21世纪普通高等教育基础课规划教材

大学物理解题方法
——力学与电磁学

钟寿仙　张鹏　孙为　冷文秀　编

University Physics

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪普通高等教育基础课规划教材

大学物理解题方法

——力学与电磁学

钟寿仙　张　鹏　孙　为　冷文秀　编

机械工业出版社

本书为“大学物理学”的辅导教材，是中国石油大学（北京）为全校本科生开设的“大学物理解题方法”选修课教材，是“大学物理解题方法课程建设与研究”校级重点教改研究项目成果之一。

全书共8章，包括力学、电磁学和相对论等内容，每章内容分为7个板块：内容提要、教学基本要求、基本题型、解题方法介绍、典型例题、课堂讨论与练习和专题训练。书末提供了与“大学物理Ⅰ”配套的自测题、期中考试模拟试题和期末考试模拟试题及参考答案。

本书以系统地介绍大学物理解题方法为主线，突出地体现解题方法的归纳总结和指导，突出对大学生学习方法的引导和能力训练。典型例题侧重一题多解，以达到增强学生解题能力、拓展思路、举一反三和事半功倍的作用。本书所选题目大多来自国内具有较高水平的大学物理教材和辅导教材，部分是根据编者多年的教学积累自编的题目，所选题目从易到难，既有侧重基础知识、基本方法训练的基础题，又有侧重知识灵活运用、技巧训练、拓展知识和考查能力的提高题。本书可作为不同层次的工科院校的大学物理课程的辅导书，还可作为大学物理教师教学或其他读者自学的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理解题方法．力学与电磁学/钟寿仙等编．—北京：机械工业出版社，2009.2

21世纪普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-25882-7

Ⅰ．大…　Ⅱ．钟…　Ⅲ．①物理学－高等学校－解题②力学－高等学校－解题③电磁学－高等学校－解题　Ⅳ．04-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第205673号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：张金奎　版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣
封面设计：张　静　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2009年2月第1版第1次印刷
169mm×239mm · 12.25印张 · 236千字
标准书号：ISBN 978-7-111-25882-7
定价：17.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639　88379641　88379643
编辑热线电话：（010）88379722
封面无防伪标均为盗版

前　　言

“大学物理学”是理工科院校学生必修的一门重要基础理论课程，在培养创新人才方面，该课程具有其他学科无法替代的作用。该课程所讲授的基本概念、基本理论和基本方法是构成学生科学素养的重要组成部分，是一个科学工作者和工程技术人员必需的，是创新人才成长所必需掌握的。随着我校大学物理教学改革的深入，从2008年起，我校对全校本科生新增设了“大学物理解题方法”选修课程，该课程结合大学物理习题讨论和讲授，强化重点、突破难点、突出方法指导与训练，旨在较为系统、深入地向学生介绍和传授解决大学物理问题的方法，帮助学生更好地掌握物理学的基本概念、基本理论、基本方法，使理论知识与方法融会贯通，提高学生分析问题和解决问题的能力，为他们今后的学习打下扎实的物理基础。针对“大学物理解题方法”选修课教学内容，我们编写了《大学物理解题方法——力学与电磁学》及《大学物理解题方法——热学、波动与光学、量子物理基础》，并把本套教材作为该门选修课程的教材和“大学物理”的配套辅助教材。

本套书参考了许多国内相关教材，在孙为、邵长金、王爱军、张鹏编写的《大学物理辅导与习题》和钟寿仙、张鹏、冷文秀、陈少华等编写的《大学物理专题训练》校内讲义的基础上，结合编者多年来积累的教学经验和研究成果编写而成。该书从大学物理教学实际出发，以系统地介绍大学物理解题方法为主线，突出地体现解题方法的归纳总结和指导，注重大学生学习方法的引导与训练，以达到强化思维训练、提高学生分析问题和解决问题的能力的目的。本书是近年来编者主持的“大学物理思想与方法教学探索与实践”和“大学物理解题方法课程建设与研究”校级重点教改项目研究成果之一，该书在编写体系上有所创新，体现了综合素质和能力培养及教学改革思想，这也是本书的特色所在之处。

