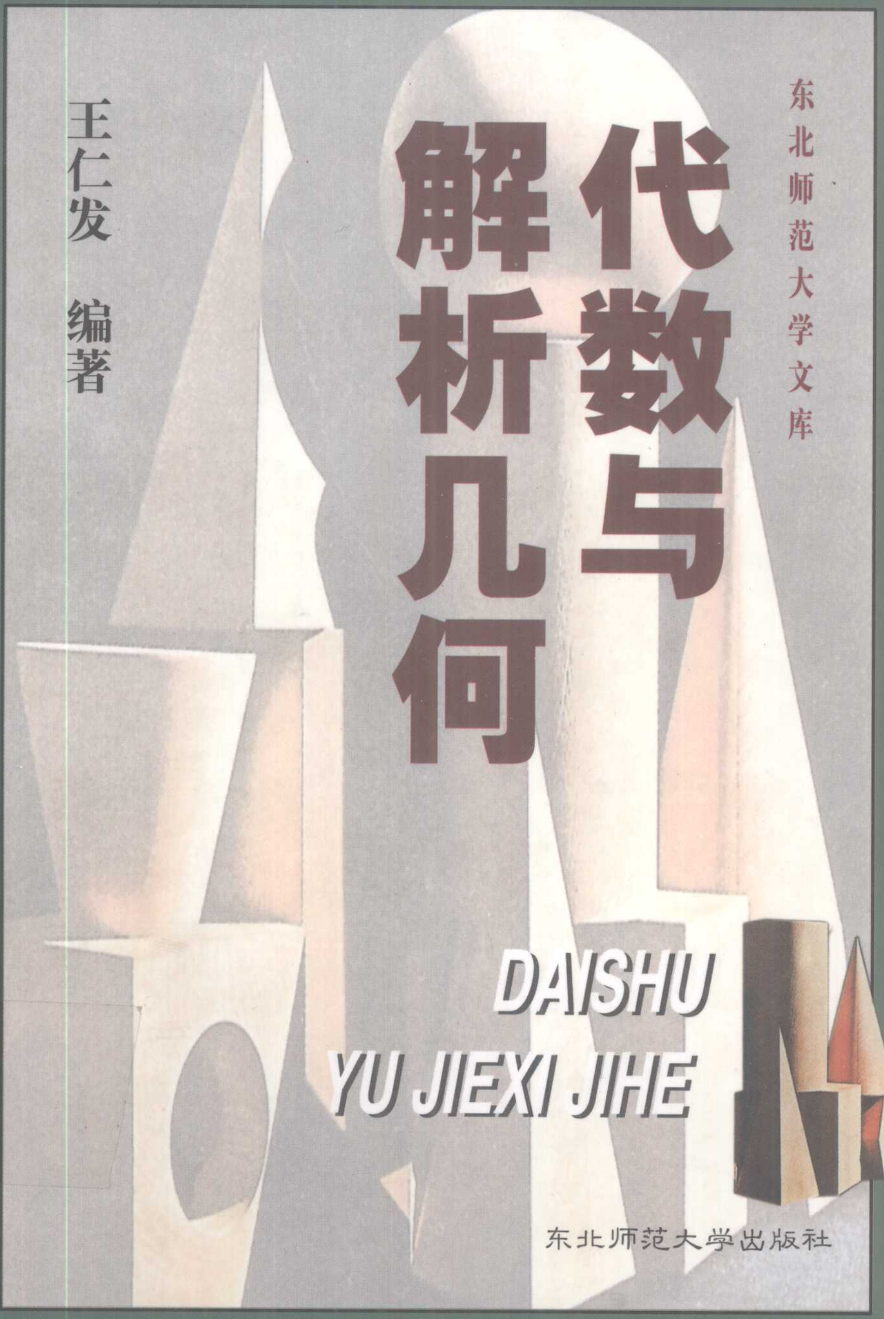
东北师范大学文库

代数与解析几何

王仁发 编著



DAISHU
YU JIEXI JIHE

东北师范大学出版社

代数与解析几何

东北师范大学文库

代数与解析几何

王仁发　编著

东北师范大学出版社
长　春

东北师范大学文库

代数与解析几何

DAISHU YU JIEXIJIHE

王仁发　编著

责任编辑：杨述春　张永正　封面设计：李冰彬　责任校对：张中敏

东北师范大学出版社出版　东北师范大学出版社发行

（长春市人民大街 138 号）　东北师范大学出版社激光照排中心制版

（邮政编码：130024）　吉林省吉新月历公司印刷分公司印刷

开本：850×1168 1/32　1999 年 9 月第 1 版

印张：14.75　2002 年 9 月第 3 次印刷

字数：358 千　印数：3 001—6 000 册

ISBN 7-5602-2458-X/O·108　定价：15.00 元

前　　言

本书是根据东北师范大学课程内容体系的改革与实践方案编写的. 当今改革的主要方向是精简教学内容和教材现代化. 本书就是根据这一原则而把代数与解析几何统编成一本教材,改变了历来两门课程分开讲述的历史.

