考研微积分
500例

许洪范 编著

KAO YAN WEI

国防工業出版社
National Defense Industry Press

考研微积分500例

许洪范　编著

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

考研微积分500例/许洪范编著.—北京:国防工业出版社,2009.3

ISBN 978-7-118-06163-5

Ⅰ.考... Ⅱ.许... Ⅲ.微积分-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第009355号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本787×1092 1/16 印张19 字数442千字

2009年3月第1版第1次印刷 印数1—4000册 定价32.00元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　言

众所周知,微积分理论对于大学生专业能力形成和科学素质的培养是无以替代的.承载着微积分的高等数学和数学分析,其内容丰富,知识面宽,综合性强.微积分的习题、特别是各类试题的解决往往需要掌握特定的解题方法与技巧,这些技巧与方法虽然植根于基础理论,却不是单纯揣摩概念与定理所能实现的.其实,无论是专业院系还是学生本人,对于数学分析和高等数学课程都是十分重视的.但是,由于种种原因,很多学生在实际的学习过程中未能达到课程的要求,致使其他后续课程的学习障碍很多.特别是有志于报考硕士研究生的同学,数学学习效果的不理想,成为必须弥补的缺憾.因此,"数学分析选讲"、"微积分选讲"等选修课程应运而生.

近年来,数学教学上的矛盾日益突出.一方面,随着现代科技的进步,数学日益渗透到科技发展的各个领域,由此导致理工专业甚至于社会科学的很多学科对学生数学基础的要求越来越高;另一方面,国内的高等学校经历了从精英教育向大众化教育的转轨过程,微积分基础理论教学的实际效果并不理想,分层教学逐步成为必然的选择.大学教育的个性化,不但体现在专业取向广度上的不同,也集中体现在基础理论深度上的差异.特别是有志于专业提高的学生,他们对于加深微积分基础理论的领悟存在着某种渴望,希望自己的专业进取建立在坚实的数学基础之上.

目前大学数学教学的一般趋势为:基础课教学立足于基本知识的"够用为度",对于那些学有余力且不满足于对微积分只做一般性了解的学生,对于那些有志报考硕士研究生的同学,另行开设数学分析选讲(或微积分选讲)来完成基础知识之后的教学,是理所当然的.本书就是面向这些同学编写的,它在一定程度上相当于一本考研的辅导教材.

客观地说,即使报考的是非数学专业的研究生,仅限于完成本科教学计划中高等数学知识水平的学习显然是不够的.其实,这并不是因为教科书的知识太浅,而是课程教学基本目标所决定的.例如,你在读高中的时候,前两年就已经学完了教学大纲所规定的基础知识,在高考前一年的时间内,所有应届考生都将大量地演练习题,进行各类的模拟训练.如果高中学生只满足于课本知识的一般性理解就面对高考,这是很难想象的.大学的学生,在高等数学和数学分析之后的继续学习,其意义等同于此.

实践是提高解题水平的必由之路,这是非常浅显的道理,除此之外并没有什么捷径可走.

《考研微积分500例》一书面向的是初步掌握微积分基本知识的读者,全书共有17个专题,涵盖了初等微积分的全部内容。在每个专题内容的开始,只用较小的篇幅来提纲挈领地介绍关键性知识内容.在知识的深度上则尽可能地把握传统教科书所涉及的范围,不在理论观念上做刻意的提升.其余绝大部分的篇幅,用做演练各种类型的证明题和计算题.假如已经初步掌握了微积分的基础,现在希望重新温习知识脉络并且提升自己的解题与证题的水平,或者经历了数学相关专业两年以上的学习,需要巩固数学分析的相关知识,提高应试能力,本书将成为你的助手和朋友,结交这个朋友是你无悔的选择.

本书可以作为数学分析(或微积分)选讲的教材,也作为参考资料推荐给因报考硕士研究生需要参加数学分析或者高等数学(一)考试的朋友.书中带有"(08)"、"(07)"、……、"(97)"标记的例题,是1997年以来不同年度的全国硕士研究生入学考试《高等数学(一)》的原题;标有"*"标记的例题,则是国内部分院校研究生数学分析入学考试的原题.为了方便课外阅读,在例题编排的次序上,尽量保持了与知识进程的协调性.那些需要综合知识来解决的例题,多出现在各章节比较靠后的位置.对于报考非数学专业的读者,可以跳过其中理论性过强的证明题,适当侧重于计算类型题.本书仅限于微积分的知识与习题,并不涉及线性代数和概率论与数理统计等方面的内容.

