保险精算系列教材

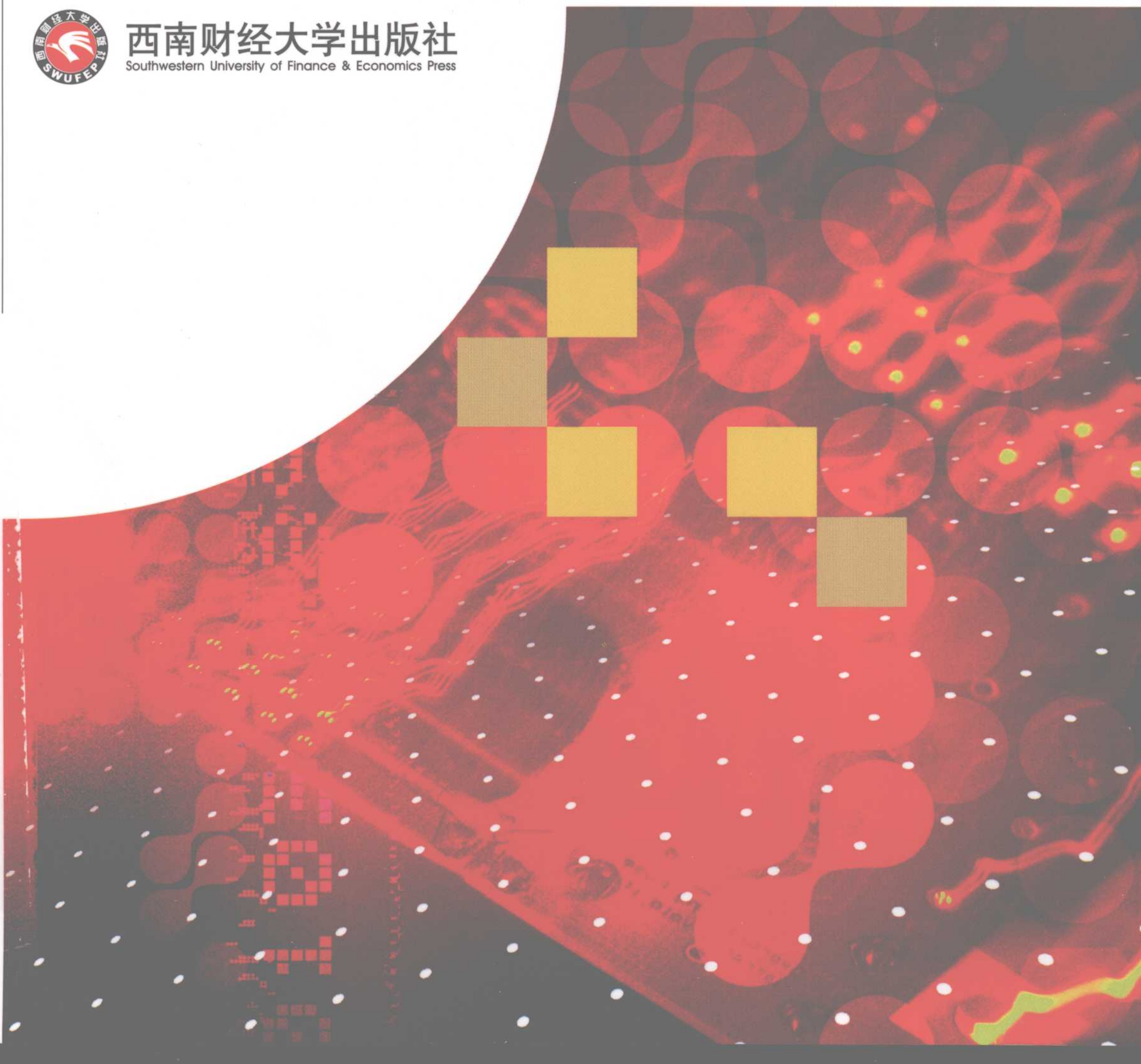
运筹学简明教程

白淑敏 编著

BAOXIAN JINGSUAN XILIE JIAOCAI

YUNCHOUXUE

JIANMINJIAOCHENG



西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

保险精算系列教材

运筹学简明教程

白淑敏 编著

BAOXIAN JINGSUAN XILIE JIAOCAI

YUNCHOUXUE

JIANMINJIAOCHENG

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

运筹学简明教程/白淑敏编著.—成都:西南财经大学出版社,2009.1
ISBN 978-7-81138-146-7

Ⅰ.运…　Ⅱ.白…　Ⅲ.运筹学—高等学校—教材　Ⅳ.022

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第198808号

运筹学简明教程

白淑敏　编著

责任编辑:李永福
封面设计:穆志坚
责任印制:封俊川

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址:	http://www.xcpress.net
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785　87352368
印　　刷:	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸:	170mm×240mm
印　　张:	10.25
字　　数:	180千字
版　　次:	2009年1月第1版
印　　次:	2009年1月第1次印刷
印　　数:	1—2000册
书　　号:	ISBN 978-7-81138-146-7
定　　价:	19.80元

前　　言

这是一本为保险精算专业的本科学生编写的《运筹学》教材，也可作为经济管理类其他专业及经济数学专业运筹学课程的教材使用。

运筹学是20世纪40年代形成的新学科，它应用系统的、科学的、数学分析的方法，通过建立和求解数学模型，研究各类系统的优化运行问题，以协助工商企业、事业和机关管理人员，做出最优的决策选择。可以说，在现代的企业管理和经营决策中，运筹学的原理和方法起着越来越大的作用。

