

CHUDENG SHUXUE YANJIU

数学·统计学系列

初等数学研究(II) 下

甘志国 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

主要内容

初等数学研究(II)下

● 甘志国 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书包括整数性质、不定方程、现行高中数学教科书 11 章内容(集合与逻辑、函数与方程、数列、三角、平面向量、不等式、平面解析几何、立体(平面)几何、排列、组合与二项式定理、概率与统计、极限与导数)、数系、教材研究、数学竞赛、数学问题、数学应用、数学试题、数学史话、趣味数学、其他等 22 个部分的初等数学研究方面的论文 387 篇(其中 189 篇以前曾发表过,有些文章是由发表的多篇文章综合成的),每篇文章各自独立成文。本书注重了科学性、系统性和趣味性,可供中学、大学师生及初等数学爱好者阅读、钻研,也可作为高三学生在数学高考复习备考时参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究. 2. 下/甘志国著. —哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2009. 4

ISBN 978-7-5603-2820-1

I. 初… II. 甘… III. 初等数学-研究 IV. Q12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 032357 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 唐 蕾 翟新烨

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm × 960mm 1/16 印张 75 字数 1428 千字

版 次 2009 年 5 月第 1 版 2009 年 5 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-2820-1

定 价 118.00 元(上,下)

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

目 录

平面解析几何

也谈曲线相似	3
对一道高考题的研究	5
2007 高考(重庆卷)压轴题的一般情形	7
2006 年莫斯科大学入学试卷的一道压轴题的一般情形	10
理解·巧记·应用	12
2008 年高考试题北京卷(理科)解析几何大题的简解	13
过有些点不能作双曲线的中点弦	16
形同质异的解析几何题	19
一道求离心率题的简解	20
圆锥曲线的切点弦、中点弦、切线方程	22
对称轴是 $y = \pm x + b$ 的轴对称问题的简单解法	23
对一道课本习题的探究	27
对一道小题的探究	29
两道(国内外)考题的一般情形	30
一个圆的问题的一般结论	35
过定点与定双曲线有唯一公共点的直线有哪几条	37
用平面几何知识帮助解答解析几何题	38
也谈“由圆生成圆锥曲线”	43
圆或椭圆的切线的求法	46
一道题的一般情形及其简洁解法	48
三条直线围成的三角形面积公式	49
对 2005 年高考湖北卷文科、理科压轴题的研究	51
“圆锥曲线的又一性质”的补充	55
直线分有向线段所成的比及其应用	57
用“三角形的两边之差小于第三边”求最值	60
椭圆上四点共圆的充要条件及其简证	62

对一道题的研究	64
中心二次曲线的一条性质——兼否定一条猜想	67
一道题的五种解法	70
例谈关于双曲线焦半径的习题的解法	74
一道最值题的解法	78
对《新题征展(102)》中三道题的注记	80
关于直线方程的两点式的一个简洁结论及其运用	86
对 2008 年高考江苏卷(理科)第 9 题的研究	89

立体(平面)几何

四种 Fermat 点及其作法	93
几种成比例线段题的证明方法	98
何谓点到射线的距离?	100
几何三文	102
立体几何中的两个“直线条数”问题及其解答	104
从三角余弦定理到三垂线定理	106
对课本公式 $\cos \theta = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2$ 的加强及其应用	107
求二面角大小的适用向量方法	109

排列、组合与二项式定理

$(ax + by)^n$ 的展开式系数绝对值的单峰性	113
错位数公式的化简	116
一种有趣的排列	118
一道简单的计数原理趣题	119
用四面体解决异面直线的计数问题	120
用“五环旗”解一道数学题	121
组合数的性质 $iC_n^i = nC_{n-1}^{i-1}$ 在方差中的运用	122
传球问题的一般解法	124
一个组合恒等式的简证	127
几个排列恒等式及两类递推数列	128

