现代数学基础丛书 128

泛函微分方程的相空间理论及应用

王克 范猛 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书 128

泛函微分方程的相空间理论及应用

王 克 范 猛 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是作者在泛函微分方程理论的多年研究工作的基础上写成的，着重介绍具有无限时滞泛函微分方程的相空间理论及其应用. 本书共 8 章，主要包括：一般相空间理论及其应用、$\mathscr{C}_h$空间及其应用、$\mathscr{C}_g$空间及其应用、伪度量相空间、可变时滞泛函微分方程的局部理论、相空间理论在生物数学中的应用、具有无限时滞的泛函方程的基本理论、时标动力学方程的周期性等.

本书可供数学专业的研究生、教师和科研人员阅读，也可供相关领域(如力学、生物学、工程技术等)的教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

泛函微分方程的相空间理论及应用/王克，范猛著. 一北京：科学出版社，2009

(现代数学基础丛书；128)

ISBN 978-7-03-023675-3

Ⅰ.泛… Ⅱ.①王…②范… Ⅲ.泛函分析-微分方程-相空间 Ⅳ.O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 016263 号

责任编辑：王丽平 房 阳 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 4 月第一次印刷 印张：20
印数：1—2 500 字数：390 000

定价：65.00 元

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经被破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

序

大量物理学、生物学、控制理论和工程应用课题表明：无穷时滞系统无论从理论还是从应用角度看，都是十分重要的研究方向. 20 世纪 70 年代以后，逐渐成形的无穷时滞泛函微分方程理论当然是有限时滞泛函微分方程的直接推广. 然而此时相空间的确立并不容易，不是一帆风顺的，因为记号 $x_t(\theta)=x(t+\theta),\theta\in[-r,0]$，当 r 为 $+\infty$ 时，对 $t>\sigma, x_\sigma$ 都是 x_t 在 $(-\infty,\sigma]$ 上的一个限制，亦即 $x_\sigma(\theta)=x(\sigma+\theta)$ 是 $x_t(\theta)=x(t+\theta)$ 在 $(-\infty,\sigma]$ 上的一段. 因此记号 x_t 对一切 t 都摆脱不了 x_σ 的直接影响. 传统的上确界模 $\|\cdot\|$ 对表述解的性态用处不大，因为 $\|x_t\|\to 0$ 是不可能的，除非 $x(t)\equiv 0$. 所以要使无穷时滞泛函微分方程理论有所进展，就必须增添某种体现“衰减记忆”的假定，以摆脱初始函数无时不在的直接影响. 换句话说，应该把这种设想公理化，以确定合适的相空间.

建立相空间的工作从 Coleman 开头，经 J. K. Hale 与 J. Kato 的总结后，有了一个符合逻辑的开始. 数十年来不断完善、简化，使之日臻完善. 从某种意义上说，无穷时滞泛函微分方程的发展水平完全取决于相空间理论的进展状况.

该书的作者王克教授和范猛教授长期致力于研究这种相空间. 可以说，正是有了他们在相空间理论上的创新与成就，才使得有限时滞的一系列理论结果顺利地推广到无穷时滞系统上去，如周期解与概周期解的存在性、稳定性，以及解的渐近性、有界性的判断准则，半群理论等. 特别是 Volterra 型积分微分方程，当它们含有无穷分布时滞的情形，效果显著.

全书通顺清晰，相信初次涉足无穷时滞泛函微分方程的读者必能从中确立必备的研究基础. 书中所列结果对应用领域的工作更可随需要引用.

这是一本专著，也是一本很出色的研究生教材. 我非常乐于把此书推荐给年轻的同行们.

