



数学(理)



丛书主编 李瑞坤

学法导航

高中总复习(第2轮)

CHENG LIN

学生用书



首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS



XUEHAI DAOHANG

学海导航

学生用书

高中总复习(第2轮)

数学(理)

- | | | | |
|--------|-----|-----|-----|
| ◇ 丛书主编 | 李瑞坤 | | |
| ◇ 编者 | 刘义军 | 沈跃辉 | 孙仕林 |
| | 贺斌 | 刘建文 | 胡军 |
| | 李健阳 | 罗新辉 | 姜义军 |
| | 罗健清 | 易正为 | 袁兵 |
| | 刘兵华 | 罗建华 | 文先哲 |
| | 杨艳华 | 张建敏 | 王克进 |
| | 杜少红 | 胡国鹏 | 李生红 |
| | 谢兵 | | |
| ◇ 本书策划 | 江小青 | | |



首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

学海导航·高中总复习·第2轮·理科数学 / 李瑞坤主编.
北京:首都师范大学出版社,2008.10
ISBN 978-7-81119-405-0

I. 学… II. 李… III. 数学课—高中—升学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 165068 号

学海导航·高中总复习(第2轮)

数学(理)·学生用书

丛书主编 李瑞坤

责任编辑 张雁冰

装帧设计 张腾红

责任校对 江小青

首都师范大学出版社出版发行

地 址 北京西三环北路 105 号

邮 编 100048

网 址 cnuph.com.cn

E-mail master@cnuph.com.cn

湘潭市风帆印务有限公司印刷

全国新华书店发行

版 次 2008 年 11 月第 1 版

印 次 2008 年 11 月第 1 次印刷

开 本 850 × 1168 毫米 1/16

印 张 11

字 数 317 千

定 价 23.00 元

版权所有 违者必究

如有质量问题 请与出版社联系退换



XUEHAI PUBLISHING

学海月报 前言

PREFACE

数学是难学的,为什么难学呢?因为数学抽象,抽象的东西让人难以想象。抽象是数学美的所在,正因为它抽象,使之成为自然科学的统领。一个简单的数学式,可以包罗万象。比如说, $Z=xy$, x 为商品的单价, y 为商品的数量, Z 就成为商品的总价; x 为运动的时间, y 为运动的速度, Z 就成为运动的路程; x 为物体的加速度, y 为物体的质量, Z 就为作用于物体的合力等等。数学是简单的,正因为简单,所以更不简单。

学习数学,就是学习解题吗?对,但又不全对。学习数学不能不去解题,但解题并不是数学的全部。学习数学更要学习数学中蕴含的数学思想,体会数学的对称美、简洁美、曲线美等,感受数学的博大与精深。因此,我们在学习数学时不在于多解题,而在于精解题,在于解题后的总结、反思、提炼与拓展。

基于上面的话题,本书分专题按课时编写,由一批从事教学一线的特、高级教师倾心打造,他们通过自己多年教学的积淀,仔细推敲《考试大纲》和《考试大纲的说明》(数学科),认真分析近几年全国各地高考试题(尤其是2008年湖南卷),根据命题特点和规律,并对2009年的高考进行了预测。在编写过程中,通过精选切合本课时内容的高考题,对知识和方法进行精要的概括,让读者通过对问题的探究,从中领会基本的数学知识和方法,感悟数学美之所在,在享受中提升数学理念和思想;通过典型例题的剖析,将主要知识、方法、技巧和数学思想结合,以期培养学生的思维能力和迁移能力,提炼解题规律,掌握常规、常法,逐步培养学生的数学思想;通过一定的变式练习、反馈练习,达到基础与能力、方法与技巧并重的目的,全面落实高考要求。

亲爱的读者,如果您潜心研究该书,并细心去读、去品味,您一定会发现它的价值所在,它也许会成为您学习中的指路明灯,照亮您朝着理想的高考目标奋进的道路!