我们注意到：一方面，运筹学具有很强的实用性，与实际问题的紧密结合是其主要发展趋势；另一方面，运筹学的运用也必须以掌握相关的数学原理为前提，离开了基本的数学原理，运筹学就成了无源之水。因此，这本书将以实用性和系统性为指导思想，力求兼顾到上述两方面，为广大有志于接受精算教育的学生以及从事精算教育培训的教师提供一本有较高学习和应用价值的教材。

因为运筹学是用数学方法研究各种系统的最优化问题，而各种系统的运营特征各不相同，数学模型也各具特色，因此形成了运筹学的不同分支。本书根据精算专业的需要，主要介绍线性规划、对偶理论与灵敏度分析、整数规划、动态规划、图论与网络分析、排队论、对策论和决策分析等内容。

本书的编写得到了西南财经大学教务处、保险学院及出版社的关心和支持。硕士研究生李晓露同学承担了本书部分内容的录入工作，在此致以谢意！

由于水平所限，书中有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正。

白淑敏

2008年10月

目　录

第一章　线性规划

线性规划作为运筹学的一个主要分支，是研究较早、理论最完整、应用最广泛的一个内容。

1939 年，前苏联学者康托洛维奇发表了《生产组织与计划中的数学方法》一书，其中提出了类似线性规划的模型及其求解方法；1947 年，在研究美国空军资源配置问题时，美国数学家丹捷格（Dantzig）给出了线性规划模型并提出了求解线性规划问题的单纯形法。单纯形法的出现，使求解大规模决策问题成为可能，而随着电子计算机技术的迅速发展和运用，使得线性规划越来越在更广泛的领域发挥着它的作用。

1.1　线性规划问题及其数学模型

一、线性规划问题的提出

在生产管理和经营活动中，常常要合理地分配有限的人力、物力、财力等资源，希望用最小量的消耗，完成尽可能多的任务，以获得最好的经济效益，下面给出几个例子。

例 1　某工厂计划生产甲、乙两种产品，已知生产每单位的甲产品需原料 A 3 单位，原料 B 1 单位，生产每单位的乙产品需原料 A 2 单位，原料 C 2 单位。若每单位产品甲和乙工厂可获利润分别为 3000 和 5000 元，且三种原材料的限制量分别为 18、4 及 12 单位，问应如何安排这两种产品的产量可使工厂获利最多？