限于作者的水平,本书缺点与失误在所难免,欢迎广大读者批评指正.

编著者

2009年1月

目 录

1 函数基本知识

微积分的研究对象是函数．中学阶段已经学习了函数的一些基本知识，这一部分内容的要求略高于中学所学习的知识.

1－1 函数的概念

函数关系是指从一个变量到另一变量的对应，即

$$f:x\to y;$$

也可以理解为从数集 A 到数集 B 的映射

$$f:A\mapsto B.$$

其中数集 A 是函数 $y=f(x)$ 的定义域；如果 f 是满射，则数集 B 是函数 $y=f(x)$ 的值域.

如果 f 是从数集 A 到数集 B 的一一映射，则存在从数集 B 到数集 A 的反射.

$$f^{-1}:B\mapsto A.$$

此时，称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，也称 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.

如果函数 $y=f(u)$ 定义域与函数 $u=\varphi(x)$ 值域的交集不是空集，就称 y 是 x 的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)].$$

其中 u 称为中间变量.

1－2 几种特殊的函数类型

一、单调函数

如果 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$，只要 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内严格递增；

如果 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$，只要 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内严格递减.

上述单调函数的概念也适合于闭区间、无穷区间上定义的函数，以及定义域为自然数集的函数——数列.

二、有界函数

(1)有上界：$\exists$ 常数 M，$\forall x\in I$，恒有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有上界 M；

(2)有下界：$\exists$ 常数 m，$\forall x\in I$，恒有 $f(x)\geqslant m$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有下界 m；

(3)有界：$\exists M>0$，$\forall x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界.

$f(x)$ 在区间 I 有界 $\Leftrightarrow f(x)$ 在区间 I 内有上界且有下界.

三、奇函数与偶函数

如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数；如果恒有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数.

四、周期函数

如果存在常数 $T>0$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，称函数 $f(x)$ 为周期函数. 通常所说的周期一般是指函数 $f(x)$ 的最小周期 T.

五、分段函数

如果函数 $y=f(x)$ 只用一个初等函数式子不能完整表达，当自变量 x 在不同范围变化的时候，其函数关系需要用不同的初等函数式来表示，这样表示的函数称为分段函数. 例如，符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$$

就是一个分段函数.

1－3　初等函数

基本初等函数是指以下六类函数：

(1)常函数 $y=c$（c 为常数）；

(2)幂函数 $y=x^{\alpha}$（$\alpha\neq 0$）；

(3)指数函数 $y=a^{x}$（$a>0, a\neq 1$）；

(4)对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0, a\neq 1$）；

(5)三角函数，$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$；

(6)反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot}x$.

上述基本初等函数的表达式，经过有限次加、减、乘、除及有限次复合得到的函数统称为初等函数.

1－4　例题

例 1　确定函数 $y=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$ 的定义域.

解　解不等式组

$$\begin{cases}2x+1>0\\ 4-3x\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x \leqslant \dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

于是

$$-\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{4}{3},$$

函数的定义域为

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right].$$

注记 ①求函数定义域的问题，一般归结为解不等式组．函数表达式中出现的某些运算符号（如分式、ln、arcsin、$\sqrt{\ }$ 等）是函数定义域受到限制的标志．不等式组中的每个不等式，都是针对这些运算给出的.

②解不等式组与解方程组的不同之处在于只变形，不消元．将每个不等式变形成“最简”形式之后，共同界定的自变量取值范围即为所求.

例 2 如果函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，常数 a 满足 $0 < a < \frac{1}{2}$，则函数 $g(x) = f(x + a) + f(x - a)$ 的定义域为

(A) $[-a, 1-a]$；(B) $[a, 1+a]$；(C) $[a, 1-a]$；(D) $[-a, 1+a]$.

解 选(C)．函数 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a, 1-a]$，$f(x-a)$ 的定义域为 $[a, 1+a]$，所以，$g(x)$ 的定义域为

$$[-a, 1-a] \cap [a, 1+a] = [a, 1-a].$$

注记 函数表达式中每个函数定义域的交集即为所求.