由于时间仓促,在编写过程中,可能会出现一定差错,敬请您谅解,愿本书能给冲刺高考的同学们带来学习的快乐。

编者



学生用书 目录

CONTENTS

1 专题1 函数、导数与不等式

- 第1课时 集合、函数的图象与性质 2
第2课时 基本初等函数的性质与应用 3
第3课时 三个“二次”及其应用 4
第4课时 导数及其综合应用 5

7 专题2 数列与极限

- 第5课时 等差、等比数列 8
第6课时 简单递推数列与数列求和 10
第7课时 数学归纳法与极限 12
第8课时 函数、数列、导数综合运用 14

16 专题3 三角函数与向量

- 第9课时 三角函数的图象和性质 17
第10课时 三角形中的三角函数问题 19
第11课时 向量及三角函数与向量综合 22

23 专题4 解析几何

- 第12课时 线性规划、直线与圆 24
第13课时 圆锥曲线主干知识综合 25
第14课时 直线与圆锥曲线的位置关系 27
第15课时 曲线方程与轨迹问题 28
第16课时 圆锥曲线背景下的综合问题 30

32 专题5 立体几何

- 第17课时 点、线、面的位置关系 33
第18课时 空间的角与距离(一) 35
第19课时 空间的角与距离(二) 37
第20课时 简单多面体、球与组合体 39

41 专题6 概率、统计

- 第21课时 排列、组合与二项式定理 42
第22课时 概率及其求法 44
第23课时 概率与统计应用(一) 46

24 课时 概率与统计应用(二) 48

50 专题7 应用性问题

- 第25课时 函数、不等式模型应用题 51
第26课时 数列模型应用题 54
第27课时 几何模型应用题 57

59 专题8 客观题解法

- 第28课时 选择题的解题策略(一) 60
第29课时 选择题的解题策略(二) 62
第30课时 填空题的解题策略 64

66 专题9 数学思想专题复习

- 第31课时 函数与方程思想的题型与方法 67
第32课时 数形结合思想在解题中的应用 70
第33课时 化归与转化思想在解题中的应用 72
第34课时 分类讨论思想在解题中的应用 75

附:

- 小题训练 77~140
专题检测卷(一) 141
专题检测卷(二) 145
专题检测卷(三) 149
专题检测卷(四) 153
专题检测卷(五) 157
专题检测卷(六) 161
综合检测卷(一) 165
综合检测卷(二) 169

专题1

函数、导数与不等式

2008高考试题研究

函数、不等式和导数是近几年高考的重点考查内容,从2008年全国各地的19套高考试题来看,除上海、四川、陕西卷外,考查的分值都在30分以上,特别是山东、江苏、辽宁卷达到了40分以上。从题型分布上来看,大多是4个小题、1个大题,还有一个结合其他知识点考查的试题。这些试题设计新颖、灵活,命题手法、设问角度不断创新,稳中求变。有对定义、基本题型的考查,也有对性质、题型的深入挖掘和灵活应用,创设新情境,引用新定义。从考查知识点看,小题注重基础知识,强调通性通法,主要是考查函数的概念、性质和图象,大题注重综合运用,大多以函数为载体,采用导数等方法求解。另外,高考试题对集合的运算,充要条件以及反函数的考查频率极高,函数应用题较少考查,而函数的性质及图象、导数的应用,则是每卷必考。

湖南自主命题近三年来,对集合、函数、导数的考查,具体题号、内容及分值如下表:

	2006年	2007年	2008年
考查内容	1 定义域	3 充要条件	2 二次函数、绝对值不等式
	4 充要条件、单调性	8 函数图象	10 值域
	8 集合、导数	10 集合(信息题)	13 反函数及图象
	19 数列、导数	13 指数、对数的运算	14 定义域
	20 函数、不等式的应用	14 集合与解析几何	18 数列、不等式
		21 函数极值及综合应用	21 导数、不等式
分值	35分	38分	38分

2009高考预测

根据2008年全国各地高考试题,结合我省近三年的命题情况,估计我省2009年高考数学对本讲内容考查相对稳定,分值、题量和难度变化不大,更注重基础、深化性质,而导数的应用会进一步加强,今年不等式的考查有所加强,明年可能还会延续。