郑祖庥

2008 年 8 月 18 日

前　　言

在自然科学和工程技术研究中, 许多现象的数学模型均由常微分方程所描述, 这些问题实际上都是假定事物的变化规律只与当时的状态有关, 而和过去的历史状态无关. 大量的事实说明, 许多事物的变化规律不仅依赖于当前的状态, 而且与历史的状态有关, 在这种情况下, 常微分方程就不能精确地描述客观事物了. 严格地讲, 在动力学系统中时滞通常是不可避免的, 即使是以光速传递的信息系统也不例外. 在这个意义下, 用常微分方程去描述事物的状态和发展变化的过程只是动力学系统的一种近似的刻画. 为了更精确地描述客观世界, 必须考虑时间滞后的影响, 这就必然导致泛函微分方程. 泛函微分方程是具有时间滞后的微分方程, 用于描述既依赖于当前状态也依赖于历史状态的发展系统, 其特点是充分考虑到系统的历史对现状的影响, 泛函微分方程比常微分方程更为精确地描述了客观世界, 因而在力学、控制理论、生物学、管理学、经济学及流行病学等许多领域中都有广泛的应用, 一直受到学术界的高度重视, 具有非常重要的理论意义和应用价值. 泛函微分方程是现代应用数学的一个重要分支, 其解的动力学性质的研究是现代数学的热门问题之一. 从实际应用的角度看, 如果需要考虑的时滞比较大或时滞的界难以确定, 则采用无限时滞的泛函微分方程在数学处理上通常比较方便.

相空间理论是泛函微分方程理论研究中的一个重要课题, 是研究其他问题的基础和工具. 对于不同类型的方程和不同的具体问题, 可以采用不同形式的相空间. 对于具有有限时滞的泛函微分方程, 相空间的选取对所研究的问题没有太大的影响, 所以在有限时滞的泛函微分方程的研究中, 几乎都是采用连续函数加上确界模所构成的空间. 然而在无限时滞的泛函微分方程的研究中, 相空间的选取与具体问题的解决有着密切的关系. 在许多涉及无限时滞泛函微分方程的理论和应用问题的研究中, 相空间的合理选取会对问题的解决起到很大的促进作用. 相空间理论是无限时滞泛函微分方程研究中的重要方向和有力工具.

国内外已经出版的一些泛函微分方程著作均对相空间理论作了初步介绍, 但不够深入. 特别是近年来, 具有无限时滞的泛函微分方程的相空间理论获得了长足的发展, 取得了大量深刻的研究成果, 极大地促进了泛函微分方程的研究. 但国内外尚无系统介绍具有无限时滞的泛函微分方程相空间理论及应用的著作, 本书是泛函

微分方程相空间理论及应用的比较系统的总结, 希望本书的出版能够填补这方面的空白, 同时也为有志在这方面开展研究工作的同志们提供一本入门的教材. 我们也相信, 本书的问世一定会促进相空间理论的进一步发展, 拓广应用相空间理论解决无限时滞泛函微分方程的理论及应用问题的范围, 也将对应用领域的研究和实际问题的解决起到促进作用.

本书的内容绝大部分取自作者多年来的研究成果, 并广泛参考和汲取了这个领域国内外同行散布于文献中的最新研究工作. 本书比较全面系统地介绍具有无限时滞的泛函微分方程的相空间理论及其应用方面的最新、最重要的成果. 全书共分 8 章, 主要内容包括一般相空间理论及其应用、$\mathscr{C}_h$ 空间及其应用、$\mathscr{C}_g$ 空间及其应用、伪度量相空间、可变时滞泛函微分方程的局部理论、相空间理论在生物数学中的应用、具有无限时滞的泛函方程的基本理论、时标动力学方程的周期性等. 对各类教材中普遍介绍的内容, 不作详细的介绍, 同时限于篇幅, 我们不可能把国内外的工作一一介绍, 但有关文献尽可能列出.

本书两位作者的老师——东北师范大学已故的黄启昌教授是我国相空间理论研究的主要开拓者和倡导者. 1983 年, 黄先生邀请他的合作者 —— 美国著名数学家 T.A.Burton 教授来东北师范大学数学系访问. 讲学期间, Burton 教授报告了他们关于 $\mathscr{C}_g$ 空间的研究工作, 使我们初步了解了相空间理论在无限时滞泛函微分方程研究中的重要性. 1984 年, 黄先生在文献 [87] 中使用了一个与 $\mathscr{C}_g$ 空间完全不同的相空间, 但这个空间的构造比较特殊, 使用上不太方便. 在黄先生的指导下, 1985 年, 本书第一作者 [164,165] 提出并建立了 $\mathscr{C}_h$ 空间理论. 大量的后续研究工作表明, 这种新的相空间具有许多优良的性质. 例如, $\mathscr{C}_h$ 空间是一个 Banach 空间, 因其具有完备性, 所以在其中可以施行极限运算, 可以使用多数的不动点定理等. 以 $\mathscr{C}_h$ 空间理论为基础, 本书两位作者在相空间理论及其应用方面做了大量研究, 很多研究工作都是黄先生悉心指导和参与的. 在黄先生生前, 本书作者多次提议和黄先生共同出版本书, 先生总是出于谦虚而婉拒. 但他对本书的写作一直给予鼓励和支持. 他曾和本书作者约定, 当本书出版时, 为本书撰写序言. 现在这已经是不可能的事了, 成为作者的一大缺憾. 斯人虽逝，风范犹存. 本书的面世是对黄先生的纪念. 他所开创并参与的此方向的研究工作, 也一定会因本书的出版而得到进一步的发展. 先生若天堂有知，一定会感到欣慰.