例 3 设函数 $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$，证明 $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

证明 $f(a) + f(b) = \ln\frac{1-a}{1+a} + \ln\frac{1-b}{1+b} = \ln\left(\frac{1-a}{1+a} \cdot \frac{1-b}{1+b}\right) = \ln\frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}$,

$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = \ln\frac{1 - \dfrac{a+b}{1+ab}}{1 + \dfrac{a+b}{1+ab}} = \ln\frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab},$$

所以

$$f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

注记 将函数表达式分别代入左边和右边，整理成相同的形状再进行比较，等式可得到证明.

例 4 求函数 $y = \frac{x+1}{2x-3}$ 的反函数.

解 从原式可得 $y(2x-3) = x+1$，即 $(2y-1)x = 3y+1$，所以，有

$$x=\frac{3y+1}{2y-1}\left(y\neq\frac{1}{2}\right),$$

所求反函数为

$$y=\frac{3x+1}{2x-1}\left(x\neq\frac{1}{2}\right).$$

注记 ①先从已知的函数关系式中解出自变量 x,然后对调表达式中的 x 和 y 即可.

②要注意标注反函数的定义域.

例 5 已知 $f\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=x+6$,求 $f(x)$.

解 设 $y=\frac{x+3}{x+1}$,则 $x=\frac{y-3}{1-y}$. 代入原式,可得

$$f(y)=\frac{y-3}{1-y}+6=\frac{3-5y}{1-y}(y\neq1).$$

由此可知

$$f(x)=\frac{3-5x}{1-x}(x\neq1).$$

注记 为了有助于理解本题的解法要领,先来思考相反过程的一个问题. 假定已知了函数关系式 $f(x)=\frac{3-5x}{1-x}$,求 $f\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=$? 相信你会毫不犹豫地把前一式中的 x 同时替换成 $\frac{x+3}{x+1}$,这便很容易地求得 $f\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=x+6$. 这一解决问题的过程可以理解成:首先根据 $f(x)=\frac{3-5x}{1-x}$ 知道对另一变量 y,也应有 $f(y)=\frac{3-5y}{1-y}$,然后令 $y=\frac{x+3}{x+1}$. 如果把这个过程逆转过来,刚好与例 5 一致.

例 6 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

解 设 $y=x+\frac{1}{x}$,则 $y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$,所以

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

代入原式,可得

$$f(y)=y^2-2.$$

由此可知

$$f(x)=x^2-2.$$

注记 本题的解题技巧在于注意到了 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 与 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ 相差常数 2.

例 7* 设 $f(x)=\begin{cases}-\ln(1+x) & ,x\geqslant0\\ e^{-x}-1 & ,x<0\end{cases}$,证明 $f(f(x))=x$.

证明 (1)当 $x>0$ 时,$f(f(x))=e^{\ln(1+x)}-1=(1+x)-1=x$;

(2)当 $x=0$ 时,$f(f(x))=-\ln[1-\ln(1+0)]=-\ln1=0=x$;

(3)当 $x<0$ 时，$f(f(x))=-\ln[1+(\mathrm{e}^{-x}-1)]=-\ln\mathrm{e}^{-x}=x$.

注记 由于$f(x)$的表达式是分段给出的，容易想到根据不同的情形来证明.

例 8 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有定义，且对任何x,y，$f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明 $F(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)f(x)$是偶函数.

证明 根据题设，$f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)$，所以$f(0)=0$. 于是

$$f(x)+f(-x)=f(0)=0,$$

可见，函数$f(x)$必为奇函数. 再设 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，则

$$g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{a^x-1}+\frac{a^x}{1-a^x}+1=0.$$

可见，$g(x)$也是奇函数. 所以 $F(x)=g(x)\cdot f(x)$是偶函数.

注记 利用关系式$f(x+y)=f(x)+f(y)$证明$f(-x)=-f(x)$，可知函数$f(x)$是奇函数，再注意到$g(x)$也是奇函数，便知两个奇函数的乘积$F(x)$是偶函数.

例 9 设$f(x)$是x的二次函数，且$f(0)=1$，$f(x+1)-f(x)=2x$，求$f(x)$.