显然，此问题的目的是要制定一个生产计划，使在满足资源限制的条件下，使总利润达到最大。为此，可按如下步骤进行：

（1）设 x_1，x_2 分别表示甲、乙两种产品的生产量，称之为决策变量。

（2）分析并表达限制条件。

生产计划必须服从资源总量的限制，从而得约束条件

$$\begin{cases}3x_1+2x_2\leqslant 18\\ x_1\leqslant 4\\ 2x_2\leqslant 12\end{cases}$$

这里，产量 x_1 和 x_2 不可能是负数，因此还有非负条件：$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$.

（3）分析目标。

以 Z 表示工厂生产甲和乙两种产品各 x_1 和 x_2 单位时所获利润，则有

$$Z=3x_1+5x_2$$

称之为问题的目标函数。

于是，可将问题表示为如下数学模型

$$\max Z=3x_1+5x_2$$

$$s.t.\begin{cases}3x_1+2x_2\leqslant 18\\ x_1\leqslant 4\\ 2x_2\leqslant 12\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

其中 s. t 是 subject to 的缩写，意为“受约束于”。

例 2 某单位有一笔资金用于四个工程项目 A、B、C、D 的投资，设各项目的投资收益率分别为 20%，15%，10% 和 12% 由于某种原因，决定用于项目 A 的投资不大于其他三项投资之和；而用于项目 B 和 C 的投资不小于项目 D 的投资。试确定使该单位收益最大的投资分配方案。

设 x_1，x_2，x_3 和 x_4 分别表示用于 A、B、C、D 的投资百分数，由于用于各项目的投资百分数之和应等于 100%，故

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1$$

考虑到其他限制条件及该问题的目标，可将该问题的数学模型表示如下：

$$\max Z=0.2x_1+0.15x_2+0.1x_3+0.12x_4$$

$$s.t.\begin{cases}x_1-x_2-x_3-x_4\leqslant 0\\ x_2+x_3-x_4\geqslant 0\\ x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4.\end{cases}$$

例 3 某工厂要用甲、乙两种原料混合配制一种特殊产品，要求产品中 A、B、C 三种化学成分的最低含量分别不能低于 4%、2% 和 5%. 已知甲原料中三

种化学成分的含量分别为 12%、2% 和 3%，乙原料中三种化学成分的含量分别为 3%、3% 和 15%. 若甲、乙两种原料的成本分别是每千克 3000 元和 2000 元，要使工厂生产这种产品的总成本最小，问应如何确定产品中两种原料的比例？

为使生产这种产品的总成本最小，只须每单位产品的生产成本最小即可。因此可设 x_1，x_2 为每千克产品中甲、乙两种原料的数量，则因为产品是由两种原料混合配制而成，故须满足条件：$x_1+x_2=1$.

考虑到对产品中三种化学成分 A、B、C 的最低含量要求及该问题的目标，综合可得该问题的数学模型如下：

$$\min Z=3x_1+2x_2$$

$$s.t.\begin{cases}x_1+x_2=1\\12x_1+3x_2\geqslant 4\\2x_1+3x_2\geqslant 2\\3x_1+15x_2\geqslant 5\\x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

二、线性规划的一般数学模型

上述几例要解决的问题不同，但都属于同一类优化问题，它们具有如下共同的特征：

（1）每一问题都用一组决策变量 x_1，x_2，…，x_n 表示一方案，变量的取值一般是非负的；

（2）都存在若干个约束条件，且约束条件可用决策变量的一组线性等式或线性不等式来表达；

（3）都有一个需要达到的目标，它可用决策变量的线性函数（称为目标函数）来表示，按问题的不同，要求目标函数实现最大化（max）或最小化（min）.