本书初稿曾多次在东北师范大学和哈尔滨工业大学的青年教师、研究生讨论班上报告过, 参加讨论班的同志对本书提出了许多宝贵的意见, 特此表示感谢! 感谢安徽大学郑祖庥教授和哈尔滨工业大学崔明根教授对本书的支持! 作者对科学

出版社王丽平编辑及相关工作人员为本书的出版而付出的辛勤劳动深表谢意！作者还要对国家自然科学基金委员会、教育部科技发展中心、东北师范大学和哈尔滨工业大学的一贯支持，表示由衷的感谢！

限于作者的学识和水平，书中难免有疏漏及不当之处，殷切希望广大读者批评指正!

王 克 范 猛

2008 年 11 月

目　录

第 1 章　一般相空间理论及其应用

泛函微分方程是具有时间滞后的微分方程，它用于描述既依赖于当前状态也依赖于过去状态的发展系统. 其特点是充分考虑到系统的历史对现状的影响，因而在许多领域中都有重要的应用，一直受到学术界的高度重视.

从发现第一个泛函微分方程 (functional differential equation, FDE) 至今已过去两个多世纪了，但是系统的研究工作只是 20 世纪 50 年代才开始的，具有有限时滞的泛函微分方程理论比较成熟，文献 [73] 是这部分内容最完整的总结. 当时滞相当大的时候，通常就把时滞考虑为无限的. 这样就得到了具有无限时滞的泛函微分方程. 例如,

$$x'(t) = A_0x(t) + \sum_{j=1}^{\infty} x(t-r_j) + \int_{-\infty}^{t} k(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \quad r_j > 0 \tag{1.0.1}$$

和

$$N'(t) = aN(t)\left[1 - N_0^{-1}\int_{-\infty}^{0} N(t+s)\mathrm{d}\eta(s)\right] \tag{1.0.2}$$

就是具有无限时滞的泛函微分方程. 前者与核反应堆动力学有关，而后者与人口模型有关. 对这类方程的研究，自 Volterra 以来，因引入泛函分析的方法而得到长足的发展. 这类方程的右端，可以用函数空间中的算子来表示. 设 x 是定义在包含 $(-\infty, t]$ 的区间上的函数，定义 $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$ 上的函数 x_t 为

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad -\infty < \theta \leqslant 0.$$

对定义在 $\mathbb{R}^-$ 上的函数 φ，若令

$$f(t,\varphi) = A_0\varphi(0) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j\varphi(-r_j) + \int_{-\infty}^{0} k(t,t+\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{1.0.3}$$

则上述方程 (1.0.1) 就可以写为如下形式:

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{1.0.4}$$

这个方程的解要在使其右端泛函 (1.0.3) 有意义的范围中去寻找. 泛函 (1.0.3) 的定义域，即 φ 所在的空间，称为方程 (1.0.4) 的相空间. 用类似的方法，也可以把方程

(1.0.2) 写成 (1.0.4) 的形式. 本书主要考虑具有形式 (1.0.4) 的具有无限时滞的泛函微分方程及其相空间问题. 对于不同的方程和不同的具体问题, 可以采用不同形式的相空间. 对于有限时滞的泛函微分方程, 相空间的选取没有大的影响, 所以在有限时滞的泛函微分方程的研究中, 几乎都是采用连续函数加上确界模所构成的空间[73], 然而在无限时滞的泛函微分方程的研究中, 相空间的选取与具体问题的解决有着密切的关系. 根据具体问题的区别, 所选取的相空间有时是连续函数空间, 有时是可积函数空间.