课程内容以代数为线,首先把行列式、线性空间、欧氏空间以及线性方程组放在前四章,以便充分利用线性代数工具解决几何问题. 把空间中的向量看成 n 维线性空间的特例来研究几何问题,空间的点、线、面之间的关系用矩阵的秩、向量的相关(或无关)来解析,对解析几何的学习将大有益处.

由于代数上有二次型理论,过去解析几何只能讲述二维或三维几何图形,而现在却能增加仿射几何以及二次曲面一般理论这样现代化内容. 以代数为主线,不但没有削弱几何内容,反而增加不少过去不能讲述的内容.

对于高等代数,本书也力求改革,坚持精简与注重实际应用的原则. 一般教材把方程组放在线性空间前讲述,利用齐次方程的解来解决线性相关问题,本书把线性空间放在第二章,利用向量替换定理以及行列式解决了向量的线性相关、空间基底和维数等问题. 同时删去了解方程组所用的 B 型阵及消元法这些繁杂内容,只是从理论上给出了方程的通解公式. 另一方面,我们把线性函数、双线性函数、多重线性函数、对称双线性函数、反对称双线性函数与二次型统统放在一章里进行讨论,把二次型看成对称双线性函数

的特殊情况，这样不仅精简了大量教学内容，同时使问题得到了简化. 为了使一些几何问题得到满意的解析，我们还增加格拉姆行列式(平行六面体体积)、超平面以及点到超平面的距离与最小二乘法等应用数学内容. 由于数学分析课需要一些几何直观图形，所以我们把数与多项式、矩阵的标准型这两章放在本书最后，这对整个教学并无影响.

由于本书对许多定理的证明与叙述采用了最简洁方式，全书的教学总量(大约有四十几万字) 比传统教材要少$\frac{1}{3}$左右(传统的解析几何与代数有70万～80万字左右). 读者对标有 * 号内容的章节可略去不看，另外对复酉空间、仿射空间以及分块矩阵等章节也可适当进行取舍，这都不影响全书内容.

孙传林、梁希泉、张力宏(四平师范学院)、张秀英等同志为本书做了许多工作，辽宁师范学院、哈尔滨师范学院的同行提出了不少有益意见，这里一并感谢.

编者

1998 年 7 月

目　录

第一章 行 列 式

§1 数码的排列与行列式定义

众所周知,n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 的全部排列总数为 $n!$. 对于其中任意一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_k \cdots i_j \cdots i_n$,如果 $i_k > i_j$,则称这两个数字构成上述排列的一个反序;如果 $i_k < i_j$,则称这两个数字构成上述排列一个正序. 显然,任意一个排列的反序个数与正序个数的总和为 C_n^2. 例如四个数码中的一个排列若为 2 1 4 3,则此排列共有 2 个反序(2 在 1 前,4 在 3 前)4 个正序. 一般地,一个排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的反序个数用 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 表示. 例如 $\tau(2\ 1\ 4\ 3) = 2$. 计算一个排列的反序数一般先计算数码 1 的反序数,即计算排在 1 前面数码的个数,然后计算 2 的反序数,即计算排在 2 前面又比 2 大的数码个数,…… 最后计算 $n-1$ 的反序数,它们的总和就是该排列的反序数. 例如,$\tau(n\ n-1\ n-2\ \cdots\ 2\ 1) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 1 一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的反序数为偶数时,称它为偶排列;它的反序数为奇数时,称它为奇排列.

定理 1 交换一个排列的任意两个数码,其余数码不动,则改变这个排列的奇偶性.

证明 首先讨论一种特殊情形,即互换两个相邻的数码

设给定的排列为.

$$\cdots i\ j \cdots \qquad (\mathrm{I})$$

交换 i 与 j 后得新的排列为

$$\cdots j\ i \cdots \qquad (\mathrm{II})$$

显然,i、j 以外的任何一个数码在排列 Ⅰ 与 Ⅱ 中所引起的反序数是一样的.若 $i<j$,那么排列 Ⅱ 的反序数比 Ⅰ 的反序数多1个.若 $i>j$,那么排列 Ⅱ 的反序数比 Ⅰ 的反序数少1个.所以,排列 Ⅰ 和排列 Ⅱ 的奇偶性相反,即交换两个相邻数码改变排列的奇偶性.

现在看一般情形.假定 i 与 j 之间有 s 个数码,我们用 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 来代表,这时给定的排列为

$$\cdots i\ k_1\ k_2 \cdots k_s\ j \cdots \qquad (\mathrm{III})$$

交换两个数码 i 与 j 后得到新排列为

$$\cdots j\ k_1\ k_2 \cdots k_s\ i \cdots \qquad (\mathrm{IV})$$

容易看到这个交换可以通过一系列相邻数码间的交换来实现,首先让 i 向右移动,即 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 交换,这样经过 s 次相邻数码的交换得到的排列为

$$\cdots k_1\ k_2 \cdots k_s\ i\ j \cdots$$

再让 j 向左移动,即让 j 依次与 $i,k_s,\cdots,k_1$ 交换,经过 $s+1$ 次相邻数码的交换即得排列 Ⅳ,所以排列 Ⅳ 是排列 Ⅲ 经过 $2s+1$ 次相邻数码交换得到的,而经过一次相邻数码的交换,改变排列的奇偶性,但 $2s+1$ 是奇数,所以排列 Ⅲ 与排列 Ⅳ 奇偶性相反.