第1课时 集合、函数的图象与性质



知识梳理

有关集合与简易逻辑的试题可分为两类:一类是有关集合、充要条件和命题本身的基础题,这类试题多以选择题、填空题的形式出现;另一类是集合、充要条件、命题与其他知识的综合题,这类试题中,应注意转换和反证法的使用,这两种方法是近几年的高考热点.函数性质和图象是高考考查的重点,近几年不会改变.因此,要在函数不等式和导数等知识的交汇点设置试题重点训练,同时让学生掌握数形结合、函数方程等思想方法.



高考速递

1. [2008·湖南卷] 设函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$, 且函数 $y=x-f(x)$ 的图象过点 $(1,2)$, 则函数 $y=f^{-1}(x)-x$ 的图象一定过点_____.

2. [2008·湖南卷] 已知函数 $y=f(x)=\frac{\sqrt{3-ax}}{a-1} (a \neq 1)$.

(1)若 $a>0$, 则 $f(x)$ 的定义域是_____;

(2)若 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围是_____.



典例精析

例1 [2008·北京卷] “函数 $f(x) (x \in \mathbb{R})$ 存在反函数”是“函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件

►变式训练 设函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称, 且存在反函数 $f^{-1}(x)$, $f(4)=0$, 则 $f^{-1}(4)=$ _____.

例2 求函数 $y=\sqrt{2x^2-1}-x$ 的值域.

►变式训练 对定义域分别是 D_1, D_2 的函数 $y=f(x)$,

$$y=g(x), \text{ 规定: 函数 } h(x)=\begin{cases} f(x) \cdot g(x), & \text{当 } x \in D_1 \text{ 且 } x \in D_2 \\ f(x), & \text{当 } x \in D_1 \text{ 且 } x \notin D_2 \\ g(x), & \text{当 } x \notin D_1 \text{ 且 } x \in D_2 \end{cases}$$

(1)若函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}, g(x)=x^2$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;

(2)求问题(1)中函数 $h(x)$ 的值域;

(3)若 $g(x)=f(x+a)$, 其中 a 是常数, 且 $a \in [0, \pi]$, 请设计一个定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $y=f(x)$, 及一个 a 的值, 使得 $h(x)=\cos x$, 并予以证明.



第2课时 基本初等函数的性质与应用



知识梳理

1. 指数函数、对数函数是初等函数中比较重要的两类函数,近年来高考命题主要考查指数函数、对数函数的性质及图象的应用,或利用它们来研究复合函数的单调性、奇偶性等;

2. 抽象函数因为求解方法的多样性而呈现很强的综合性,解题大致从三个方面入手:①构造函数模型,进行类比猜想、引路探索;②利用对应性质等进行转化;③利用赋值、特殊化、数形结合等方法解决问题.



高考速递

1. (2008·全国卷Ⅱ)若 $x \in (e^{-1}, 1)$, $a = \ln x$, $b = 2\ln x$, $c = \ln^2 x$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$
C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

2. (2008·辽宁卷)设 $f(x)$ 是连续的偶函数,且当 $x > 0$ 时,

$f(x)$ 是单调函数,则满足 $f(x) = f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和

为 ()

- A. -3 B. 3
C. -8 D. 8



典例精析

例1 (2008·陕西卷)定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), $f(1) = 2$, 则 $f(-3)$ 等于 ()

- A. 2 B. 3
C. 6 D. 9

例2 (2008·安徽卷)若函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数、偶函数,且满足 $f(x) - g(x) = e^x$, 则有 ()

- A. $f(2) < f(3) < g(0)$ B. $g(0) < f(3) < f(2)$
C. $f(2) < g(0) < f(3)$ D. $g(0) < f(2) < f(3)$

例2 已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{1-mx}{x-1}$ 是奇函数 ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 求出 m 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性并加以证明;

例3 已知函数 $f(x) = \log_2(1+x) + a \log_2(1-x)$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称,求 a 的值;

(2) 在(1)的条件下,解关于 x 的不等式: $f^{-1}(x) > m$ ($m \in \mathbb{R}$).