1969 年, Coleman 和 Mizel[30, 31] 曾对一些与系统的衰减记忆现象有关的几种相空间的结构和性质进行了研究. 研究发现, 不同的相空间具有一些共同的性质, 即对于处理基本问题时所需的那些定性性质, 但那里所定义的范数存在很大的缺陷. 为了克服文献 [30, 31] 的缺陷, Hale[70] 进一步把这些共同的性质抽象出来, 并引入了其他几条公理, 以公理形式给出相空间, 并在其上讨论具有无穷时滞的泛函微分方程. 1978 年, Hale 和 Kato[71] 以及 Schumacher[134, 135] 几乎同时确定了相空间的公理化基础, 对相空间分别建立了一套限制性的公理系统. 这两套公理系统虽然不同, 但十分相似. 之后, 一些学者[71, 134, 135] 对所给出的公理作了轻微的改进, 参见文献 [81, 92, 128, 133]. 1980 年, Kappel 和 Schappacher[94] 对 Hale 和 Kato 以及 Schumacher 提出[71, 134, 135] 的公理体系进行了深入的讨论和比较, 进一步加以详细阐明. Corduneanu 和 Lakshmikantham[33] 对具有无限时滞的泛函微分方程理论进行了详尽的总结, 系统地讨论了泛函微分方程研究中的一些课题, 文中附有 289 篇参考文献, 包含 1980 年以前的大量文献. 一些学者相继建立了一些更加便于应用的具体的相空间[5, 19, 67, 165, 166]. 相空间理论为无限时滞泛函微分方程的理论的建立奠定了基础, 极大地推动了无限时滞泛函微分方程理论的发展. 近年来, 相空间理论发展非常迅速, 涌现出了大量理论及应用成果.

近年来的大量研究工作表明, 在解决具体问题时, 适当地选取相空间可以起很大的促进作用, 是解决具体问题的有力工具. 例如, 在文献 [82], [133] 中, 利用相空间理论去解决具有无限时滞的泛函微分方程的概周期解的存在性和稳定性问题, 特别是文献 [133] 提到在适当选取相空间后, 由零解的渐近稳定性推出了零解的指数渐近稳定性. 文献 [96] 也利用相空间理论讨论具有无限时滞的泛函微分方程的零解的稳定性问题, 使我们看到在相空间中讨论稳定性问题具有独到的优点. 选取合适的相空间研究发展了具有无限时滞的泛函微分方程的半群理论[12, 127]. 关于进一步的详细情况, 可参见文献 [33]. 近年来的工作可参见文献 [19, 84, 102, 157, 189], 其中, 文献 [84] 比较详细地介绍了日本数学家在相空间理论特别是具有无限时滞的泛函微分方程方面的研究工作, 但文献 [84] 对国内学者的工作未作任何介绍. 自文献 [84] 出版以来, 又涌现了大量新的研究成果.

1.1 相空间的公理系统

设 $\mathscr{B}$ 是某一类映 $\mathbb{R}^-$ 到 $\mathbb{R}^n$(即 n 维 Euclidean 空间 (以下简称欧氏空间), 根据具体情况可选用 l_∞, l_1 或 l_2 范数) 的实函数所构成的向量空间, 并赋之以 半范数 $|\cdot|$. 对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$ 和任意 $\beta \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, 令 φ^β 表示 φ 在区间 $(-\infty, -\beta]$ 上的限制. 所有这样的函数所构成的空间记为 $\mathscr{B}^\beta$. 对 $\xi \in \mathscr{B}^\beta$, 定义其半范数

$$|\xi|_\beta = \inf\{|\psi| \ |\psi \in \mathscr{B}, \psi^\beta = \xi\}.$$

对 $\varphi \in \mathscr{B}$, 令 $|\varphi|_\beta = |\varphi^\beta|_\beta$, 这样, $|\cdot|_\beta$ 也是 $\mathscr{B}$ 上的半范数.