具有上述三个特征的优化问题称为线性规划问题，此类问题的数学模型的一般形式为：

$$\max(\min)\ Z=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n \tag{1.1}$$

$$s.t.\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)\ b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)\ b_2\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)\ b_m & (1.2)\\x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 & (1.3)\end{cases}$$

其中（1.1）为目标函数，（1.2）和（1.3）为约束条件，（1.3）也称为非负

条件。

上述各式中，C_j $(j=1, 2, \cdots, n)$ 通常称为价值系数，a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$称为约束条件系数，$b_i(i=1, 2, \cdots, m)$称为右侧常数。

1.2 线性规划的图解法

线性规划的图解法是借助于平面上的几何图形来求解线性规划的一种方法。这种方法简单直观，虽然只适用于求解两个变量的线性规划问题，但它可使我们了解线性规划的解的特点及求解的基本原理，这将有助于我们理解后面要介绍的求解线性规划的一般方法——单纯形法的基本思想。

下面先对上节的例 1 用图解法求解。

例 4 用图解法求解

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$s.t.\begin{cases}3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \leqslant 4 \\ 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

作图时，首先建立直角坐标系 x_1ox_2（图 1.1）。满足非负条件的点在第一象限内。第一个约束不等式 $3x_1 + 2x_2 \leqslant 18$ 以直线 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 为界，把 x_1ox_2 平面分为左下和右上两个半平面。在这条直线左下方的点（包括这条直线上的点）都满足 $3x_1 + 2x_2 \leqslant 18$，这些点构成了一个闭半平面。用同样的方法可以画出对应于另两个不等式 $x_1 \leqslant 4$ 和 $2x_2 \leqslant 12$ 的两个闭半平面。这三个闭半平面在第一象限的交集，组成了闭五边形 $OABCD$，该闭五边形内所有点，满足线性规划问题的所有约束条件，而这个范围以外的点，则不能满足所有约束条件。

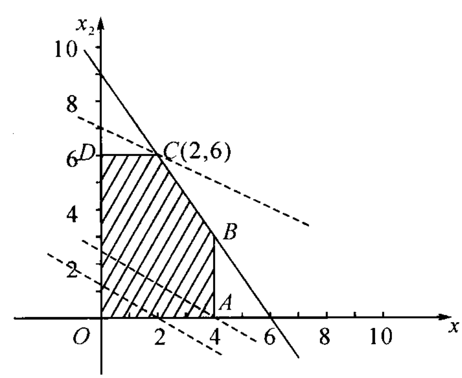


图 1.1

满足所有约束条件的点称为可行点。每个可行点对应线性规划问题的一个解，称为可行解，我们把全部可行解的集合称为可行域。本例中，闭五边形

OABCD 即为问题的可行域。

下面我们要做的是在可行域中找出使目标函数达到最优的可行解，称之为最优解。

目标函数 $Z=3x_1+5x_2$ 在直角坐标系 x_1ox_2 下，可看成是以 x_1，x_2 为变量，以 Z 为参数的一簇平行直线，若取 $Z=Z_0$，则同一直线 $3x_1+5x_2=Z_0$ 上的所有点(x_1, x_2)有相同的目标函数值，故称之为等值线。要在可行域 OABCD 中寻找使目标函数值达到最大的点，即在这一簇互相平行的等值线中，寻找能使 Z 取得最大的且与可行域至少有一个交点的那条直线，该直线与可行域的交点就是最优的可行解。

当 Z 值由小变大时，等值线 $Z=3x_1+5x_2$ 沿其法线方向向右上方移动，当平移至 $Z=36$ 时，这条等值线 $3x_1+5x_2=36$ 和可行域只有一个交点 $C(2, 6)$，若 Z 值再增大，则等值线已完全位于可行域之外。由此，$C(2, 6)$即是使 Z 值达到最大的可行点。这样就得到了例 1 的最优解 $X^*=(2, 6)^T$，对应的目标函数值（最优值）$Z^*=36$.