第3课时 三个“二次”及其应用



知识梳理

1. 近几年来高考有关二次函数试题主要分两种类型,一种是考查二次函数的基础知识(给出了模型);另一种通过构造二次函数把实际问题转化为二次函数问题(先建模,再解模);

2. 二次函数、二次方程、二次不等式的结合,涉及到根的分布,求变量的范围及恒成立的问题,注意它们之间的联系与转化.



高考速递

- (2008·浙江卷)已知 t 为常数,函数 $y = |x^2 - 2x - t|$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值为 2, 则 $t =$ _____.
- (2008·湖北卷)已知 $f(x) = x^2 + 2x + a$, $f(bx) = 9x^2 - 6x + 2$, 其中 $x \in \mathbb{R}$, a, b 为常数, 则方程 $f(ax + b) = 0$ 的解集为 _____.



典例精析

例 1 (2008·江西卷)已知函数 $f(x) = 2mx^2 - 2(4-m) \cdot x + 1$, $g(x) = mx$, 若对于任一实数 x , $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(0, 2)$ B. $(0, 8)$
C. $(2, 8)$ D. $(-\infty, 0)$

►变式训练 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x} + b$ ($x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq 0$), 若实数 a, b 使得 $f(x) = 0$ 有实根, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{4}$
C. 1 D. 2

例 2 (2007·湖北卷)设二次函数 $f(x) = x^2 + ax + a$, 方程 $f(x) - x = 0$ 的两根 x_1 和 x_2 满足 $0 < x_1 < x_2 < 1$.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 试比较 $f(0) \cdot f(1) - f(0)$ 与 $\frac{1}{16}$ 的大小, 并说明理由.

►变式训练 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$ 且 $b \neq 0$),

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ -f(x) & (x < 0) \end{cases}$$

(1) 若 $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, 且函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 求 $F(2) + F(-2)$ 的值;

(2) 令 $g(x) = 2ax + b$, 若 $g(1) = 0$, 又 $f(x)$ 的图象在 x 轴上截得的弦的长度为 l , 且 $0 < l \leq 2$, 试确定 $c - b$ 的符号.



第4课时 导数及其综合应用

知识梳理

1. 理解导数的概念, 会用定义和公式求已知函数的导数;
2. 会用导数工具研究函数的单调区间和极值(最值), 并能以此讨论函数的其他方面的性质;
3. 能运用导数工具解实际应用题, 对不等式有关问题, 能通过函数观点, 借助于导数工具进行处理.

高考速递

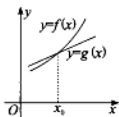
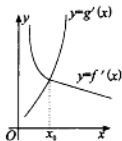
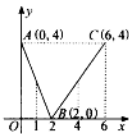
1. (2008·北京卷) 如图, 函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC , 其中 A 、 B 、 C 的坐标分别是 $(0, 4)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(6, 4)$, 则 $f[f(0)] = \underline{\hspace{2cm}}$;

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}};$$

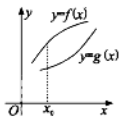
加设一问:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

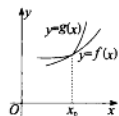
2. (2008·福建卷) 已知函数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 的导函数的图象如下图所示, 那么 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 的图象可能是 ()



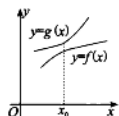
A



B



C



D

典例精析

例1 (2008·东北三校模拟卷) 已知函数 $y=f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内可导, 若 $f(x)=f(2-x)$, 且当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $(x-1)f'(x) < 0$, 设 $a=f(0)$, $b=f(\frac{1}{2})$, $c=f(3)$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$
C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

变式训练 关于函数 $f(x)=(2x-x^2)e^x$, 给出下列命题:

- ① $f(x) > 0$ 的解集为 $\{x | 0 < x < 2\}$;
 - ② $f(-\sqrt{2})$ 是极小值, $f(\sqrt{2})$ 是极大值;
 - ③ $f(x)$ 没有最小值也没有最大值;
 - ④ $f(x)$ 有最大值, 没有最小值.
- 其中判断正确的是 .