概率与统计

已经试验过的事件不是随机事件	133
----------------------	-----

骰子的妙想	135
最佳查血方案问题	137
你是否决定打开另一只信封	141
一道课本例题的广义形式	143
快求一类期望	145

极限与导数

蠕虫爬橡皮绳问题	149
请不要轻信你的猜想	151
介绍洛必达法则	153
用导数研究一个猜想	154
平均每个人查血次数的最小值	157
对两个结论的注记	159
$(1+x)^a$ 的展开式的应用	163
极限与导数三文	167
一道课本趣题的伴随问题	169
2008 年高考试题(辽宁理科卷)压轴题的简解	171
一道例题的简解	173
由数学问题 1749 得到两类有极限的数列	174
对渐近线的定义及求法的质疑	177
谈谈切线的定义	180
几个含无限步运算的函数的定义域和值域	182
对 2008 年高考江苏卷压轴题的深入研究	191
对一道高考题和一道研究生试题的再研究	195

数 系

循环小数的一个猜想的证明	201
纯循环小数的一个猜想的推广	203
关于循环小数的几个猜想的证明	207
一个奇妙的分数	209
复数不能比大小	210
国家公务员考试中的数字计算趣题	211
分数与小数的互化及纯循环小数的性质	216

教材研究

对人教版教科书(必修)《数学·第一册(上)》的若干思考	223
对人教版教科书(必修)《数学·第一册(下)》的若干思考	233
对人教版教科书(必修)《数学·第二册(上)》的若干思考	243
对人教版教科书(必修)《数学·第二册(下 A)、(下 B)》的若干思考 ...	258
对人教版教科书《数学·第三册(选修 II)》的若干思考	263

数学竞赛

一道加拿大数学竞赛题的推广	271
一道全国联赛试题一般情形的简洁解法	273
新加坡中一、二数学竞赛题选	275
介绍两道竞赛题	279
谈谈第四届“希望杯”(高一初赛)压轴题	281
一个三角形的面积	283
2004 年全国高中联赛压轴题的别证及推广	285
一道赛题的又一解法	287
IMO41-2 及与之等价的几道奥赛题	289
一道“希望杯”赛题的另证	291
IMO32 中一道试题的推广	292
一道西部数学奥赛题与一道高考压轴题的联系及区别	294

数学问题

争鸣	299
对一个问题的研究	307
《数学通讯》问题征解第 145 题的解答	309
《湖南数学通讯》中学数学问题 2 的解答	312
对一个问题的部分解答	316

数学应用

一道合理选址问题的推广	323
人生“算术”	325
用计算风格学证明“作者是谁”	328
概率帮了盟军	331

时间就是金钱——算一算你的一分钟值多少钱	332
烧焦的遗嘱	333
推铅球的最佳抛射角应小于 45°	335
数学应用三文	337
参赛应用题选登	339
新编应用题选登	342
应用题新编选登	346
伏尔泰拉与生物数学	348
即将来临的数字时代	349
早期的航空事业与数学	350
笔尖下的行星	352
高三数学《数学应用》水平测试	353
介绍书号、刊号的校验码	359

数学试题

排列、组合和二项式定理趣题	363
排列组合、二项式定理同步测试题	365
综合题新编选登	371
新题征展	382
课外练习	409

数学史话

祖冲之的精细严密	415
康熙大帝与数学大师	416
东方第一个几何学家	417
缅怀国际数学大师陈省身	419
几何学之父——欧几里得	421
想撬动地球的阿基米得	423
莱布尼兹对康熙的仰慕之情	425
海内存知己 天涯若比邻	426
拉格朗日的成才之路	427
闵可夫斯基与四色猜想	429
巧借他山之石 妙攻本地之玉	430
数学家的文学修养	431

天才的品格	432
他未到 13 岁就赢得 IMO 金牌	433
数学史六文	434
最有影响的七部数学名著	438
业余数学家韦达	439
失明的数学家欧拉	440
成绩不佳的数学大师	442
数学王子高斯	443
科学家的另一面	445