本套书由钟寿仙、张鹏、孙为总策划。承担本书编写工作的有：钟寿仙、张鹏、孙为、冷文秀，本书由钟寿仙和张鹏统稿。

本书的出版得到了中国石油大学（北京）数理系领导和物理教研室的同行以及部分学生的大力帮助和支持，在此向支持我们工作的全体师生表示衷心感谢。

由于我们学识有限，难免会有错误、疏漏和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2008年11月于中国石油大学（北京）

目　录

第 1 章　质点运动学

1.1　内容提要

（1）参考系：用以确定物体的位置所用的物体。

（2）运动函数（或运动方程）：

位置矢量：用以确定质点位置的矢量：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

位移矢量：质点在一段时间 Δt 内位置矢量的改变量：

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

（3）速度与加速度的定义：

速度：位置矢量对时间的变化率：$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

加速度：质点速度对时间的变化率：$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

（4）曲线运动的加速度：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$

法向加速度：$a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{\rho}$，方向：指向曲率中心。

切向加速度：$a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，方向：沿轨道切向（由$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$的正、负号来确定）。

圆周运动：$a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{R}=R\omega^2$，$a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha$

（5）伽利略速度变换：一个质点在两个相对平动的参考系中的速度之间的关系为

$$\boldsymbol{v}_{AC}=\boldsymbol{v}_{AB}+\boldsymbol{v}_{BC}$$

式中，$\boldsymbol{v}_{AB}$和$\boldsymbol{v}_{AC}$分别表示质点 A 相对于参考系 B 和 C 的速度；$\boldsymbol{v}_{BC}$是参考系 B 相对于参考系 C 的速度。

1.2　教学基本要求

（1）掌握位置矢量、速度和加速度等描述质点运动的物理概念，理解运动的矢量性、相对性和瞬时性。

（2）掌握运动的叠加原理。

（3）掌握质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度的概念及其计算方法。

（4）掌握运动学两类问题的求解方法。

（5）理解运动的相对性原理和伽利略变换，并掌握质点相对运动问题的计算方法。

1.3 基本题型

1.3.1 运动学第一类问题的求解

（1）已知运动函数（或运动方程）$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求速度、加速度、切向加速度、法向加速度、平均速度、平均加速度、位移、路程、任一时刻的位置以及轨道方程等。

（2）已知运动函数 $s=s(t)$ 或 $\theta=\theta(t)$，求速率、切向加速度、法向加速度、角速度、角加速度、角位移、角坐标等。

1.3.2 运动学第二类问题的求解

（1）已知加速度 $\boldsymbol{a}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 及位矢 $\boldsymbol{r}$（或坐标 x、y、z），求速度和运动函数。这属于积分问题。根据 $\boldsymbol{a}$ 是时间 t、速度 v 和位置 x 的函数，即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(v)$ 和 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x)$，应有不同的积分方法。

（2）已知角加速度 α、角速度 ω 及角坐标 θ 和初始条件，求任意时刻的角速度和角坐标。对应 $\alpha=\alpha(t)$、$\alpha=\alpha(\omega)$、$\alpha=\alpha(\theta)$ 三种情况，相应地也有三种积分方法。

1.4 解题方法介绍

1.4.1 质点运动的描述方法

物理学中描述的物体运动都是相对于参考系而言的相对运动——运动的相对性。即物体的运动只能相对于选定的参考系来确定，因此，要描述某个物体的运动，必须选取另一个物体或物体系作为参考系。