若本例中其他条件不变，仅将目标函数改为 $Z=3x_1+2x_2$，这时，新目标函数的等值线平行于可行域的一条边 BC，位于线段 BC 上的各点均有相同的目标函数值（等于 18）。在这样的情况下，线段 BC 上的各点都是问题的最优点，于是该线性规划问题有无穷多个最优解。

例 5 用图解法求解线性规划

$$\max Z=x_1+x_2$$

$$s.t.\begin{cases}x_1-x_2\geq 1\\ -0.5x_1+2x_2\leq 2\\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\end{cases}$$

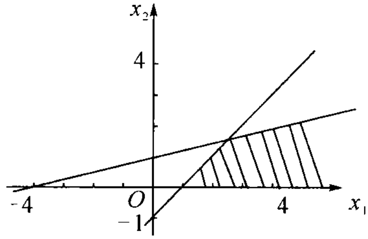


图 1.2

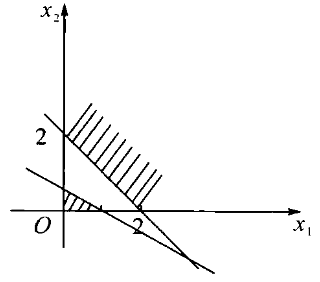


图 1.3

如图 1.2，从图中可看到，该问题可行域无界，目标函数值可无限增大。我

们称这种情况为无界解，即有可行解，但无有限最优解。

例 6 用图解法求解线性规划

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 1 \\ x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

由图 1.3 可以看到，满足所有约束条件的点是不存在的，即无可行解。

上述几个例子告诉我们，线性规划问题的解有下面几种情况：

（1）有唯一最优解；

（2）有无穷多最优解；

（3）有可行解，但无最优解（无界解）；

（4）无可行解。

从图解法还可直观地看到，当线性规划问题的可行域非空时，它是有界或无界凸多边形。若线性规划问题存在最优解，则一定可以在可行域的某个顶点上达到；如果在某两个顶点上均达到最优，则这两个顶点连线上的任一点也都是最优解。

1.3 线性规划问题数学模型的标准形式

在线性规划问题的数学模型中，目标函数有的要求极大化，有的要求极小化；约束条件可以是线性等式，也可以是不等式；决策变量一般要求非负，但也可以无约束。为了便于讨论和给出统一的算法，我们需要把这些不同形式的数学模型统一为标准形式。

这里，我们将标准形式规定为

$$\max Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

并规定其中右端常数项 $b_i \geqslant 0 (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$.

（1.4）式可缩写为

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\x_j\geqslant 0(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases}\tag{1.5}$$

也可写成向量形式

$$\max Z=CX$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=b\\x_j\geqslant 0(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases}\tag{1.6}$$

其中 $C=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$ 为价值向量，$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ 称为决策向量，$P_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$.

还可写成矩阵形式

$$\max Z=CX$$

$$s.t.\begin{cases}AX=b\\X\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$.

下面讨论如何把一个一般的线性规划数学模型转化为标准型：

(1) 将极小化转化为极大化

若目标函数是求极小化，即 $\min Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$，这时只需令 $Z'=-Z$，则原问题可转化为求解

$$\max Z'=-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j.$$

(2) 将线性不等式转化为线性等式

如果某约束条件为≤不等式，则可在不等式的左端加入一个非负变量而把不

等式变为等式，加入的变量称为松弛变量；如果某约束条件为≥不等式，则可在不等式的左端减去一个非负变量而把不等式变为等式，减去的变量称为剩余变量。

（3）将没有非负限制的变量转化为有非负限制的变量

如果线性规划中某变量 x_k 没有非负限制，则可引进非负变量 x_s 与 x_t，令 $x_k = x_s - x_t$.

