高等代数中的典型问题与方法

李志慧 李永明 编

与北京大学数学系几何与代数教研组编写的

《高等代数(第三版)》配套

科学出版社
www.sciencep.com

高等代数中的典型问题与方法

李志慧　李永明　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是为正在学习高等代数的读者、正在复习高等代数准备报考研究生的读者以及从事这方面教学工作的年轻教师编写的.

本书与北京大学数学系几何与代数教研组编写的《高等代数(第三版)》相配套,在编写上也遵循此教材的顺序.本书全面、系统地总结和归纳了高等代数中问题的基本类型、每种类型的基本方法,对每种方法先概括要点,再选取典型而有一定难度的例题,逐层剖析.对一些较难理解的问题,在适当的章节做了专题研究,进行了较深入的探讨和总结,如:线性变换的对角化、矩阵的分解等问题,以消除读者长期以来对其抽象问题在理解上含糊不清的疑虑,从而更深入地领会问题.

全书共分9章,42节,111个条目,约210个问题,涉及多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧氏空间.

本书大量采用全国部分高校历届硕士研究生高等代数入学试题,并参阅了50余种教材、文献及参考书,经过反复推敲、修改和筛选,在长期教学实践的基础上编写而成.选材具有典型性、灵活性、启发性、趣味性和综合性,配套的各节练习题可提高学生进一步分析问题和解决问题的能力,对培养学生的能力极为有益.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数中的典型问题与方法/李志慧,李永明编.—北京:科学出版社,2008

ISBN 978-7-03-022078-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①李… ②李… Ⅲ.高等代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第074756号

责任编辑:赵 靖 李晓鹏 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

明辉印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年9月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2008年9月第一次印刷 印张:23 1/4
印数:1—3 000 字数:440 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈明辉〉)

前　言

“高等代数”课是本科数学专业的一门重要的基础课，也是理工科大学各专业的重要数学工具. 它对数学专业的许多后继课程有直接影响，关系到学生数学素质的培养. 这门课程的特点是概念多，内容比较抽象. 在长期的教学实践中，我们深刻体会到，学生们学习和掌握教材的基本知识困难并不大，但要灵活运用基本概念和基础理论去分析问题和解决问题就感到困难，甚至不知如何着手. 为培养学生分析问题和解决问题的能力，目前已出版了大量相关书籍，但仍不能满足学生的要求. 分析其原因，有些书主要是解题，不去分析题中要考查的知识点，学生在学习过程中不能及时领悟和总结，从而学习后印象不深刻；有些书虽总结了知识点并附有配套的例题，但由于知识点或列举的不够详细，或缺乏配套例题，学生读后仍感到不系统. 在学生掌握了教材的基本知识后，若能有一本帮助他们巩固、加深、提高、扩大所学知识的书，对高等代数中的问题与方法进行全面系统的总结和分类指导，告诉读者应该如何分析和解决问题，这对培养读者的思维能力与独立解决问题的能力，从根本上强化已学知识，将是十分必要的.

考虑到这些需要，我们将全国各高校历届硕士研究生高等代数入学试题进行了一次全面的整理，逐题分析研究，比较分类. 同时参阅了国内 50 余种教材、文献和参考书，将这些教材中的知识点和方法进行了总结和归类. 然后，将整理好的知识点和归类后的试题进行一一匹配，有的试题我们附在了相应的练习题中，用于读者自检.

全书共分 9 章，42 节，约 111 个小条目，中心问题是向读者回答：**高等代数的每个单元到底有哪些基本问题？每类问题各有哪些方法？每种方法又有哪些富有代表性、典型性、又有相当难度，值得向读者推荐的好例题和练习？**

基于编写本书的上述宗旨，我们在对例题进行分类讲解时，特别注意了系统地讲述解题思想与解题方法，而不是题目的堆砌或单纯的题解. 全书每段先对所解问题以“要点”的形式进行概括性的阐述，然后由浅入深地安排一套一套的例题，对具体的方法和精神实质，加以“评析”，以拔高而达到更深层次的理解.

本书是笔者在陕西师范大学数学与信息科学学院为高年级学生讲授“高等代

数选讲”所写讲义的基础上编写的. 原讲义讲授了 6 届，听取了各方老师的意见，每届学生都积极纠正了讲义中的若干笔误，经过大量的修改和补充，我的学生杜康对全书定稿做了详细的校对，这在较大程度上减少了本书原稿中出现的错误.

作者十分感谢南开大学组合数学研究中心的李学良教授，作者硕士导师李尊贤教授，陕西师范大学数学与信息科学学院王国俊教授，陕西师范大学数学与信息科学学院刘新平教授，浙江理工大学理学院的樊太和教授以及荷兰 Twente 大学数学系的 Hoede 教授在各方面提供的帮助.

限于编者的水平，疏漏和不妥之处在所难免，恳请广大读者和同学指正.

编　者

2008 年 1 月 3 日于陕西师范大学

符　　号

$\mathbf{N}$　全体自然数组成的集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$.

$\mathbf{I}$　全体整数组成的集合.

$\mathbf{Q}$　全体有理数的集合.

$\mathbf{R}$　全体实数的集合.

$\forall$　对于任意给定的.

$\exists$　至少存在一个.

P　表示一个数域.

$P[x]$数域 P 上以 x 为未定元的一元多项式的全体.

$\partial(f(x))$　非零多项式 $f(x)$的次数.

$(a_{ij})_{m\times n}$　　矩阵$(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

$\det(a_{ij})_n$　n 次方阵$(a_{ij})_n$ 的行列式.