趣味数学

钟表上时针、分针、秒针所夹的角度	449
谈多边形的剪拼	452
神奇的指数效应	454
趣谈无理数 e	457
服饰商的难题	459
“摸球赢钱”的把戏	461
π 的一些奇异特征	463
有趣的十位数	465
什么能使生活变得圆满?	466
动物世界中的“数学家”	467
加德纳的数学趣题	468
10 与 9 的差别不仅仅是 1	470
幽默风趣的“十字令”	471
对联中的数学演算	472
妙联趣语	473
用数学眼光看世界(1)	475
用数学眼光看世界(2)	477
用数学眼光看世界(3)	481
用数学眼光看世界(4)	482
用数学眼光看世界(5)	484
数学计算的智巧	486
数学趣题(1)	488
数学趣题(2)	491

数理结合题欣赏	497
趣苑拾贝(1)	491
趣苑拾贝(2)	502
趣苑拾贝(3)	506
趣苑拾贝(4)	510
数学谜语(初中)	513
数学谜语(高中)	517
不可或缺的常数	518
巧填数学词语	519
$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ 的推广	520
国语中的数字	521
加法“链条”	522
买土地的故事	523
漂洗衣服	524
求 $1 + 2 + \cdots + n$ 的异类问题	525
数学格言四则	527
数学趣题	528
数学天才——诺伯特·维纳	531
自叙数与反自叙数	532
最高的、最矮的	533
最美的数学定理	534
趣题“四位王子”	538
“智猪博弈”、竞争及学校管理	540
又一组“似非而是”的等式	542
又两组“金蝉脱壳”数组	544

其 他

理化四文	549
怎样撰写初等数学论文	552

平面解析几何



也谈曲线相似

我们学过相似多边形,你可曾注意过相似曲线?在千姿百态的曲线世界中,分清哪些曲线具有相似性质,对于我们认识各类曲线的“面目”是十分有益的.文献[1]就证明了所有的抛物线相似,本文再给出一种判定曲线相似的方法.

定义^[2] 若曲线 C 上的任意两点 A, B 的连线 AB 与曲线 C' 上对应的两点 A', B' 的连线 $A'B'$ 的比值为定值 k ,则称这两条曲线 C 与 C' 相似,记作 $C \sim C'$,并且说 C 与 C' 的相似比是 k .

不难看出,这个定义是三角形与多边形相似定义的推广.

平面曲线相似的判定定理 曲线 $C: F(x, y) = 0$ 与曲线 $C': F(kx, ky) = 0$ (k 是非零常数) 相似,且相似比为 $|k|$.

证明 设 $M(x, y)$ 是曲线 C 上的任意一点,则 $F(x, y) = 0$,也得 $F(k \cdot \frac{1}{k}x, k \cdot \frac{1}{k}y) = 0$,这说明 $M'(\frac{1}{k}x, \frac{1}{k}y)$ 是 C' 上的点.我们就规定:

曲线 C 上点 $M(x, y)$ 的对应点是曲线 C' 上的点 $M'(\frac{1}{k}x, \frac{1}{k}y)$.

(这种规定满足:直线 MM' 经过坐标原点 O .)

可设曲线 C 上任意不同的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 的对应点分别是曲线 C' 上的点 $A'(\frac{1}{k}x_1, \frac{1}{k}y_1), B'(\frac{1}{k}x_2, \frac{1}{k}y_2)$.由两点间的距离公式可证得

$$\frac{AB}{A'B'} = |k| = \text{定值}$$

即定理成立.

推论 (1) 所有的直线相似,且相似比为 1;

(2) 任意两个圆都相似,且相似比为它们的半径之比;

(3) 任意两条抛物线都相似,抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 与 $C': y^2 = 2p'x$ ($p > 0$) 的相似比为 $\frac{p}{p'}$;

(4) 离心率相等的两个椭圆(双曲线)相似,且相似比为它们的焦距之比;

(5) 曲线 C (叫超圆^[3]): $|x|^n + |y|^n = r^n$ ($r, n \in \mathbf{R}^+$) 与曲线 $C': |x|^n + |y|^n = r'^n$ ($r' \in \mathbf{R}^+$) 相似,且相似比为 $\frac{r}{r'}$.