参考系的选择是任意的，一般以描述运动方便为原则。在力学中经常选取地面作为参考系，我们按惯例约定：如果不明确指出选用什么物体为参考系，就是以地面为参考系。

参考系分为惯性参考系（简称惯性系）与非惯性参考系（简称非惯性系）

两类。惯性定律（即牛顿第一定律）成立的参考系称为惯性系，否则为非惯性系。

为定量描述物体的运动，我们在参考系上建立与之固连（相对参考系固定不动）的坐标系，以便利用描述运动的矢量的正交分解式进行计算，最常用的是直角坐标系。如果运动是平面的二维问题，也可选用极坐标或自然坐标求解。坐标系的选择是任意的，实践中主要由问题的性质和处理问题的方便程度来决定。

1.4.2　运动学第一类问题的求解方法

已知运动函数求速度、加速度等，求解这类问题的数学方法为微分法。

解决这类问题的关键是求出质点的运动函数。如果题中给出的运动函数是矢量形式，则可采用直接微分求导的方法求得速度、加速度，在数学方法上为矢量微分运算；如果题中直接给出运动函数，则应明确运动函数与已知条件之间的关系，通常是通过几何约束关系列出包含中间变量的运动方程。这类问题常涉及到复合函数的微分运算。

1.4.3　运动学第二类问题的求解方法

已知加速度（或速度）和初始条件求运动函数，求解这类问题的数学方法为积分法。

这类问题常涉及到变量替换的问题，要求对定积分知识有较为全面的理解，从而掌握变量替换的技巧。

1.4.4　相对运动问题的求解方法

求解这类问题，一般是从相对性原理和伽利略变换出发，运用矢量方法求解。首先要明确研究对象，选择静止参考系和运动参考系，画出绝对速度、相对速度和牵连速度的矢量关系示意图，通过建立坐标系，列出方程求解。正确地画出速度矢量合成示意图是解决这类问题的关键。

1.5　典型例题

例题 1.1　已知质点的运动方程为 $x=1+2t^2$，$y=2t+t^3$。式中，t 以 s 计；x、y 以 m 计。求：$t=2\text{s}$ 时

（1）质点的位置。

（2）质点的速度。

（3）质点的加速度。

选题目的 速度和加速度的计算。

分析 本题属于质点运动学第一类问题，题中已给出质点的运动函数，所以，根据速度和加速度的定义，通过微分计算，可以求出速度和加速度的分量，从而得到速度和加速度的矢量表示式。

解 方法一 （1）当 $t=2\text{s}$ 时，质点的位置

$$x=1+2t^2\Big|_{t=2\text{s}}=9\text{m}$$

$$y=2t+t^3\Big|_{t=2\text{s}}=12\text{m}$$

所以质点位置为（9，12），或写成 $\boldsymbol{r}=9\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}$。

（2）质点的速度分量 $$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2+3t^2$$

当 $t=2\text{s}$ 时，$v_x=4t\Big|_{t=2\text{s}}=8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，$v_y=2+3t^2\Big|_{t=2\text{s}}=14\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，所以质点在该时刻的速度为 $\boldsymbol{v}=8\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}$。

（3）质点的加速度分量 $$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=4$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=6t$$

当 $t=2\text{s}$ 时，$a_x=4\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，$a_y=6t\Big|_{t=2\text{s}}=12\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，故质点在该时刻的加速度为 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}$。

方法二 （1）质点在任意时刻的位置矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t)&=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}\\&=(1+2t^2)\boldsymbol{i}+(2t+t^3)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

当 $t=2\text{s}$ 时，质点的位置矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t)&=\left[(1+2t^2)\boldsymbol{i}+(2t+t^3)\boldsymbol{j}\right]\Big|_{t=2\text{s}}\\&=9\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

（2）由速度定义 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，可得质点在任意时刻 t 的速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1+2t^2)\boldsymbol{i}+(2t+t^3)\boldsymbol{j}\right]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+2t^2)\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t+t^3)\boldsymbol{j}\\&=4t\boldsymbol{i}+(2+3t^2)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

当 $t=2\text{s}$ 时，质点的速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= [4t\boldsymbol{i} + (2+3t^2)\boldsymbol{j}]\Big|_{t=2\mathrm{s}}\\ &= 8\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