例2 (2008·陕西卷) 已知函数 $f(x) = \frac{kx+1}{x^2+c}$ ($c > 0$ 且 $c \neq 1, k \in \mathbf{R}$), 恰有一个极大值点和一个极小值点, 其中一个点是 $x=-c$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的另一个极值点;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的极大值 M 和极小值 m , 并求 $M-m \geq 1$ 时 k 的取值范围.



►变式训练 设 $k \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & (x < 1) \\ -\sqrt{x-1} & (x \geq 1) \end{cases}$,

$F(x) = f(x) - kx, x \in \mathbf{R}$, 试讨论函数 $F(x)$ 的单调性.



专题 2

数列与极限

2008高考试题研究

2008年高考试题整体贯彻了“总体保持稳定,深化能力立意,积极改革创新”的指导思想,在强调积极深化改革、全面推进新标的方向上指导了中学数学继续稳步向前推进素质教育。试题在保持连续稳定继承历年特点的同时,又注重了改革创新,既注重了对基础知识重点考查,也注重了对能力的考查。从考生的反映看试题难度,题目偏难,计算大,从而印证了加强计算能力的考查要求,有较好的梯度和区分度,有利于高考选拔。坚持重点内容重点考,考潜能,考数学应用,在“知识的交叉处命题”,且没有片面追求知识及基本思想方法的覆盖面,反映了新课程的理念,试卷注重对常规数学思想方法及通性通法的考查,注重认识能力的考查,注重创新意识,新中求活,活力凸显能力。

一、试卷结构保持稳定

	2006年	2007年	2008年
考查内容	2 求等比数列极限 19 数学归纳法、利用导数证明不等式	15 数列推断题 21 前 n 项和与等 n 项关系、特值法求特定字母的值、利用导数证明函数单调性	18 求数列通项公式(分段函数)、错位相减法求前 n 项和、数学归纳法证明
分值	19 分	18 分	12 分

而且近三年全国各省市高考试题中,只有2007年宁夏/海南卷没有解答题,其余都有。

二、突出主干知识,强化数学思想方法

2008年像往年一样,继续贯彻了《考试大纲》和《考试大纲的说明》(数学科),指出“重点知识是支撑学科知识体系的主要内容,考查时要保持较高的比例,并达到必要的深度,构成数学试题的主体”的命题指导思想,代数学着重考查函数、数列、不等式、三角函数,这四者恰好全部综合在18题中,凸显了分类讨论思想、化归转化思想,数列这个知识的交汇点,有效地检测了考生对中学数学知识中所蕴涵的数学思想和方法的掌握程度。

三、注重数学应用和创新意识的考查

从上面试卷结构分析可看出,一般把数列的基本知识与方法融入了填空题的最后一题,即第15题,以创新、推理的形式出现,而解答题逐步加大了综合的趋势。2007年考查了递推关系、特值思想、不等式,运用了两次求导来判断函数单调性,是三年以来最难的,故出现在压轴题中。2006年考查了数学归纳法以及构造辅助函数,运用导数判断其单调性来证明不等式。

四、继续保持文、理差别

近几年文、理科的走势基本一致,但从难度看,文科明显低于理科,不过考查的知识点、思想方法还是相同的。

2009高考预测

2006年到2008年高考试题遵照高考《考试大纲》和《考试大纲的说明》(数学科)的要求,从题型设置、考察知识的范围等方面基本保持稳定,试题综合性愈来愈强,要求逐渐偏高,试题难度较大,只有在基本概念、基本技能和基本方法等数学基础知识扎实掌握后才能对学科的内在联系、知识的综合运用达到较熟练的程度。2009年的高考试题,在保持稳定的基础上不会有太大的变化,数列部分依然是函数、三角函数、导数、不等式的综合,继续考查分类讨论、化归、函数与方程等数学思想。

第5课时 等差、等比数列



知识梳理

根据近几年高考的特点,在复习时注重以下几个方面:

1. 注重函数思想在解决数列问题中的灵活运用

因为数列是以正整数(或它的有限子集)为定义域的特殊函数,因而命题时常常以数列为载体,把函数思想寓于其中,来考查学生的思维能力、运算能力以及信息迁移能力.

