高等学校教材

线性代数

◎ 主编 高玉斌

高等教育出版社

高等学校教材

线性代数

主　编　高玉斌

高等教育出版社

内容简介

本书是编者根据多年的教学实践，结合新形势下教学改革的精神，依据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成的。全书共分八章，前六章是基本内容，包括：行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与矩阵的对角化和二次型，第七章为线性空间与线性变换，供某些专业选用，第八章为线性代数应用问题。前七章均配有适量习题，书末附有习题答案。

本书内容精炼，语言准确，解析详细，条理性强，较为系统地介绍了线性代数的基本内容、基本理论和基本方法。本书可作为高等学校理工类专业线性代数课程的教材，也可供工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/高玉斌主编.—北京：高等教育出版社，2009.1
ISBN 978-7-04-024905-7

Ⅰ.线… Ⅱ.高… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 191873 号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 张申申
版式设计 余 杨 **责任校对** 胡晓琪 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2009 年 1 月第 1 版
印　　张	12	**印　　次**	2009 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	220 000	**定　　价**	15.60 元

物料号 24905-00

郑 重 声 明

前　言

本书是根据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”而编写的，可作为高等学校理工类专业线性代数课程的教材。

全书共分八章，前六章是基本内容，包括：行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与矩阵的对角化和二次型，第七章为线性空间与线性变换，供某些专业选用，第八章为线性代数应用问题。

在编写过程中，编者力求教材的内容、体系能符合当前我国高等教育教学内容和课程体系改革的总体目标，体现“厚基础、宽口径、高素质”人才培养的要求。在教材体系、内容编排、例题选配等方面既吸取了国内外优秀教材的优点，也汇集了编者多年的教学经验。

本教材具有以下特点：

1. 体系适当，语言准确，解析详细，条理性强，内容叙述上尽可能采用学生易于接受的方式。如在第一章行列式中，首先通过二元、三元线性方程组的求解，引出二阶、三阶行列式的定义，进而通过分析其规律，利用学生所熟悉的数学归纳法引入 n 阶行列式的定义；又如在第四章解线性方程组中，通过分析求解线性方程组的消元法，提出了利用矩阵的初等行变换求解线性方程组的方法，从而以此为主线来讲解第四章线性方程组的内容。

2. 内容的深度和广度合理，既考虑到本课程的教学基本要求，也照顾到不同院校、不同专业及将来报考硕士研究生学生的需要。教材内容覆盖了“工科类本科数学基础课程教学基本要求”及《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中有关线性代数的全部内容。整体上说，教材的前六章是本课程的基本内容，而第七章线性空间与线性变换是供某些专业选用的，同时，在前六章的基本内容中，也适当编排了一些基本要求之外的内容及一些综合性或难度较大的内容及例题，这部分内容标有“*”号，可根据教学实际情况处理，略去不讲也不影响教材的系统性。如第一章第三节拉普拉斯定理及行列式的乘法规则、第二章第五节有关矩阵秩的部分性质等就属于这样的内容。

3. 注重基本概念、基本理论、基本方法的介绍，突出有关定理、法则的分析与应用。在重点内容处，均配备了较多的例题。特别，在重点内容、难点内容及读者在学习过程中容易产生疑问的地方，以“注意”的形式给出了必

要的说明或解释性文字，帮助读者理解相关内容。

4. 例题、习题选配适当，注重题目的多样性。

5. 教材的最后一章为线性代数应用问题，介绍线性代数的概念、理论与方法在几何学、密码学、生物学等方面的应用，旨在使读者得到数学建模方面能力的初步培养。此部分内容中各个应用问题是相对独立的，教师可有选择地在相应内容之后讲解，也可供学生自行学习。

本教材由高玉斌教授主编，负责全书的统稿工作，第一、二章由邵燕灵教授执笔，第三、四、五章由余本国讲师执笔，第六、七、八章由雷英杰副教授执笔。

由于编者能力所限，不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2008 年 7 月

目　　录

第一章　行　列　式

本章将从二元、三元线性方程组的解引出二阶及三阶行列式的概念，然后推广到 n 阶行列式，最后给出解 n 元线性方程组的克拉默法则.

第一节　二阶、三阶行列式

行列式的概念是人们从解线性方程组的需要中建立起来的. 考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 b_1，b_2 是常数项，a_{ij}叫做 x_j 的系数，它有两个下标，下标 i 表示它在第 i 个方程，j 表示它是第 j 个未知量的系数.