（3）由加速度定义 $\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，可得质点在任意时刻 t 的加速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[4t\boldsymbol{i} + (2+3t^2)\boldsymbol{j}]\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4t)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2+3t^2)\boldsymbol{j}\\ &= 4\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

当 $t = 2\mathrm{s}$ 时，质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = (4\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j})\Big|_{t=2\mathrm{s}} = 4\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j}$$

讨论　本题属于质点运动学第一类问题。本题用到的两种求解方法本质是相同的，但思考问题的角度不同。第二种方法是从质点位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$、速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 和加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ 的定义出发，直接进行矢量求导运算，先得任意时刻 t 的表达式，然后再求具体某一时刻质点的位置、速度及加速度，这种方法是一种由一般到特殊的求解思路。

例题 1.2　已知质点的运动学函数 $\boldsymbol{r} = R\ (\cos kt^2\boldsymbol{i} + \sin kt^2\boldsymbol{j})$。式中，$R$、$k$ 均为常量。求：

（1）质点运动的速度和加速度的表达式。

（2）质点的切向加速度和法向加速度大小。

选题目的　正确理解速度、加速度以及切向加速度和法向加速度的计算。

分析　本题已知位矢求速度和加速度，属运动学中的第一类问题。题中还涉及切向加速度和法向加速度的概念，可从定义出发计算结果。

解　（1）质点运动的速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[R(\cos kt^2\boldsymbol{i} + \sin kt^2\boldsymbol{j})]}{\mathrm{d}t}$$

所以，质点运动的速度的表达式为

$$\boldsymbol{v} = 2ktR(-\sin kt^2\boldsymbol{i} + \cos kt^2\boldsymbol{j})$$

由

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

得质点运动的加速度的表达式为

$$\boldsymbol{a} = -2kR(2kt^2\cos kt^2 + \sin kt^2)\boldsymbol{i} + 2kR(\cos kt^2 - 2kt^2\sin kt^2)\boldsymbol{j}$$

由运动方程，有 $r = |\boldsymbol{r}| = R$，故质点作圆周运动，其速率 $v = 2ktR$。

（2）质点的切向加速度和法向加速度的大小分别为

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2kR,\ a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{R} = 4k^2Rt^2$$

讨论

（1）由法向加速度定义 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$得知，对作圆周运动的质点，曲率半径就等于圆周半径 R，因此，求 a_n 的关键在于求出质点的速度的大小。

（2）由切向加速度定义 $a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$及其物理意义可知，$a_t$ 的大小等于质点的速度大小对时间的一阶导数，因此，求 a_t 的关键也在于求出质点的速度的大小。

（3）已知质点的运动函数，可求得质点的速度，从而加速度就完全确定了。本题给出了直角坐标系中的加速度表达式，请读者用自然坐标系中的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 表示加速度 $\boldsymbol{a}$。

例题 1.3 哈勃为美国天文学家，他于 1929 年根据河外星云的资料得出：河外星云正远离我们而去，而且离我们越远，速率越大，用 r 和 v 分别表示距离和速率，有 $v=H_0r$，式中 H_0 表示哈勃常数，上式称为哈勃定律。它是宇宙早期大爆炸理论的依据之一。运用哈勃望远镜测得

$$H_0=(80\pm17)\ \mathrm{km\cdot s^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$$

试根据哈勃定律估计宇宙年龄和大小。

选题目的 半定性和半定量研究方法估算宇宙年龄和大小。

分析 本题为运动方程的灵活运用，属于半定性和半定量的研究方法，涉及数量级估计，求解的关键是物理模型的建立。

解 根据宇宙早期大爆炸理论，宇宙始于大爆炸，且正在膨胀之中。为对宇宙年龄和大小作数量级估计，将宇宙近似看成是匀速膨胀的。

由哈勃定律得

$$t_0=\frac{r}{v}=\frac{1}{H_0}$$

代入数据，注意 $1\mathrm{Mpc}=10^6\mathrm{pc}=3.09\times10^{19}\mathrm{km}$，取

$$H_0=80\mathrm{km\cdot s^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$$