令 Ω 是 $\mathbb{R} \times \mathscr{B}$ 中的开集, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是给定的连续泛函, 其中 $\mathbb{R}$ 表示实数集合, 即 $(-\infty, \infty)$. 考虑如下泛函微分方程:

$$x'(t) = f(t, x_t). \tag{1.1.1}$$

若 $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, 一个定义在 $(-\infty, \sigma + A), 0 < A \leqslant \infty$ 上的 $\mathbb{R}^n$ 值的函数 $x(t)$ 称为是方程 (1.1.1) 的过 (σ, φ) 的解, 如果 $x_\sigma = \varphi$ 且当 $t \in [\sigma, \sigma + A)$ 时 $x(t)$ 连续可微, 并满足方程 (1.1.1). 方程 (1.1.1) 的上述解记为 $x(\sigma, \varphi)(t)$ 或 $x(t, \sigma, \varphi)$.

设相空间 $\mathscr{B}$ 满足下列条件:

(B_1) 对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$ 及 $A : 0 < A \leqslant \infty$, 若 x 是定义在 $(-\infty, A)$ 上满足 $x_0 = \varphi$ 的 $\mathbb{R}^n$ 值的函数且 x 在 $[0, A)$ 上连续, 则对任意 $t \in [0, A), x_t \in \mathscr{B}$ 且 x_t 关于 t 连续.

(B_2) 存在连续函数 $K(\beta) > 0$, 使得对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$ 和任意 $t \in \mathbb{R}^+$, 有

$$|\varphi| \leqslant K(\beta)|\varphi|^{[-\beta, 0]} + |\varphi|_\beta$$

成立. 本书约定: 对 $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, 定义 $|x|^{[a,b]} := \sup\{|x(s)| \ |a \leqslant s \leqslant b\}$.

条件 (B_1) 和 (B_2) 可以保证方程 (1.1.1) 过 (σ, φ) 的解的存在性, 参见文献 [92]. 对任意 $\beta \in \mathbb{R}^+$ 和任意 $\varphi \in \mathscr{B}$, 由条件 (B_1) 知函数 $\varphi(\beta + \theta), \theta \in (-\infty, -\beta]$, 属于 $\mathscr{B}^\beta$. 于是可以用如下方式定义线性算子 $\tau^\beta : \mathscr{B} \to \mathscr{B}^\beta$:

$$[\tau^\beta \varphi](\theta) = \varphi(\beta + \theta).$$

设空间 $\mathscr{B}$ 还满足

(B_3) 存在连续函数 $M(\beta) > 0$, 使得

$$|\tau^\beta \varphi|_\beta \leqslant M(\beta)|\varphi|$$

对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$ 和任意 $\beta \in \mathbb{R}^+$ 成立.

(B_4) 存在正数 K_1, 使得

$$|\varphi(0)| \leqslant K_1|\varphi|$$

对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$ 成立.

Sawano[133] 证明, 如果条件 $(B_1) \sim (B_4)$ 成立且存在连续函数 $n(t)$, 使得对任意 $(t,\varphi),(t,\psi) \in \Omega$ 有

$$|f(t,\varphi) - f(t,\psi)| \leqslant n(t)|\varphi - \psi|, \tag{1.1.2}$$

则 (1.1.1) 的初值解是唯一的, 并且初值解对初始条件具有连续相依性.

1978 年, 在 Hale 和 Kato[71] 共同确立相空间基本理论的同时, Kato 引入了“容许空间” 的概念, 并应用其研究了无穷时滞泛函微分方程的稳定性. 近年来, 容许相空间的概念被广泛接受, 在无限时滞泛函微分方程的研究中发挥了重要作用.

定义 1.1.1　设 $(\mathscr{B},|\cdot|)$ 为线性赋范空间且满足条件 $(B_1),(B_4)$. 若存在定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的非负连续函数 $K(s),M(s)$, 使得对任意的 $t \in [\sigma,A]$, $x_\sigma \in \mathscr{B}$, 均有

$$|x_t| \leqslant K(t-\sigma)\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x(s)| + M(t-\sigma)|x_\sigma|, \quad t \geqslant \sigma, \tag{1.1.3}$$

则称 $\mathscr{B}$ 为容许相空间.

定义 1.1.2　如果相空间 $\mathscr{B}$ 为容许的, $K(s) \equiv K$ 为常数且函数 $M(s)$ 满足

$$\lim_{s\to+\infty} M(s) = 0, \tag{1.1.4}$$

则称相空间 $\mathscr{B}$ 具有衰减记忆.