解 设$f(x)=ax^2+bx+c$. 由$f(0)=1$可知$c=1$，故$f(x)=ax^2+bx+1$. 令

$$f(x+1)-f(x)=2x,$$

即

$$2ax+a+b=2x.$$

比较系数可知 $a=1$，$b=-1$. 于是

$$f(x)=x^2-x+1.$$

注记 二元函数的一般表达式为$f(x)=ax^2+bx+c$，只须利用已知条件来确定其中的常数a,b,c.

例 10 设函数$y=f(x)$的图像关于直线$x=a$和$x=b\,(a<b)$均对称，证明函数$y=f(x)$是周期函数.

证明 已知函数$y=f(x)$的图像关于直线$x=a$对称，所以对任何x，恒有

$$f(a+x)=f(a-x).$$

同理

$$f(b+x)=f(b-x).$$

所以有

$$\begin{aligned}f(x)&=f[a-(a-x)]=f[a+(a-x)]=f(2a-x)\\&=f[b-(b-2a+x)]=f[b+(b-2a+x)]\\&=f(x+2b-2a).\end{aligned}$$

可见，函数$f(x)$是以$2b-2a$为周期的函数.

注记 如果存在$T>0$，使得$f(x+T)=f(x)$，则$f(x)$是以T为周期的函数.

例 11 证明不存在严格增加的偶函数.

证明 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格增加，则对任意$0<x_1<x_2$，有$-x_1>-x_2$.

于是

$$f(x_1)<f(x_2),f(-x_1)>f(-x_2).$$

所以

$$f(-x_2)<f(-x_1)<f(x_1)<f(x_2).$$

可见,函数$f(x)$不是偶函数.

练 习 题 1

1. 确定函数的定义域:

(1)$y=\sqrt{2+x-x^2}$;　　(2)$y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

(3)$y=\dfrac{1}{|x|-x}$;　　(4)$y=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$;

(5)$y=x^3+e^{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-4}$;　　(6)$y=\sqrt{\cos x}$.

2. 设函数$f(x)$与$g(x)$都在$(-\infty,+\infty)$有定义. 证明:

(1)若$f(x)$与$g(x)$都是偶函数,则$f(x)g(x)$是偶函数;

(2)若$f(x)$与$g(x)$都是奇函数,则$f(x)g(x)$是偶函数;

(3)若$f(x)$是奇函数,$g(x)$是偶函数,则$f(x)g(x)$是奇函数;

(4)$F(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$是偶函数,$G(x)=\dfrac{1}{2}[g(x)-g(-x)]$是奇函数.

3. 设$f(x)=\ln x$,证明$f(x)+f(x+1)=f[x(x+1)]$.

4. 证明函数$f(x)=x^2+x$既不是奇函数、偶函数,也不是周期函数或单调函数.

5. 设$f(x)=ax+b$,$\{x_n\}$是等差数列,证明数列$\{f(x_n)\}$也是等差数列.

6. 设$f(x)$与$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$有定义,$f(x)$是以T_1为周期的函数,$g(x)$是以T_2为周期的函数,$\dfrac{T_1}{T_2}=k$为有理数. 证明函数$f(x)+g(x)$和$f(x)g(x)$都是$(-\infty,+\infty)$上的周期函数.

2 极　限

极限是微积分学的基础,极限的理论贯穿着数学分析的始终. 要深刻理解各类极限的定义以及极限的性质,熟练掌握极限的运算,力争灵活运用从定量到定性的逻辑证明方法. 熟知若干重要极限的结论.

2-1 极限的概念

一、极限定义

(1) 几种不同极限的定义如表1所列。

表1

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$:	$\forall \varepsilon>0$,	$\exists N\in \mathrm{N}_+$,	当 $n>N$ 时,	$\lvert a_n - A\rvert<\varepsilon$.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$:	$\forall \varepsilon>0$,	$\exists X>0$,	当 $\lvert x\rvert>X$ 时,	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$:	$\forall \varepsilon>0$,	$\exists X>0$,	当 $x>X$ 时,	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$:	$\forall \varepsilon>0$,	$\exists X>0$,	当 $x<-X$ 时,	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$:	$\forall \varepsilon>0$,	$\exists \delta>0$,	当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时,	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$:	$\forall \varepsilon>0$,	$\exists \delta>0$,	当 $0<x-x_0<\delta$ 时,	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$:	$\forall \varepsilon>0$,	$\exists \delta>0$,	当 $0<x_0-x<\delta$ 时,	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.