用消元法解此方程组：用 a_{22}乘(1.1)中第一式各项，得

$$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \tag{1.2}$$

再用 a_{12}乘第二式各项，又得

$$a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12}. \tag{1.3}$$

由(1.2)减(1.3)消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.4}$$

同理，消去 x_1，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.5}$$

为方便记，我们引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

D 叫做二阶行列式. 它含有两行、两列，横写的叫做行，竖写的叫做列. 行列式中的数又叫行列式的元素，如 a_{21}就是在第 2 行、第 1 列上的元素. 行列式

的值是这样两项的代数和：一项是从左上角到右下角的对角线（又称行列式的主对角线）上两个元素的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角的对角线上两个元素的乘积，取负号.

利用二阶行列式的记号，关于线性方程组(1.1)解的结果可写为如下形式：

当

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程组(1.1)有惟一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=8, \\ x_1-2x_2=-3. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7\neq 0$，$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-7$，$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-14$. 因 $D\neq 0$，故方程组有惟一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2.$$

完全类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.6}$$

利用消元法可知，当

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时，方程组(1.6)有惟一解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3), \\ x_2=\dfrac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}), \\ x_3=\dfrac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}). \end{cases} \tag{1.7}$$

为方便记，我们引进三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.8}$$

它是由九个数排成三行、三列的一个方块，其值是六项的代数和，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以适当的正负号，其运算的规律性见图1-1：实线上三个元素的乘积构成的三项在其前都加正号；虚线上三个元素的乘积构成的三项在其前都加负号.

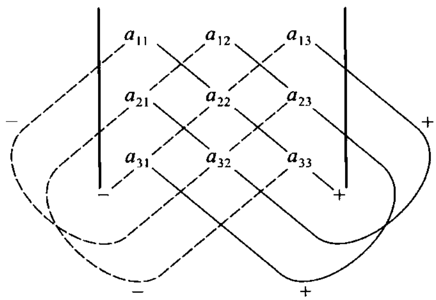

图 1-1

利用三阶行列式的记号，关于三元线性方程组(1.6)解的结果可写为如下形式：

当

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组(1.6)有惟一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

以上求解线性方程组的方法称为克拉默(Cramer)法则.

例 2　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

解　$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$, $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21.$$

因 $D\neq 0$，故方程组有惟一解：

$$x_1=\frac{13}{28},\ x_2=\frac{47}{28},\ x_3=\frac{21}{28}.$$

下面我们对上述定义的二阶、三阶行列式做一分析. 为此，首先补充定义一阶行列式为

$$|a_{11}|=a_{11}.$$

注意 一阶行列式 $|a_{11}|$ 就等于 a_{11}，记号 $|\cdot|$ 不要与绝对值混淆.

二阶、三阶行列式的定义可以表述为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}|a_{22}|-a_{12}|a_{21}|.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

它们的规律是：把该行列式的第一行诸元素乘以划去该元素所在的行和列之后剩下的低一阶行列式，前面冠以正、负相间的符号，最后求其代数和.

按照此规律，利用递归方法可逐次定义四阶行列式、五阶行列式等等.

第二节 n 阶行列式的定义及性质

一、n 阶行列式的定义

定义 1 一阶行列式定义为

$$|a_{11}|=a_{11}.$$

当 $n\geqslant 2$ 时，设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则 n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}, \tag{1.9}$$

其中 $M_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示划去行列式 D 的第 i 行与第 j 列后所剩余的 $n-1$ 阶行列式.

上节中二阶、三阶行列式的有关名词，如行、列、元素、主对角线等，在 n 阶行列式中将继续沿用.

对于本书中所提到的"n 阶行列式"，如果没有特殊说明，都有 $n\geqslant 2$.

定义 2　M_{ij}称为元素 a_{ij}的余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素 a_{ij}的代数余子式.

利用代数余子式的概念，n 阶行列式 D 又可写为

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.$$

通常称上式为行列式按第一行元素的展开式.

例 1　设

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\3&-1&2&3\\0&1&0&0\\4&7&2&5\end{vmatrix},$$

求第一行元素的余子式、代数余子式及四阶行列式 D.

解　$M_{11}=\begin{vmatrix}-1&2&3\\1&0&0\\7&2&5\end{vmatrix}=-4$，$M_{12}=\begin{vmatrix}3&2&3\\0&0&0\\4&2&5\end{vmatrix}=0$，

$$M_{13}=\begin{vmatrix}3&-1&3\\0&1&0\\4&7&5\end{vmatrix}=3,\quad M_{14}=\begin{vmatrix}3&-1&2\\0&1&0\\4&7&2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-4,\ A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=0,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=3,\ A_{14}=(-1)^{1+4}M_{14}=2,$$

$$D=1\times(-4)+2\times 0+0\times 3+1\times 2=-2.$$

下面的定理给出了行列式按第一列元素的展开公式.

定理　$n\geqslant 2$ 时，

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}.\tag{1.10}$$

证　采用数学归纳法. $n=2$ 时定理显然成立. 设定理对 $n-1$ 阶行列式成立，往证它对 n 阶行列式也成立.