例 7 将线性规划问题标准化

$$\min Z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ x_1 + 3x_3 \geqslant 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

解 可通过以下步骤将问题化为标准型

（1）用 $x_4 - x_5$ 替换 x_3，这里 $x_4 \geqslant 0$，$x_5 \geqslant 0$；

（2）在第一个约束中加入松弛变量 x_6，在第二个约束中减去剩余变量 x_7；

（3）令 $Z' = -Z$，将目标函数变为 $\max Z' = -3x_1 - 2x_2 + 4x_3$；

综合上述几步，可得标准型为

$$\max Z' = -3x_1 - 2x_2 + 4x_4 - 4x_5$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 6 \\ x_1 + 3x_4 - 3x_5 - x_7 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7. \end{cases}$$

1.4 线性规划问题解的概念和性质

设已得到线性规划问题的标准型

$$\max Z = CX \tag{1.7}$$

$$s.t.\begin{cases} AX = b & (1.8) \\ X \geqslant 0 & (1.9) \end{cases}$$

其中 $C = (c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

这里可以假定矩阵 A 满足 $m\leqslant n$，而且 A 的秩 $R(A)=m$，否则可以删去一些多余等式约束，使之满足条件。

一、解的概念

1. **可行解**

满足约束条件（1.8）、（1.9）的解 $X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$ 称为线性规划问题的可行解。全部可行解的集合称为可行域。

2. **最优解**

使目标函数达到最优值的可行解称为最优解，常用 X^* 表示。

3. **基**

设 B 是矩阵 A 中的一个 $m\times m$ 阶的满秩子矩阵，称 B 是线性规划问题的一个基。

若 B 是线性规划问题的一个基，则 B 一定是由 m 个线性无关的列向量组成，不失一般性，设 $B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mm}\end{bmatrix}=[P_1P_2\cdots P_m]$.

相应地称 $P_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \cdots,\ a_{mj})^T(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$为基向量，与基向量 P_j 对应的变量 $x_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$称为基变量，$x_{m+1},\ \cdots,\ x_n$ 称为非基变量。

由基的定义可知，一个线性规划问题的基通常不是唯一的，但是不同的基的个数最多为 C_n^m 个。一旦线性规划的基确定了，那么相应的基向量、基变量和非基变量也就都确定了。

4. **基解**

设 B 是线性规划问题的一个基，若令所有非基变量等于 0，则因为基 B 是满秩的，故由线性方程组的理论知，此时可求得方程组 $AX=b$ 的唯一解。称这样得到的约束方程组的解为线性规划问题的基解。显然，有一个基就可以求得一个基解，且基解的个数也不超过 C_n^m 个。但由于基解中的非零分量可能是负数，所以基解不一定是可行的。

5. **基可行解**

满足非负条件（1.9）的基解称为基可行解。

6. **可行基与最优基**

对应于基可行解的基称为可行基，对应于基最优解的基称为最优基。

例 8 求线性规划问题的全部基解、基可行解：

$$\max Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 + x_4 = 6 \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{cases}$$

解 约束系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4]$$

取 $B_1 = [P_1 \quad P_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，因为 $|B_1| = 6 \neq 0$，所以 B_1 是一个基，x_1，x_2 是对应的基变量。若令 $x_3 = x_4 = 0$，则约束方程组化为

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_2 = 6 \end{cases}$$

可解得 $x_1 = 1$，$x_2 = 2$，即 B_1 对应的基解为 $X_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 0)^T$. 因为 $X_1 \geqslant 0$，故 X_1 是一个基可行解。

类似地，还可得到线性规划问题的另外四个基：

$B_2 = [P_1 \quad P_4] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，对应的基解为 $X_2 = (2,\ 0,\ 0,\ 6)^T$，也是一个基可行解。

$B_3 = [P_2 \quad P_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$，对应的基解为 $X_3 = (0,\ 2,\ 2,\ 0)^T$，也是一个基可行解。

$B_4 = [P_2 \quad P_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，对应的基解为 $X_4 = (0,\ 4,\ 0,\ -6)^T$，不是基可行解。

$B_5 = [P_3 \quad P_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，对应的基解为 $X_5 = (0,\ 0,\ 4,\ 6)^T$，也是一个基可行解。

可见，该线性规划问题有 5 个基解和 4 个基可行解。