times10^{-5}}{(10+9.94987)^2}=0.1256\times10^{-7}$$

因而算式②

$$\frac{1}{10+\sqrt{99}}\approx0.0501256399\cdots$$

至少具有 6 位有效数字,即 $\dfrac{1}{10+\sqrt{99}}=0.0501256$.

课后习题全解

○1. 设 $x>0$,x 的相对误差为 δ,求 $\ln x$ 的误差.

解 $\ln x-\ln x^*=\ln\dfrac{x}{x^*}=\ln\dfrac{x-x^*+x^*}{x^*}=\ln(\delta+1)\approx\delta$

○2. 设 x 的相对误差为 2%,求 x^n 的相对误差.

解 $e(x^n)\approx nx^{n-1}(x-x^*)$

$$e_r(x^n)\approx n\frac{x^{n-1}(x-x^*)}{x^n}=n\frac{x-x^*}{x^*}$$

$$=ne_r(x)=0.02n$$

○3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数,即误差限不超过最后一位的半个单位,试指出它们是几位有效数字:

$x_1^*=1.1021$, $x_2^*=0.031$, $x_3^*=385.6$,

$x_4^*=56.430$, $x_5^*=7\times1.0$.

解 $x_1^*=1.1021$ 有 5 位有效数字;$x_2^*=0.031$ 有 2 位有效数字;$x_3^*=385.6$ 有 4 位有效数字;$x_4^*=56.430$ 有 5 位有效数字;$x_5^*=7\times1.0$ 有 1 位有效数字.

○4. 利用公式(1.4)(在课本中是公式(2.3))求下列各近似值的误差限:

(ⅰ) $x_1^*+x_2^*+x_4^*$,(ⅱ) $x_1^*\cdot x_2^*\cdot x_3^*$,(ⅲ) x_2^*/x_4^*.

其中 $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ 均为第 3 题所给的数.

解 (ⅰ) $e^*(x_1^*+x_2^*+x_4^*)$

$$\leqslant e(x_1^*)+e(x_2^*)+e(x_4^*)$$

$$=\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-3}+\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

$$\leqslant1.05\times10^{-3}=\varepsilon^*.$$

(ⅱ) $e^*(x_1^*\cdot x_2^*\cdot x_3^*)$

$$\approx x_2^*\cdot x_3^*(x_1-x_1^*)+x_1^*\cdot x_3^*\cdot(x_2-x_2^*)+x_1^*\cdot x_2^*(x_3-x_3^*)$$

$$\approx0.215=\varepsilon^*$$

(ⅲ) $e^*(x_2^*/x_4^*)\leqslant\left|\frac{1}{x_4^*}(x_2-x_2^*)-\frac{x_2^*}{(x_4^*)^2}(x_4-x_4^*)\right|$

$$=\left|\frac{x_2^*}{x_4^*}e_r^*(x_2)-\frac{x_2^*}{x_4^*}e_r^*(x_4)\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{x_2^*}{x_4^*}\right|[|e_r^*(x_2)|+|e_r^*(x_4)|]$$