高等职业教育规划教材

线性代数

MATHEMATICS

MATHEMATICS

南方出版社

MATHEMATICS

高等职业教育规划教材

线性代数

MATHEMATICS

主　编　张孝理

副主编　周元明　陈运胜

MATHEMATICS

南方出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张孝理主编.—海口:南方出版社,2008.2
ISBN 978—7—80760—070—1

Ⅰ.线… Ⅱ.张… Ⅲ.线性代数—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第012306号

线 性 代 数

Xianxing Daishu

主编 张孝理

□**责任编辑** 易先彬
□**出版发行** 南方出版社
社址 海南省海口市和平大道70号
邮编 570208
□**印 装** 湖南东方速印科技股份有限公司

□**开本** 880×1230 32开
□**印张** 6.25
□**字数** 162千字
□**版次** 2008年2月第1版第1次印刷
□**定价** 12.00元

(图书凡有印装差错,请向承印厂调换)

前　言

本书是高等职业教育规划教材.

本书在内容选择上依据教育部有关本课程的教学大纲和教学基本要求,联系高职高专工科专业实际,突出“精选、够用”特色;在内容表述上力求深入浅出,通俗易懂,适应面宽,便于自学;同时既注重吸取传统教材的优点,又力求转变教育思想,体现教学改革精神.可以说,本书凝聚了我们多年从事线性代数教学的经验,适应现代高等职业教育发展的新形势.

新编这套教材是高等职业教育教材建设的一个尝试,由于我们水平有限,加之时间仓促,书中可能存在一些不妥之处,恳请读者和同行指正.

本书第一、二章由湖南化工职业技术学院张孝理教授编写,第三、四章由湖南工业大学(冶金校区)周元明教授编写,第五章由湖南工业大学(冶金校区)陈运胜副教授编写,全书由张孝理教授统纂主编.

编　者

2007 年 12 月

目　录

第一章 行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具.本章将由简单的二、三阶行列式推广到 n 阶行列式,然后讨论 n 阶行列式的性质及其计算方法,最后介绍利用行列式来解线性方程组的克莱姆(Gramer)法则.

§1.1 二阶、三阶行列式

行列式的要领是从解线性方程组的需要中引进来的. 所谓线性方程组是指未知项的最高次数是一次的方程组,其中最简单的是在中学时已经学习过的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 a_{ij} 表示第 i 个方程中第 j 个未知数的系数,b_i 表示第 i 个方程的常数项.

用加减消元法来解方程组(1.1),第一、二两式分别乘以 a_{22},a_{12},然后相减,消去未知数 x_2,得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

同理消去未知数 x_1,得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组(1.1)有惟一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了便于记忆上述公式，我们引入如下记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

称为二阶行列式，其中 a_{ij} 称为这个行列式第 i 行第 j 列的元素，横排为行，竖排为列．

由(1.2)式，二阶行列式是四个数排成两行两列，用一种称为对角线法则计算得出的数，从左上角到右下角（主对角线）上元素相乘，取正号，右上角到左下角（次对角线）上元素相乘，取负号，两个乘积的代数和就是二阶行列式的值．

当 $D\neq0$ 时，利用二阶行列式，方程组(1.1)的解可以用公式表示成：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.3}$$

其中 D_1、D_2 分别是用常数项 b_1，b_2 代替 D 中的第一、第二列所得到的二阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

因 D 的每个元素是方程组(1.1)的未知数的系数按原顺序排列，故称为方程组(1.1)的系数行列式．

引入二阶行列式来表达二元线性方程组(1.1)的解的公式(1.3)，它形式简单，便于记忆，且鲜明地给出了方程组(1.1)的解与其系数和常数项的关系．

例1 解方程组

$$\begin{cases} x_1-\dfrac{1}{2}x_2=1, \\ 2x_1+x_2=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

解 计算三个二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2,\quad D_1=\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{4},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{5}{2}.$$

由公式(1.3)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{3}{8},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{5}{4}.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1.4}$$

与解二元线性方程组类似,先由第一、二两个方程消去 x_3,得到只含有 x_1,x_2 的一个二元方程,再由第一、三两个方程消去未知数 x_3,得另一个只含有 x_1,x_2 的二元方程,由所得两方程消去 x_2,得到仅含一个未知数 x_1 的方程

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}\\ &-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

记 x_1 的系数为

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\\ &\quad-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},\end{aligned}\tag{1.5}$$

称为三阶行列式.