证明 这里只证(3).

经过平移及旋转变换总可把两条抛物线都变成标准形式

$$C: y^2 = 2px (p > 0)$$

$$C': y^2 = 2p'x (p' > 0)$$

也即

$$C: y^2 = 2px (p > 0)$$

$$C': (\frac{p}{p'}y)^2 = 2p \cdot (\frac{p}{p'}x) (p' > 0)$$

由定理立知 $C \sim C'$, 且 C 与 C' 的相似比为 $\frac{p}{p'}$.

参考文献

- [1] 余学虎. 任意两条抛物线相似[J]. 数学通讯, 2005(9): 17.
- [2] 路见可. 谈相似形 —— 中学数学笔谈之三[J]. 数学通讯, 1998(9): 1-3.
- [3] 张文忠. 中学数学中的趣题[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1989.

对一道高考题的研究

2005 年数学高考湖北卷的文科压轴题(也是理科第 21 题)是:

设 A, B 是椭圆 $3x^2 + y^2 = \lambda$ 上的两点, 点 $N(1, 3)$ 是线段 AB 的中点, 线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C, D 两点.

(I) 确定 λ 的取值范围, 并求直线 AB 的方程;

(II) 试判断是否存在这样的 λ , 使得 A, B, C, D 四点在同一圆上? 并说明理由.

分析和解 (I) 求直线 AB 的方程, 通常是用待定系数法(可先设 $AB: y - 3 = k(x - 1)$) 及点差法, 但下面的对称法更简洁.

因为点 $N(1, 3)$ 是线段 AB 的中点, 所以可设 $A(x, y), C(2 - x, 6 - y)$, 由 A, B 均在椭圆上, 得

$$3x^2 + y^2 = \lambda, 3(2 - x)^2 + (6 - y)^2 = \lambda$$

所以 $3x^2 + y^2 = 3(2 - x)^2 + (6 - y)^2$, 即

$$x + y - 4 = 0 \quad \text{①}$$

① 即直线 AB 的方程. 理由: 由以上求法知, 点 $A(x, y)$ 在直线 ① 上, 又易验证点 $N(1, 3)$ 或 $B(2 - x, 6 - y)$ 也在直线 ① 上.

由点 $N(1, 3)$ 在椭圆内, 得 $3 \times 1^2 + 3^2 < \lambda$, 即 $\lambda > 12$, 且椭圆内的点都可作为椭圆的弦的中点, 所以 λ 的取值范围是 $(12, +\infty)$.

(II) (I) 的解答中已求出直线 AB 的方程: $x + y - 4 = 0$, 而 CD 是过点 $N(1, 3)$ 的 AB 的垂线, 所以直线 CD 的方程为 $x - y + 2 = 0$.

由直线 AB, CD 组成的曲线方程为

$$(x + y - 4)(x - y + 2) = 0$$

即

$$x^2 - y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$$

它与椭圆 $3x^2 + y^2 = \lambda$ 的交点 A, B, C, D 的坐标即方程组

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 6y - 8 = 0 \\ 3x^2 + y^2 = \lambda \end{cases} \quad \text{②}$$

③

的解, ③ - ②, 并整理得

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{\lambda - 3}{2} \quad \text{④}$$

即 A, B, C, D 四点必在圆 $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{\lambda - 3}{2}$ 上.

再结合(I)的答案知,当 $\lambda > 12$ 时,点 A, B, C, D 共圆(且在圆④上).

可以猜测这道高考题是由 2002 年高考数学江苏卷第 20 题改编的,原题是:

设 A, B 是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 上的两点,点 $N(1, 2)$ 是线段 AB 的中点.

(I) 求直线 AB 的方程;

(II) 如果线段 AB 的垂直平分线与双曲线相交于 C, D 两点,那么 A, B, C, D 四点是否共圆?为什么?