2. 注重方程思想的应用

等差、等比数列的通项公式,前 n 项和公式联系着五个量 a_1, d (或 q), n, a_n, S_n , “知三求二”是最基本的方程思想.

3. 注重整体思想的运用

等差、等比数列的性质是等差、等比数列的概念、通项公式、前 n 项和公式的引申,应用其性质解题,往往可以回避求其首项和公差或公比,使问题得到整体解决,能够使运算达到灵活、便捷,故一直受到重视,高考中也重点考查这部分内容.

4. 注重等价转化思想的运用

“转化”是一种极其重要的数学思想与方法,蕴涵在数学知识发生、发展和应用的全过程,因此对它的考查是能力考查的必由之路.本章中的“转化”主要是将一些不熟悉的数列转化为熟悉的等差数列和等比数列,以及利用函数思想将数列、方程和不等式进行相互转化.由于转化具有一定的技巧性和综合性,故复习时同学们应格外重视.

5. 注重类比思想的运用

等差、等比数列有着密切的内在联系又有明显的区别,若能根据它们的异同点,抓住其本质特征,利用类比思想处理,不但能起到温故而知新的效果,而且使知识系统化、网络化,形成优化的知识结构.



高考速递

1. (2006·湖南卷)若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{1}{3}$, 且对任意正整数 m, n 都有 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$
C. $\frac{3}{2}$ D. 2

2. (2008·北京卷)已知数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $p, q \in \mathbb{N}^+$ 满足:

$a_{p+q} = a_p + a_q$, 且 $a_2 = -6$, 那么 a_{10} 等于 ()

- A. -165 B. -33
C. -30 D. -21



典例精析

例1 (2008·安徽卷)在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 4n - \frac{5}{2}$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = an^2 + bn$ ($n \in \mathbb{N}^+$), 其中 a, b 为常数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ 的值为 _____.

►变式训练 已知整数数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_4 = 32, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n}$, 把数列 $\{a_n\}$ 的各项排成如图的三角形状, 记 $A(m, n)$ 为第 m 行从左起第 n 个数, 则 $A(12, 5) =$ _____.

a_1
a_2 a_3 a_4
a_5 a_6 a_7 a_8 a_9
...

例2 (2008·湖南卷)数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = (1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2})a_n + \sin^2 \frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

(1) 求 a_3, a_4 , 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, 证明: 当 $n \geq 6$ 时,

$$|S_n - 2| < \frac{1}{n}.$$



►变式训练 已知函数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n (n \in \mathbb{N}^+)$, 且 $y = f(x)$ 的图象过点 $(1, n^2)$, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 n 为奇数时, 设 $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, 是否存在自然数 m 和 M 使得不等式 $m < g(\frac{1}{2}) < M$ 恒成立? 若存在, 求出 $M - m$ 的最小值; 若不存在, 请说明理由.



第6课时 简单递推数列与数列求和



知识梳理

用递推关系式和初始条件可确定一个无穷数列,我们熟悉的等差数列和等比数列都是用这个方法给出定义,然后导出通项公式,进而讨论其性质和应用.在运用数列的知识解决实际问题时,数列模型的建立通常也采用这个方法,即首先求数列的首项或前几项,其次找出递推关系写出递推公式,进而求出通项或研究其性质,并且递推公式常与数列的前 n 项和 S_n 及第 n 项 a_n 紧密联系.在近几年全国各省市使用的数学试题中,几乎每套都少不了数列解答题,而且题目中给出的数列,超过半数以上采用了递推公式和初始条件的方法,有的是要求求通项,有的是不必求通项,而是讨论所给数列的性质.