若此行列式 $D\neq 0$，则得未知数 x_1 的值

$$x_1=\frac{D_1}{D},\tag{1.6}$$

同理可得 $$x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 是用常数项 b_1,b_2,b_3 代替 D 中第 j 列所得到的三阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix};D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix};$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

由(1.5)式，三阶行列式是九个数排成的三行三列，表示(1.5)式右边的六个乘积项的代数和．仍可采用对角线法则来计算：在 D 的右边添上 D 的第一、二两列，得

$$D=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{array}\right.$$

D 的值等于上图对角线上三个元素乘积的代数和，主对角线(实线)上的乘积项取正号，次对角线(虚线)上的乘积项取负号．

例 2 解方程组 $$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3,\\ -2x_1+x_2-x_3=-3,\\ x_1-4x_2+2x_3=-5.\end{cases}$$

解 用对角线法则计算四个行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=11,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ -3 & 1 & -1\\ -5 & -4 & 2\end{vmatrix}=33,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & -3 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{vmatrix}=11,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & -3\\ 1 & -4 & -5\end{vmatrix}=-22,$$

故 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3,\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=1,\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=-2.$

例 3 设甲、乙、丙三种化肥每千克氮、磷、钾的含量如右表．若把三种化肥混合，要求总重量 23 kg，且含磷 149 g，钾 30 g，问三种化肥各需多少克？

成份 \ 化肥	氮	磷	钾
甲	70	8	2
乙	64	10	0.6
丙	70	5	1.4

解 设甲、乙、丙三种化肥各需 x_1,x_2,x_3 kg，依题意得方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=23\\ 8x_1+10x_2+5x_3=149\\ 2x_1+0.6x_2+1.4x_3=30\end{cases}$$

用对角线法计算四个行列式，得

$D=-27/5,D_1=-81/5,D_2=-27,D_3=-81,$

于是，$x_1=\dfrac{D_1}{D}=3,\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=5,\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=15.$

答 甲、乙、丙三种化肥各需 3 kg，5 kg，15 kg 才能满足要求．

在实际问题中往往会遇到未知数的个数不止三个的线性方程组，为了研究它们解的情况，需要把二、三阶行列式加以推广，引进 n 阶行列式的概念，并且讨论它的性质和计算方法．

习题 1.1

1. 计算下列二阶行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ 2 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 3 & \lambda-1 & 3 \\ 1 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$.

(ω 为 1 的虚立方根 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$).

3. 解方程组

(1) $\begin{cases} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta = a, \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta = b; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 8x+3y=2, \\ 6x+2y=3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x-z=1, \\ 2x+4y-z=1, \\ -x+8y+3z=2. \end{cases}$

4. 已知直流电路如图 1-1 所示，求 A、B、C 三点的电位 U_A、U_B、U_C.

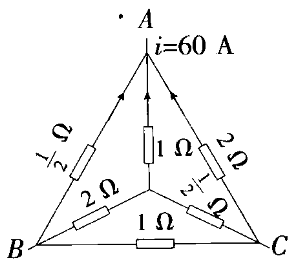

图 1-1

§1.2　n 阶行列式的定义

为了定义 n 阶行列式，我们先来看三阶行列式(1.5)是按照什么规律构成的.

把三阶行列式(1.5)改写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1.7)$$

(1.7)式的右端是三项的和,每一项恰恰是左端三阶行列式的第一行的元素与从该三阶行列式中删去 a_{1j}所在的行和列以后所得的二阶行列式的乘积;每一项前面的符号由 a_{1j}的行数与列数之和($1+j$)来决定,即每一项的前面冠以符号$(-1)^{i+j}$.

为方便计算,我们规定在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中删去 $a_{ij}=(i,j=1,2,3)$所在的行与列,余下的元素按原来的顺序构成的一个二阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素 a_{ij}的代数余子式,记作 A_{ij},即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

例如:a_{21}的余子式和代数余子式分别是

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(1.6)式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (1.8)$$

这说明:三阶行列式可以表示成其第一行元素与对应于它们的代数余子式的乘积之和．也就是说,三阶行列式可以由相应的三个

二阶行列式来定义.