(2) 极限定义的否定形式举例如表2所列。

表2

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq A$:	$\exists \varepsilon_0>0$,	$\forall N\in \mathrm{N}_+$,	$\exists n_0>N$,	使 $\lvert a_{n_0}-A\rvert\geqslant\varepsilon_0$.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq A$:	$\exists \varepsilon_0>0$,	$\forall X>0$,	$\exists x_1$ 满足 $\lvert x_1\rvert>X$,	使 $\lvert f(x_1)-A\rvert\geqslant\varepsilon_0$.

数列$\{a_n\}$发散,是指 $\forall A\in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq A$;

函数$f(x)$在点x_0不存在极限,是指 $\forall A\in R$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$.

这里只就这两种形式极限给出了否定形式的叙述,另外五种极限类型,请读者自行写出. 在以下的叙述中,亦仅限于其中的一种或两种极限的性质定理、判定定理等,关于其他形式极限将有相类似的结论.

二、无穷小

如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，称数列$\{a_n\}$为无穷小量，简称无穷小；如果函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，称函数$f(x)$为$x\to x_0$时的无穷小．

设$\alpha(x)$与$\beta(x)$都是$x\to x_0$时的无穷小，且$\beta(x)\neq 0$，那么

(1)如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，就说当$x\to x_0$时，$\alpha(x)$是比$\beta(x)$的高阶无穷小．记为$\alpha(x)=o[\beta(x)](x\to x_0)$；

(2)如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$($c$为非零常数)，称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是$x\to x_0$时的同阶无穷小．特别地，若其中的$c=1$，称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是$x\to x_0$时的等价无穷小．记为$\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to x_0)$；

(3)如果存在常数$k>0$使$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(x-x_0)^k}=c\neq 0$，称$\alpha(x)$为$x\to x_0$时的$k$阶无穷小．

三、无穷大

如果$\forall M>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)|>M$，称函数$f(x)$为$x\to x_0$时的无穷大量，简称无穷大．记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$或$f(x)\to\infty\ (x\to x_0)$.

如果$\forall M>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>M$，称函数$f(x)$为$x\to x_0$时的正无穷大．记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，或$f(x)\to+\infty\ (x\to x_0)$.

如果$\forall M>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)<-M$，称函数$f(x)$为$x\to x_0$时的负无穷大．记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$或$f(x)\to-\infty\ (x\to x_0.)$

显然，如果函数$f(x)$为$x\to x_0$时的无穷大，则函数$\dfrac{1}{f(x)}$为$x\to x_0$时的无穷小．

2-2 极限的性质与判定

一、基本性质

(1)唯一性　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则必有$A=B$.

(2)有界性　如果数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$有界；

如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则必存在$\delta>0$，函数$f(x)$在$U^0(x_0,\delta)$有界.

(3)保序性　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且$A<B$，则必存在$\delta>0$，在$U^0(x_0,\delta)$内，$f(x)<g(x)$.

二、运算性质

(1)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都存在，则

$\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$($k$是常数)，

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$，

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right).$$

(2)如果$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to x_0} f(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=A$.

三、极限的判定

(1)单调有界原理 单调有界数列必有极限.

(2)夹逼定理(两边夹法则) 已知$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=A$.

(3)柯西收敛准则 $\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，对任意自然数$p$，有$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.

(4)海涅定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow$对于任意收敛于$x_0$的数列$\{a_n\}(a_n\neq x_0)$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=A$.

四、两个重要极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$； (2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

2-3 例题

例12 用精确方式("$\varepsilon-\delta$"语言)叙述下列各式的含义：

(1) * $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$； (2)$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$；

(3)$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq A$； (4)$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq+\infty$.

解 (1)$\forall M>0,\exists\delta>0$，当$0<x-x_0<\delta$时，恒有$f(x)>M$.

(2)$\forall M>0,\exists X>0$，当$x<-X$时，恒有$|f(x)|>M$.

(3)$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0$，总有$x_1$满足$0<x_1-x_0<\delta$，使$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

(4)$\exists M>0,\forall\delta>0$，总有$x_1$满足$0<|x_1-x_0|<\delta$，使$f(x_1)\leqslant M$.