例 1.1.1　设 $\mathscr{C} = C(\mathbb{R}^-,\mathbb{R}^n)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^-$ 上的连续函数所构成的线性空间. 对任意实常数 $\gamma \in \mathbb{R}$, 定义

$$C_\gamma = \left\{\varphi \in \mathscr{C} \,\middle|\, \lim_{\theta\to-\infty} \mathrm{e}^{\gamma\theta}\varphi(\theta) \text{ 在 } \mathbb{R}^n \text{ 中存在}\right\}$$

且

$$|\varphi|_\gamma = \sup_{-\infty<\theta\leqslant 0} \mathrm{e}^{\gamma\theta}|\varphi(\theta)|, \quad \varphi \in C_\gamma,$$

则 $(C_\gamma,|\cdot|_\gamma)$ 是容许空间, 其中,

$$K_1 = 1, \quad K(t) = \max\{1, \mathrm{e}^{-\gamma t}\}, \quad M(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

此外, 此空间还具有很好的性质. 对 $\varphi \in C_\gamma$, 定义函数

$$u(s) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{\gamma s}{1+s}\right\}\varphi\left(\dfrac{s}{1+s}\right), & -1 < s \leqslant 0, \\ \lim\limits_{\theta\to-\infty} \mathrm{e}^{\gamma\theta}\varphi(\theta), & s = -1, \end{cases}$$

则 $u \in C([-1,0],\mathbb{R}^n)$. 变换

$$\mathcal{L}: C_\gamma \to C([-1,0],\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{L}(\varphi) = u, \quad \varphi \in C_\gamma$$

是从 C_γ 到 $C([-1,0],\mathbb{R}^n)$ 的等距同构.

1.2 相空间的衰减记忆与泛函微分方程解的稳定性

设 Ω 是 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 中的开集, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是给定的连续泛函且 $f(t,0)\equiv 0$. 考虑如下泛函微分方程:

$$x'(t)=f(t,x_t). \tag{1.2.1}$$

定义 1.2.1 如果对任意 $\varepsilon>0$ 和任意 $\sigma\geqslant 0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon,\sigma)>0$, 使得只要 $|\varphi|<\delta$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)|<\varepsilon(|x_t(\sigma,\varphi)|<\varepsilon), t\geqslant\sigma$, 则称 (1.2.1) 的零解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$稳定 ($\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$ 稳定) 的. 如果此外, 对任意 $\sigma\geqslant 0$, 还存在 $\delta_0=\delta_0(\sigma)>0$ 和 $\varepsilon>0$ 的函数 $T=T(\sigma,\varepsilon)$, 使得只要 $|\varphi|<\delta_0, t\geqslant\sigma+T$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)|<\varepsilon$ ($|x_t(\sigma,\varphi)|<\varepsilon$), 则称 (1.2.1) 的零解为 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定 ($\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$渐近稳定) 的. 如果 δ,δ_0 和 T 都与 σ 无关, 则分别称零解是一致稳定和一致渐近稳定的.

定义 1.2.2 连续函数 $W(r):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 称为楔函数, 如果 $W(r)$ 严格增加,$W(0)=0$, $\lim\limits_{r\to+\infty}W(r)=+\infty$.

1956 年, 对于具有有限时滞的滞后型泛函微分方程 (retarded functional differential equation, RFDE), Krasovskii 得到了下面关于其零解一致渐近稳定的经典结果:

定理 1.2.1 [98] 设 $V:\mathbb{R}^+\times\mathscr{B}\to\mathbb{R}^+$ 是连续的且满足

(i) $W_1(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant W_2(|\varphi|^{\mathscr{B}})$,

(ii) $V'_{(1.2.1)}(t,\varphi)\leqslant -W_3(|\varphi(0)|)$,

(iii) 当 φ 有界时,$f(t,\varphi)$ 有界,

则方程 (1.2.1) 的零解是一致渐近稳定的, 其中,

$$\mathscr{B}=C([-h,0],\mathbb{R}^n),\quad |\varphi|^{\mathscr{B}}=\sup_{-h\leqslant s\leqslant 0}|\varphi(s)|,$$

h 为时滞, W_1,W_2,W_3 都是楔函数.

条件 (iii) 意味着对任意 $\mathscr{B}$ 中的有界集 D, 存在着常数 L_D, 使得对任意 $\varphi\in D$ 和任意 $t\in\mathbb{R}^+$, $|f(t,\varphi)|\leqslant L_D$ 成立.