当 $n\geqslant 3$ 时，记 $M_{ij,st}$表示划去 D 的第 i，s 两行与第 j，t 两列后剩下的 $n-2$ 阶行列式. 显然 $M_{ij,st}=M_{st,ij}$.

首先，按行列式定义

$$D=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}=a_{11}M_{11}-\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}a_{1j}M_{1j}. \tag{1.11}$$

由归纳假设，$M_{1j}(j\geqslant 2)$可按第一列展开，

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{21}M_{1j,21}-a_{31}M_{1j,31}+\cdots+(-1)^{n}a_{n1}M_{1j,n1}=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{k1}M_{1j,k1}.$$

代入(1.11)，得

$$\begin{aligned} D &= a_{11}M_{11}-\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}a_{1j}\left(\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{k1}M_{1j,k1}\right) \\ &= a_{11}M_{11}-\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}(-1)^{j+k}a_{1j}a_{k1}M_{1j,k1} \\ &= a_{11}M_{11}-\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{k1}\left(\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}a_{1j}M_{1j,k1}\right). \end{aligned} \tag{1.12}$$

又对 $k\geqslant 2$ 有

$$M_{k1}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2} & a_{k+1,3} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}a_{1j}M_{k1,1j}.$$

代入(1.12)，并利用 $M_{1j,k1}=M_{k1,1j}$得

$$D=a_{11}M_{11}-\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{k1}M_{k1}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}.$$

证毕.

在上节中我们曾经指出，二阶行列式的值为两项的代数和，每一项都是行列式中不同行不同列的两个元素的乘积．我们知道在主对角线上两个元素的乘积 $a_{11}a_{22}$是带正号，右上角到左下角两个元素的乘积 $a_{12}a_{21}$是带负号，其中只要互换行列式的两列，就可以把 a_{12}，a_{21}移到新行列式的主对角线上.

三阶行列式的值为六项的代数和，每一项都是行列式中不同行不同列的三个元素的乘积．我们知道在主对角线上三个元素的乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}$是带正号，其他五项中三个元素都不完全在主对角线上．带负号的三项 $a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，

$a_{13}a_{22}a_{31}$都只要互换行列式的两列就可以把项中三个元素都移到新行列式的主对角线上，如 $a_{11}a_{23}a_{32}$，只要把行列式的第二列与第三列互换，a_{11}，a_{23}，a_{32}三个元素就都移到新行列式的主对角线上．但对带正号的其他两项 $a_{12}a_{23}a_{31}$及 $a_{13}a_{21}a_{32}$却都需要两个互换，如 $a_{12}a_{23}a_{31}$，先互换第一列与第二列，接着再互换第二列与第三列，才可以将 a_{11}，a_{23}，a_{31}三个元素移到新行列式的主对角线上．通过分析我们得到三阶行列式中各项带符号的规律：用互换两列的方法把 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$中三个元素都移到新行列式的主对角线上，当互换次数为偶数时，$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$带正号，当互换次数为奇数时，$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$带负号．

一般地，n 阶行列式是个数值，它的值为 $n!$ 项的代数和，每一项都是行列式中各不同行不同列的 n 个元素的乘积，可以写为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$．其中每项带的符号这样来规定：用互换两列的方法把 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$中 n 个元素都移到新行列式的主对角线上，当互换次数为偶数时，$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$带正号，当互换次数为奇数时，$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$带负号．

例 2　计算如下的下三角形行列式及上三角形行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　根据定义，

$$D_1=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，根据本节定理可得

$$D_2=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}=d_1d_2\cdots d_n.$$

例 3　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & d_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解 根据定义，

$$D=(-1)^{1+n}d_1(-1)^{1+n-1}d_2\cdots(-1)^{1+2}d_{n-1}d_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}d_1d_2\cdots d_n.$$

二、行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 采用数学归纳法. $n=2$ 时，显然有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

假设对 $n-1$ 阶行列式性质成立，往证对 n 阶行列式也成立.

对 D^{T} 用本节定理，并根据归纳假设有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2,i-1} & a_{3,i-1} & \cdots & a_{n,i-1} \\ a_{2,i+1} & a_{3,i+1} & \cdots & a_{n,i+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}M_{1i}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}M_{1i}=D.$$

证毕.

此性质表明：行列式中行与列处于平等地位. 如果我们证明了行列式有关行的某些性质，则相应性质对列也随之成立.

性质 2 若行列式的第 i 行($1\leqslant i\leqslant n$)各元素有公因数 λ，则 λ 可提到行列式的记号之外与之相乘.

证 采用数学归纳法. $n=2$ 时结论显然成立. 假设对 $n-1$ 阶行列式结论成立，往证对 n 阶行列式也成立.

若 $i=1$，则