高考速递

1. (2008·江西卷)在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2, a_{n+1}=a_n+\ln(1+\frac{1}{n})$,则 $a_n=$ ()
A. $2+\ln n$ B. $2+(n-1)\ln n$
C. $2+n\ln n$ D. $1+n+\ln n$
2. (2008·北京卷)若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-10n$ ($n=1,2,3,\dots$),则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____,
数列 $\{na_n\}$ 中数值最小的项是第_____项.



典例精析

例1 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_{n+3}=$

$$\frac{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}}{a_n a_{n+1} a_{n+2}-1}, \text{ 则 } a_{2008} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- A. 4 B. 2
C. 1 D. 以上都不对

►变式训练 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=\frac{2}{3}$, 且 a_{n-1}

$$a_n+a_{n+1}a_n-2a_{n-1}a_{n+1}=0(n\geq 2), \text{ 则 } a_1 \text{ 等于 } \underline{\hspace{2cm}} \quad ()$$

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{15}{8}$

例2 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=a, a_{n+1}=b \cdot a_n + c$ ($n \in \mathbb{N}^+$), $a_n, b, c \in \mathbb{R}$, 求通项 a_n .



►变式训练 (2008·天津卷)在数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中, $a_1 =$

$1, b_1 = 4$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $nS_{n+1} - (n+3)S_n = 0$,

$2a_{n+1}$ 为 b_n 与 b_{n+1} 的等比中项, $n \in \mathbb{N}^+$.

(1)求 a_2, b_2 的值;

(2)求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(3)设 $T_n = (-1)^{n+1}b_1 + (-1)^{n+2}b_2 + \cdots + (-1)^{2n}b_n, n \in \mathbb{N}^+$, 证明: $|T_n| < 2n^2, n \geq 3$.

第7课时 数学归纳法与极限



知识梳理

数列的极限是对公比的绝对值小于1的无穷等比数列而言的,其和 $S = \frac{a_1}{1-q}$ ($|q| < 1$). 在使用数列极限的运算法则时,必须注意两点:(1)参与运算的每一个数列的极限都是存在的;(2)参与运算的数列的个数必须是有限个;

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须同时具备以下三个条件:

(1)函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有定义;(2)函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有极限;(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

用数学归纳法证明命题的具体步骤是:(1)证明当 n 取第一个值 n_0 (例如 $n_0 = 1, n_0 = 2$ 等)时结论正确;(2)假设当 $n = k$ ($k \in \mathbf{N}$, 且 $k \geq n_0$) 时结论正确,证明当 $n = k+1$ 时结论正确. 在完成了这两个步骤以后就可以断定命题从 n_0 开始的所有自然数 n 都正确. 以上第一步是递推基础,第二步是递推的依据,缺一不可,关键在第二步,即在假设 $n = k$ 时命题成立,推出 $n = k+1$ 时命题也成立. 要顺利完成这一步主要依赖于观察、归纳、恒等变形等方面的能力,而且必须运用到“归纳假设”,否则不是数学归纳法.



高考速递

1. [2008·天津卷] 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3^{n+1}}$

($n \in \mathbf{N}^+$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____.

2. [2008·重庆卷] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$, 在 x

$= 0$ 处连续, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+1}{a \cdot n^2+n} =$ _____.



典例精析

例1 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, 若 S_n 是前 n 项和, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n a_n}{S_n} =$ _____.

►变式训练 [2007·安徽卷] 已知 $(2\sqrt{x} + \frac{1}{x})^n$ 展开式

的二项式系数和记为 a_n , 展开式的所有项的系数和记为 b_n ,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{a_n - b_n} =$ _____ ()

A. 1 B. -1

C. 2 D. -2

例2 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

(1)证明: $a_n > \sqrt{2n+1}$ 对一切正整数 n 成立;

(2)令 $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 判断 b_n 与 b_{n+1} 的大小并说明理由.