例13 函数$f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界？

(A)$(-1,0)$； (B)$(0,1)$； (C)$(1,2)$； (D)$(2,3)$.

解 应选(A). 因为

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 3}{18},$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty.$$

函数$f(x)$只在$(-1,0)$上有界.

注记 函数$f(x)$除在$x=0,1,2$三点以外均连续,因而在这三点之外都局部有界,所以只需讨论函数$f(x)$在$x=0,1,2$这三点处的单侧极限. 由于函数$f(x)$在$x=0$的左极限和有极限都是有限值,而在$x=1$和$x=2$处趋于无穷大,不以1或2为端点的区间只有$(-1,0)$,于是答案选(A).

例 14$_{(08)}$ 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,$\{x_n\}$为数列,下列命题正确的是

(A)若$\{x_n\}$收敛,则$\{f(x_n)\}$收敛; (B)若$\{x_n\}$单调,则$\{f(x_n)\}$收敛;

(C)若$\{f(x_n)\}$收敛,则$\{x_n\}$收敛; (D)若$\{f(x_n)\}$单调,则$\{x_n\}$收敛.

解 选(B).

因为函数$f(x)$未必连续,在间断点处选项(A)不成立. 例如,函数$f(x)=\operatorname{sgn}x$是单调有界的函数,数列$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2n}\right\}$收敛于0,但是对应的函数值数列为$0,1,0,1,0,\cdots$,发散.

关于选项(B),由于函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,所以$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$都存在. 当$\{x_n\}$单调时,$\{f(x_n)\}$也单调(且有界),所以$\{f(x_n)\}$收敛.

如果考虑常函数$f(x)\equiv c$,可知后两个选项(C)和(D)不成立.

例 15$_{(03)}$ 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A)$a_n<b_n$对任意n成立; (B)$b_n<c_n$对任意n成立;

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在; (D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

解 选(D). 数列的极限值与前有限项的大小是没有必然关系的,因而已知条件中给出的$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$并不能表明前若干项数列$\{a_n\}$的项一定会小于$\{b_n\}$的项,因而选项(A)不成立.

关于选项(B),即便是$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$也不能表明数列$\{c_n\}$的前有限项一定会大于数列$\{b_n\}$的项.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$是"$0\cdot\infty$"型的极限未定式,其极限是否存在取决于具体的数列$\{a_n\}$与$\{c_n\}$,不能一概而论. 所以,选项(C)也不成立.

最后来说明选项(D)的正确性. $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$意味着极限$\lim\limits_{n\to\infty}c_n$不存在. 假若$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$存在的话,注意到$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,会有$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\times\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1\times\infty$. 此为矛盾.

例 16 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则

(A)$a=1,b=-4$; (B)$a=1,b=1$;

(C)$a=e,b=-4$; (D)$a=e,b=1$.

解 选(A). 由于分子的极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0$,必有分母极限等于0. 所以

$$\lim_{x\to 0}(e^x-a)=0,a=\lim_{x\to 0}e^x=1.$$

代入原式左边,注意到$\sin x\sim x,e^x-1\sim x(x\to 0)$,可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}(\cos x-b)=1-b.$$

令 $1-b=5$，解得 $b=-4$.

注记 假若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ 而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\neq 0$，则函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 必然在 $x=0$ 的邻域内无界，从而极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 一定不存在.

例 17$_{(04)}$ 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$；　(B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$；　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$；　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.

解 选(B). 由 $e^x=1+x+o(x)$ 有

$$1-e^{\sqrt{x}}\sim -\sqrt{x},$$

由 $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$，有

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x},$$

而

$$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x.$$

可见，(A)，(C)，(D) 均不与 $\sqrt{x}$ 等价. 关于选项(B)的正确性，是因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\frac{1+t^2}{1-t}}{t}=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1}{1-t}\right)=1.$$

例 18 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，函数

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\frac{1}{x}\right) & ,x\neq 0,\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

则

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点，　(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点，

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点，　(D) $g(x)$ 在 $x=0$ 的连续性与 a 的取值有关.

解 选(D). 令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x\to 0\Leftrightarrow t\to\infty$. 所以

$$\lim_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to\infty}f(t)=a.$$

当 $a=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0=g(0)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 连续. 假若 $a\neq 0$，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 间断. 可见，$g(x)$ 在 $x=0$ 的连续性与 a 的取值有关.