得

$$t_0\approx3.9\times10^{17}\mathrm{s}=1.2\times10^{10}\mathrm{a}$$

即 120 亿年。

此外，按相对论理论，一切物体的运动速度不超过光在真空中的速度，作数量级估计，假设宇宙以光速膨胀，得宇宙半径不会超过

$$R=ct_0=1.2\times10^{23}\mathrm{km}$$

讨论

（1）在物理学上，根据已有实验结论推出其他结果，常用到数量级估计的方法，这对于大空间高速运动的物理问题经常涉及。

（2）本题属于灵活运用的范例，计算量不大，方法简单，结论却很重要。

（3）天文观察表明，宇宙膨胀是减速的，其基本原因是由于万有引力的牵制。

例题 1.4　一质点从某时刻开始以初速度$\boldsymbol{v}_0$沿曲线运动，经过 Δt 时间后又回到出发点，其末速度为$\boldsymbol{v}$，已知$\boldsymbol{v}_0$与$\boldsymbol{v}$大小相等，两者夹角为 θ。试求：

（1）Δt 时间内的平均速度。

（2）Δt 时间内的速度增量。

（3）Δt 时间内的平均加速度的大小。

选题目的　正确理解平均速度、速度增量以及平均加速度的物理概念。

分析　由题意可知，质点经过 Δt 时间后又回到出发点时，其位移 $\Delta \boldsymbol{r}=0$，速度大小没变，但速度的方向发生了改变，根据题意可画出如图 1-1 所示的矢量示意图，由平均速度和平均加速度的定义即可求解。

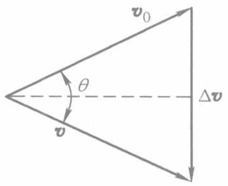

图　1-1

解　（1）由题意知 $\Delta \boldsymbol{r}=0$，故平均速度$\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=0$。

（2）Δt 时间内速度增量的方向如图 1-1 所示，其大小为 $|\Delta \boldsymbol{v}|=2v_0\sin\dfrac{\theta}{2}$。

（3）由平均加速度的定义得 $|\bar{\boldsymbol{a}}|=\left|\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}\right|=\dfrac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t}=\dfrac{2v_0\sin\dfrac{\theta}{2}}{\Delta t}$。

讨论

（1）速度是一个矢量，当其大小和方向中任意一个发生变化时，都将引起速度的改变，因而加速度就不等于零。

（2）平均速度和平均加速度都是对一段时间而言的，它们都是过程量。

（3）正确作出$\boldsymbol{v}_0$、$\boldsymbol{v}$和 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的矢量关系图容易得知平均加速度不等于零，并由图 1-1 所示的边角关系可求出平均加速度 $\bar{a}$ 的大小。由此题的求解可看出，正确作出速度矢量图有助于对平均速度、平均加速度等概念的理解。读者在学习大学物理时，应注重作图方法的学习。

例题 1.5　一质点沿半径为 R 的圆周运动，质点所经过的弧长与时间的关系为 $s=bt+ct^2$，其中 b、c 是大于零的常数。求：从 $t=0$ 开始到达切向加速度和法向加速度大小相等时所经历的时间。

选题目的　深入理解曲线运动中切向加速度和法向加速度的物理意义。

分析　本题已知位置矢量求速度和加速度，属运动学中的第一类问题。题中涉及到切向加速度和法向加速度的概念，仍从定义出发计算结果。

解　由题意可知，质点运动的速率为　$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=b+2ct$。

所以 $$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2c,\quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(b+2ct)^2}{R}$$

当 $a_t = a_n$ 时，$2c = \frac{(b+2ct)^2}{R}$，则 $t = \sqrt{\frac{R}{2c}} - \frac{b}{2c}$。