推论 n 个数码($n\geqslant 2$)的奇排列与偶排列个数相等.

证明 设 n 个数码的全部不同的偶数排列

$$i_1\ i_2 \cdots i_n$$

$$j_1\ j_2 \cdots j_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$k_1\ k_2 \cdots k_n$$

交换所有这些偶排列的第一个和第二个数码，得下面排列

$$i_2\, i_1 \cdots i_n$$

$$j_2\, j_1 \cdots j_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$k_2\, k_1 \cdots k_n$$

显然，这些排列都为奇排列，且互不相同，所以 n 个数码的奇排列个数要大于等于偶排列个数，同理可以证明偶排列的个数大于等于奇排列个数，因而它们相等.

下面我们给出 n 阶行列式的定义. 取 n^2 个数 a_{ij} 构成下面方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

方阵(1) 是由 n 个行和 n 个列所组成的(横的称为行，竖的称为列)，n 称为方阵的阶，数 a_{ij} 称为(1) 中的元素，元素 a_{ij} 中的数码 i 表示元素 a_{ij} 在方阵(1) 中的行数，数码 j 表示 a_{ij} 在方阵(1) 中的列数.

定义 2　n 阶方阵(1) 所确定的 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \tag{2}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 取遍 n 个数码的所有排列，因而 n 阶行列式是 $n!$ 个项的代数和. 而它的每一项都是 n 个数的乘积，符号由排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的奇偶性来确定.

由行列式的定义不难得出，它的每一项都是由不同行不同列元素的乘积所组成，所以容易计算出二阶与三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{4}$$

定理 2 令

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{5}$$

是 n 阶行列式(2) 中任意一项，并设排列 $i_1\,i_2\cdots\,i_n$ 与 $j_1\,j_2\cdots\,j_n$ 的反序数分别为 s 与 t，则(5) 的符号为$(-1)^{s+t}$.

证明 由行列式定义知，确定项(5) 的符号，需要把组成项(5) 的各元素的次序进行调动，使其行的下标排成自然顺序. 为此我们先研究一下在交换项(5) 中某个元素的位置时，其行标和列标所成排列的奇偶性发生什么变化.

如果交换项(5) 中某两个因子位置，那么相当于项(5) 的元素的行标和列标所成的两个排列同时经过一次对换，因而行标排列与列标排列同时改变奇偶性，因而总体说来并没有改变 $\tau(i_1\,i_2\cdots\,i_n)+\tau(j_1\,j_2\cdots\,j_n)$ 的奇偶性，这样一来我们总可以经过若干次交换项(5) 中的因子次序使其变为

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n} \tag{6}$$

由行列式定义知(6) 的符号$(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$.

而 $$(-1)^{s+t} = (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$$ 证毕

关于行列式每一项的符号问题，我们这里再从几何的角度说明一下. 在行列式(1) 中每两个不同行不同列的元素都可以连结一个线段，如果这一连线由上往下看是由左到右，我们就规定其为正斜率线段；如果这一连线由下往上看是从左到右，我们就规定其为负斜率线段，例如在 3 阶行列式(4) 中，a_{12} 到 a_{21} 的连线是负斜

率线段，而 a_{12} 到 a_{23} 的连线却是正斜率线段. 显然 n 阶行列式中每一项是 n 个元素的连乘积，因而每一项在方阵中共有 C_n^2 个连线，如果其中负斜率线段有奇数个，则该项符号为负，否则为正. 因为不难看出每一个负斜率线段都对应着排列的一个反序.

例 1　计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

解　上述行列式

$$D = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3 i_4)} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4}$$

由于 i_1 只有两种选择，i_2, i_3, i_4 也分别只有两种选择，当 $i_1 = 1$ 时，i_4 只能得 $i_4 = 4$，所以 D 中有 a_{11} 的项有两个：$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，D 中有 a_{14} 的项也有两个 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 和 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$. 最后加上各项符号有

$$D = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$$

例 2　求证

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

证明　由行列式定义

$$D = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4} a_{5i_5}$$

由于 $i_3 i_4 i_5$ 必须取 3 个不同的数字，所以 $i_3 i_4 i_5$ 中至少有一个取 3，或取 4，或取 5，不可能全都取 1 和 2. 所以 D 中每一项都有零因子，所以 $D = 0$.

习　　题

1. 若 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = k$，求 $\tau(i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1) = ?$
2. n 个数码所有排列的反序数总和为多少？
3. 求证任意一个排列都可经过与其反序数相同次数的对换化为自然排列.
4. 在 6 阶行列式中下面各项是什么符号？

   Ⅰ $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$

   Ⅱ $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$
5. 在 4 阶行列式中，写出包含因子 a_{23} 且符号为正的项.
6. 在 n 阶行列式中，$a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$ 的符号是什么？
7. 计算下面行列式

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

§2　行列式性质

1. 转置运算．将行列式的行与列互换，即下面的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$