由这道高考题,笔者得到

定理 设两条直线 $l_i: y - y_0 = k_i(x - x_0) (i = 1, 2)$ 与二次曲线 $\Gamma: Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 (A \neq B)$ 有四个交点,则这四个交点共圆的充要条件是 $k_1 + k_2 = 0$.

证明 由 l_1, l_2 组成的曲线即

$$[y - y_0 - k_1(x - x_0)][y - y_0 - k_2(x - x_0)] = 0$$

所以,经过它与 Γ 的四个交点的二次曲线一定能表成 $(\lambda, \mu$ 不同时为 0) 以下形式

$$\lambda(Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E) + \mu[y - y_0 - k_1(x - x_0)][y - y_0 - k_2(x - x_0)] = 0 \quad (5)$$

必要性 若四个交点共圆,则存在 λ, μ 使方程⑤表示圆,故式⑤左边展开式中含 xy 项的系数 $-\mu(k_1 + k_2) = 0$. 而 $\mu \neq 0$, 否则⑤表示曲线 Γ , 不表示圆,所以 $k_1 + k_2 = 0$.

充分性 当 $k_1 + k_2 = 0$ 时,式⑤左边的展开式中不含 xy 的项,选 $\mu = 1$ 时,再令式⑤左边的展开式中含 x^2, y^2 项的系数相等,即 $\lambda A - k_1^2 = \lambda B + 1$, 得

$$\lambda = \frac{k_1^2 + 1}{A - B}.$$

此时曲线⑤即

$$x^2 + y^2 + C'x + D'y + E' = 0 \quad (6)$$

的形式,这种形式表示的曲线有且仅有三种情形:一个圆,一个点,无轨迹,而题中的四个交点在曲线⑥上,所以方程⑥表示圆.这就证得了四个交点共圆.

2007 高考(重庆卷) 压轴题的一般情形

2007 年高考(重庆卷) 的压轴题 22 是:

如图 1, 中心在原点 O 的椭圆的右焦点 $F(3,0)$, 右准线 l 的方程为 $x = 12$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 在椭圆上任取三个不同点 P_1, P_2, P_3 , 使 $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \angle P_3FP_1$, 证明: $\frac{1}{|FP_1|} + \frac{1}{|FP_2|} + \frac{1}{|FP_3|}$ 为定值, 并求此定值.

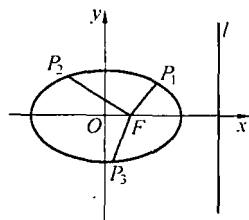


图 1

(答案: (1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$; (2) 定值为 $\frac{2}{3}$.)

由此题, 笔者得到了以下一般性的结论:

定理 1 设 $P_1, P_2, \dots, P_n (n \geq 3)$ 是椭圆 Γ 上的不同点, F 是 Γ 的一个焦点, 且 $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \dots = \angle P_{n-1}FP_n = \angle P_nFP_1$, 则 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{|FP_i|} = \frac{na}{b^2}$ (其中 a, b 分别是 Γ 的长半轴, 短半轴长).

定理 2 若双曲线 Γ 的一个焦点是 F , 且 Γ 的同一支上存在 $n (n \geq 3)$ 个不同的点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 满足 $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \dots = \angle P_{n-1}FP_n = \angle P_nFP_1$, 则 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{|FP_i|} = \frac{na}{b^2}$ (其中 a, b 分别是 Γ 的实半轴, 虚半轴长).

定理 3 若抛物线 Γ 的焦点是 F , 且 Γ 上存在 $n (n \geq 3)$ 个不同的点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 满足 $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \dots = \angle P_{n-1}FP_n = \angle P_nFP_1$, 则 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{|FP_i|} = \frac{n}{p}$ (其中 p 是 Γ 的焦点到准线的距离).

$$\text{引理 1}^{[1]} \quad \sum_{i=1}^n \cos i\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \cos \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad \sum_{i=1}^n \sin i\theta =$$