讨论

（1）本题是自然坐标系表示下的运动学第一类问题，即已知运动学函数求速度、加速度。在求解中要特别地注意 $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，也可以写成 $a_t = \frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}t}$，而不是 $a_t = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$，读者应特别注意加以区别这几个式子的物理意义。

（2）a_t 和 a_n 的物理意义是完全不同的，在已知轨道 $s = s(t)$ 时，a_t 和 a_n 均由质点的速度大小求得，由此题的求解，我们再次看到：求切向加速度 a_t 的大小和法向加速度 a_n 的大小的关键就在于求出质点的速度大小。

例题 1.6 一质点沿 x 轴运动，其加速度与位置的关系为 $a = -kx$，k 为常数。已知 $t=0$ 时，质点瞬时静止于 $x = x_0$ 处。试求质点的运动规律。

选题目的 用积分法由质点的加速度求质点位移与时间的表达式，即为质点的运动规律。

分析 由加速度求出质点的位移与时间的关系，一般来说，在数学上要采用降阶的办法，先积分求出速度，然后再次积分求得位移。

解 根据加速度的定义，有

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kx \tag{1}$$

而 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \tag{2}$$

两式相除，得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{kx}{v}$$

分离变量，得 $$v\mathrm{d}v = -kx\mathrm{d}x$$

两边取积分，并代入初始条件，得

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^x -kx\mathrm{d}x$$

$$v^2 = k(x_0^2 - x^2) \tag{3}$$

由式（2）和式（3）分离变量，并代入初始条件积分得

$$\int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \int_0^t \pm\sqrt{k}\mathrm{d}t$$

$$\arccos\left(\frac{x}{x_0}\right) = \pm\sqrt{k}t$$

$$x = x_0\cos\sqrt{k}t$$

讨论

（1）本题属于加速度与位移的函数关系为 $a = a(x)$ 的第二类运动学问题。此类问题不能直接积分，因为在式（1）表达式中存在着 v、x 和 t 三个变量，因此，必须消去一个变量。由于加速度为位移 x 的函数，所以，应消去时间变量 t，求出速度与位移之间的函数关系 $v = v(x)$；然后再根据速度的定义，求出位移与时间的关系。

（2）本题也可借助中间变量 x 和速度的定义，对加速度作$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$变换来消去时间变量 t，然后代入式（1）进行求解。请读者注意这种替换变量技巧的学习。

例题 1.7　质点沿半径为 R 的圆周运动，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 两者方向之间的夹角 θ 保持不变，已知初速率为 v_0，试求质点速率 v 随时间的变化规律。

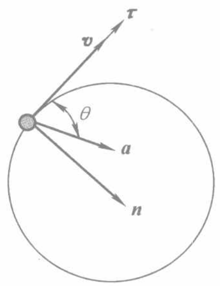

图　1-2

选题目的　由自然坐标系求速度随时间的变化规律。

分析　在已知质点的轨迹为曲线的情况下，一般采用自然坐标系求解。

解　根据题意建立自然坐标系，如图 1-2 所示，可得

切向加速度
$$a_t = a\cos\theta = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

法向加速度
$$a_n = a\sin\theta = \frac{v^2}{R} \tag{2}$$

二式相比，得

$$\tan\theta = \frac{a_n}{a_t} = \frac{v^2}{R}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}t}{R\tan\theta} = \frac{\mathrm{d}v}{v^2} \tag{3}$$

式（3）两边取积分，并代入初始条件得

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{R\tan\theta} = \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{t}{R\tan\theta}$$

讨论

（1）本题属于运动学的第二类问题。题中未给出加速度与时间之间的函数关系，因而不能直接积分求得 $v=v(t)$。

（2）本题求解的关键在于要理解加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角为加速度 $\boldsymbol{a}$ 与切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 之间的夹角，由此，可利用加速度的自然坐标分量式，即切向加速度 $a_t=\dfrac{dv}{dt}$ 和法向加速度 $a_n=\dfrac{v^2}{R}$ 以及相应的关系式 $\tan\theta=\dfrac{a_n}{a_t}$ 求解。