我们规定:一阶行列式就是这个数的本身,即

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

这样,二阶行列式也同样可以用余子式和代数余子式来定义,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}. \tag{1.9}$$

类似地,定义四阶行列式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \qquad (1.10) \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \end{aligned}$$

我们从二、三、四阶行列式的展开式(1.8)、(1.9)、(1.10)中发现它们遵循着一个共同的规律——可以按第一行展开.因此,我们用递归法给出 n 阶行列式的定义.

定义 1 当 $n=1$ 时,规定一阶行列式为

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

当 $n>1$ 时,规定 n 阶行列式为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}a_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

其中 A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式,即

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,j-1} & a_{3\,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

M_{1j}称为元素 a_{1j}的余子式.

(1.11)式通常称为 n 阶行列式按第一行元素的展开式. a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn}所在的对角线称为行列式的主对角线,相应地, a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn}称为主对角元素. a_{n1}, a_{n-12}, $\cdots$, a_{1n}所在的对角线为行列式的次对角线,其元素称为行列式的次对角线元素.

由定义 1 可以用数学归纳法证明: n 阶行列式是个数值,它是由其 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$中所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和,它总共有 $n!$ 项,其中带正号的项和带负号的项各占一半.

例 1 证明 n 阶下三角形行列式(当 $i<j$ 时, $a_{ij}=0$,即主对角线以上的元素全为零)等于主对角元素的乘积,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 对 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时,结论显然成立. 假设当 $n=k$ 时,结论成立. 则对 D_{k+1}按第一行展开,有

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & a_{k+1\,3} & \cdots & a_{k+1\,k+1} \end{vmatrix}$$

$$
=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k+12} & a_{k+13} & \cdots & a_{k+1\,k+1} \end{vmatrix}
$$

$$
=a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{k+1\,k+1})=a_{11}a_{22}\cdots a_{k+1\,k+1}.
$$

由数学归纳法知，结论对一切的自然数 n 均成立．

特别地，对于 n 阶对角行列式，有

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.
$$

例 2　计算 n 阶行列式

$$
D_n=\begin{vmatrix} \mathbf{0} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & * & \end{vmatrix},
$$

其中次对角线以上的元素全为零，次对角线以下 $*$ 处元素可为任意数．

解　依定义 1，得

$$
D_n=\begin{vmatrix} \mathbf{0} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & * & \end{vmatrix}=(-1)^{1+n}\cdot a_1\begin{vmatrix} \mathbf{0} & & & a_2 \\ & & a_3 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & * & \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{1+n}a_1D_{n-1}.
$$

由此递推公式可得

$$
\begin{aligned}
D_n &=(-1)^{1+n}a_1D_{n-1}=(-1)^{n-1}a_1D_{n-1} \\
&=(-1)^{n-1}a_1\cdot(-1)^{(n-1)-1}a_2D_{n-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{(n-1)+(n-2)} a_1 a_2 D_{n-2} \\
&= \cdots = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} a_1 a_2 \cdots a_n \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.
\end{aligned}
$$

类似于定义 1 的讨论,可以更一般地给出 n 阶行列式按任意一行(或列)展开的定义:

定义 2 当 $n=1$ 时,规定一阶行列式为

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

当 $n>1$ 时,规定 n 阶行列式为

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}
$$

$$(i=1,2,\cdots,n), \tag{1.11}$$

或 $D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} (j=1,2,\cdots,n).$ (1.12)

它们称为 n 阶行列式按第 i 行(或第 j 列)元素的展开式. 可以证明,定义 2 和定义 1 是等价的.

例 3 证明 n 阶上三角形行列式(当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$,即主对角线以下的元素全为零)等于主对角元素的乘积,即

$$
D_n = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.
$$

证 由定义 2,将 D_n 按第 1 列展开得

$$
D_n = a_{11}\begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = a_{11}D_{n-1}.
$$

由此递推公式，继续将 D_{n-1} 按第 1 列展开，…，得

$$D_n = a_{11} \cdot a_{22} D_{n-2} = \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例 4 用行列式定义计算下列 n 阶行列式：

$$(1)\ D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix};$$

$$(2)\ \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解(1)依定义 2，将 D_n 按第 n 行展开，得

$$D_n = (-1)^{n+n} n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

由例 2 知，右端的 $n-1$ 阶行列式的值为

$$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1 \cdot 2 \cdots (n-1),$$

故

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!\ .$$

(2)依定义 2，将 D_n 按第 1 列展开，得

$$\Delta_n = (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

右端的 $n-1$ 阶行列式是三角形行列式，由例 1(或例 3)知此