对于具有无限时滞的 RFDE, 其零解的一致渐近稳定性非常复杂. 为了用 Lyapunov 第二方法研究 (1.2.1) 的零解的一致渐近稳定性, 通常需要找到一个 Lyapunov 泛函 $V(t,\varphi)$ 满足

$$W_1(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant W_2(|\varphi|). \tag{1.2.2}$$

1983 年, Burton[17] 提出了一个著名的猜想: 如果 (1.2.2) 成立且有

$$V'_{(1.2.1)}(t,x_t)\leqslant -W_3(|x(t)|), \tag{1.2.3}$$

则 (1.2.1) 的零解是一致渐近稳定的 (若 $\mathscr{B} = BC$), 这里 W_1, W_2, W_3 都是楔函数, $BC \subset \mathscr{C}$ 表示定义在 $\mathbb{R}^-$ 上的有界连续函数所构成的线性空间, 并赋予上确界范数. 这个公开问题至今尚未解决.

文献 [17] 首次在 (1.2.3) 中引入 $W'_{(1.2.1)}(|x(t)|)$, 即

$$V'_{(1.2.1)}(t, x_t) \leqslant -W_3(|x(t)|) - |W'_{(1.2.1)}(|x(t)|)|, \tag{1.2.4}$$

其中, W 是楔函数, 若 $\mathscr{B} = BC$, 则可以证明 (1.2.1) 的零解是一致渐近稳定的, 但需要 V 泛函是一致健忘的[17].

文献 [150] 指出, BC 空间不是容许相空间, 也不具有衰减记忆性质, 因而在许多问题的研究中, BC 空间不便于应用. 本节将在具衰减记忆的容许相空间中, 证明 (1.2.2) 和 (1.2.4) 可以保证 (1.2.1) 的零解是一致渐近稳定的, 并且不需要 V 泛函的一致健忘性, 这在应用中更为方便. 本节总设 $\mathscr{B}$ 是具有衰减记忆的容许相空间.

定理 1.2.2　*设存在泛函 $V(t, \varphi) : \mathbb{R}^+ \times \mathscr{B} \to \mathbb{R}^+$ 及楔函数 $W_i(r)$, $i = 1, 2, 3$, $W(r)$, 使得对 (1.2.1) 的任意解 $x(t) = x(\sigma, \varphi)(t), (\sigma, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B$, 有*

(1) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant W_2(|x_t|)$;

(2) $V'_{(1.2.1)}(t, x_t) \leqslant -W_3(|x(t)|) - |W'_{(1.2.1)}(|x(t)|)|$,

则 (1.2.1) 的零解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的.

证明　对任意的 $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{B}$, 由条件 (2) 知, 当 $t \geqslant \sigma$ 时, 有

$$W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant V(\sigma, \varphi) \leqslant W_2(|\varphi|),$$

故

$$|x(t)| \leqslant W_1^{-1}(W_2(|\varphi|)), \quad t \geqslant \sigma. \tag{1.2.5}$$

由 (1.2.5) 知 (1.2.1) 的零解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致稳定的.

若 $\liminf\limits_{t\to\infty} |x(t)| = a' > 0$, 则存在 $b > \sigma$, 当 $t \geqslant b$ 时有 $|x(t)| > \dfrac{a'}{2}$, 从而有

$$V'_{(1.2.1)}(t, x_t) \leqslant -W_3\left(\frac{a'}{2}\right), \quad t \geqslant b.$$

由此得

$$V(t, x_t) \leqslant V(b, x_b) - W_3\left(\frac{a'}{2}\right)(t - b), \quad t \geqslant b. \tag{1.2.6}$$

(1.2.6) 表明, 当 $t \to +\infty$ 时, $V(t, x_t) \to -\infty$, 这与条件 (1) 矛盾, 故有

$$\liminf_{t\to\infty} |x(t)| = 0. \tag{1.2.7}$$

若 $\limsup\limits_{t\to\infty} |x(t)| = a'' > 0$. 由 (1.2.7) 存在点列

$$\sigma < t_1 < t'_1 < t_2 < t'_2 < \cdots < t_n < t'_n < \cdots, \quad t_n \to \infty$$