例题 1.8 一气球以速率 v_0 从地面上升，由于风的影响，随高度的上升，气球的水平速度 $v_x=by$ 增大，其中 b 为正的常数；y 是从地面算起的高度。x 轴取为水平向右为正。求：

（1）气球的运动方程。

（2）气球的轨迹方程。

（3）气球沿轨道运动的切向加速度和轨道的曲率半径与高度的关系。

选题目的 质点运动学两类问题综合练习。

分析 本题已知的是直角坐标系速度分量，而所要求的是自然坐标系的切向加速度和曲率半径等问题，因此，本题将应用直角坐标法和自然坐标法联合求解。

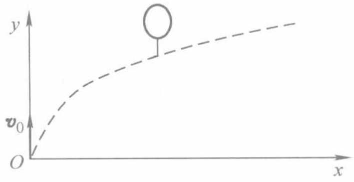

图 1-3

解 建立如图 1-3 所示的坐标系，取 $t=0$ 时，气球位于坐标原点（地面）。由已知条件 $v_x=by$，$v_y=v_0$，显然有

$$\frac{dx}{dt}=by=v_x=bv_0t$$

对上式分离变量，两边积分

$$\int_0^x dx=\int_0^t bv_0t\,dt$$

得

$$x=\frac{bv_0}{2}t^2$$

所以气球的运动方程为

$$\boldsymbol{r}=\frac{bv_0}{2}t^2\boldsymbol{i}+v_0t\boldsymbol{j}$$

轨道方程

$$x=\frac{b}{2v_0}y^2$$

球的运动速率

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{b^2y^2+v_0^2}=\sqrt{b^2v_0^2t^2+v_0^2}$$

所以，气球的切向加速度

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(v_0\sqrt{b^2t^2+1}\right)\quad\frac{b^2v_0t}{\sqrt{b^2t^2+1}}$$

$$=\frac{b^2v_0y}{\sqrt{b^2y^2+v_0^2}}$$

因 $a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}$，且有

$$a^2=a_x^2+a_y^2=\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2=b^2v_0^2$$

故气球的法向加速度

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\left(b^2v_0^2-\frac{b^4v_0^2y^2}{b^2y^2+v_0^2}\right)^{1/2}$$

$$=\frac{bv_0^2}{\sqrt{b^2y^2+v_0^2}}$$

又由 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$得

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{(b^2y^2+v_0^2)^{\frac{3}{2}}}{bv_0^2}$$

讨论

（1）从本题求解过程可知，涉及到两种坐标系联合求解质点同一运动时，找出两个坐标系的联系式是非常重要的。本题是通过速度 v（$=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$）与切向加速度 $a_t\left(=\dfrac{dv}{dt}\right)$和加速度 a^2（$=a_x^2+a_y^2$）与法向加速度 a_n（$=\sqrt{a^2-a_t^2}$）将直角坐标系和自然坐标系联系起来的，这是求解该题的关键。

（2）通过本题求解，我们应注意到，直角坐标法和自然坐标法是描述质点运动的两种方法，用两种坐标系表示的速度和加速度分量之间是不同的，但质点总的速度和加速度都是唯一确定的值。

（3）由于 $a_t=\dfrac{dv}{dt}$，所以求解切向加速度的关键是求出质点的速度 v。

（4）物理学求质点的轨道的曲率半径是通过 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$求解，即由速度和加速度物理量来求曲率半径 ρ，这与高等数学求法不同。

例题 1.9　如图 1-4 所示，在离水面高度为 h 的岸边上，有人用绳子拉船靠岸，收绳的速率恒为 v_0，求船在离岸边的距离为 x 时的速度和加速度。

选题目的　加速度与速度定义的灵活应用计算。