$|\boldsymbol{A}|$　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

A_{ij}　矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$中元素 a_{ij} 的代数余式.

$\boldsymbol{A}^*$　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

$r(\boldsymbol{A})$　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

$\boldsymbol{E}_n$　n 级单位矩阵.

I　恒同变换.

V_n　n 维线性空间.

$M_{m\times n}(P)$　数域 P 上 m 行 n 列矩阵的全体.

$L(V_n)$　线性空间 V_n 上线性变换的全体.

V_λ　以 λ 为特征值的特征子空间.

$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$　方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式.

$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$　向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的生成子空间.

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$　向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积.

$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$　向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的夹角.

$|\boldsymbol{\alpha}|$　向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度.

目　录

第1章　多　项　式

1.1　多项式的概念与运算

一、多项式的基本概念

a. 多项式的定义

要点　形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

称为数域 P 上以 x 为文字的一元多项式，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in P$，n 是非负整数. 当 $a_n\neq 0$ 时，称多项式 $f(x)$ 的次数为 n，记为 $\partial(f(x))=n$，并称 a_nx^n 为 $f(x)$ 的首项，a_n 为 $f(x)$ 的首项系数. a_ix^i 为 $f(x)$ 的 i 次项，a_i 称为 $f(x)$ 的 i 次项系数. 当 $a_n=\cdots=a_1=0$，$a_0\neq 0$ 时，称多项式 $f(x)$ 为零次多项式，即 $\partial(f(x))=0$；当 $a_n=\cdots=a_1=a_0=0$ 时，称 $f(x)$ 为零多项式，零多项式是唯一不定义次数的多项式.

b. 多项式的相等

要点　数域 P 上以 x 为文字的两个一元多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等是指它们有完全相同的项.

证明两个多项式的相等除了利用定义外，还可以在它们首项系数相等的情况下，来证明这两个多项式相互整除.

二、多项式的运算

要点　多项式可以进行加、减、乘运算，并有与整数相类似的性质. 当 $f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$ 时，多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 作运算后次数有下列性质：

1°　当 $f(x)\pm g(x)\neq 0$ 时，

$$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant\max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\};$$

2°　$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$.

例 1.1.1　(2007，大连理工大学)设 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 均为实系数多项式，证明：若有

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x),$$

则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

证明 若 $f(x)\neq 0$,则 $\partial(f^2(x))$ 为偶数,故 $g(x),h(x)$ 不能全为零,且 $\max\{\partial(g(x)),\partial(h(x))\}\geqslant 0$. 从而 $\partial(g^2(x)+h^2(x))$ 也是偶数. 即得 $\partial(xg^2(x)+xh^2(x))$ 为奇数,这与 $f^2(x)=xg^2(n)+xh^2(x)$ 矛盾. 故 $f(x)=0$,易得 $g(x)=h(x)=0$.

练 习 1.1

1.1.1 当 a,b,c 取何值时,多项式 $f(x)=x-5$ 与 $g(x)=a(x-2)^2+b(x+1)+c(x^2-x+2)$ 相等.

1.2 多项式的整除

一、带余除法及其计算

a. 带余除法

要点 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,$g(x)\neq 0$,则存在唯一的多项式 $q(x),r(x)\in P[x]$,使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x). \tag{1}$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$. (1)式中的 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式,$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式.

例 1.2.1 证明:一个多项式 $f(x)$ 可以唯一地表示成另一个多项式 $g(x)$ 的多项式,这里 $\partial(g(x))\geqslant 1$,即

$$f(x)=r_m(x)g^m(x)+r_{m-1}(x)g^{m-1}(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x),$$

其中 $r_i(x)\in P[x]$,$r_i(x)=0$ 或 $\partial(r_i(x))<\partial(g(x))$,$i=0,1,\cdots,m$,且这种表示法是唯一的.

证明 由带余除法有

$$\begin{aligned}
f(x)&=g(x)q_0(x)+r_0(x),\\
q_0(x)&=g(x)q_1(x)+r_1(x),\\
&\cdots\cdots\\
q_{m-2}(x)&=g(x)q_{m-1}(x)+r_{m-1}(x),
\end{aligned}$$

此时 $\partial(q_{m-1}(x))<\partial(g(x))$,这时令 $q_{m-1}(x)=r_m(x)$. 则有

$$f(x)=r_m(x)g^m(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x). \tag{2}$$

设

$$f(x)=s_k(x)g^k(x)+s_{k-1}(x)g^{k-1}(x)+\cdots+s_1(x)g(x)+s_0(x), \qquad (3)$$

且(3)中 $\partial(s_i(x))<\partial(g(x)), i=0,1,2,\cdots,k$,或 $s_i(x)=0$.

由(2),(3)有

$$[r_m(x)g^{m-1}(x)-s_k(x)g^{k-1}(x)+\cdots+(r_1(x)-s_1(x))]g(x)=s_0(x)-r_0(x).$$

比较两端次数得 $s_0(x)=r_0(x)$. 所以有

$$r_m(x)g^{m-1}(x)-s_k(x)g^{k-1}(x)+\cdots+(r_1(x)-s_1(x))=0,$$

得 $s_1(x)=r_1(x)$,如此进行下去,得

$$s_k(x)=r_k(x), k=0,1,2,\cdots,m.$$

b. 带余除法的计算格式

要点 用多项式 $g(x)\neq 0$ 除多项式 $f(x)$ 所得的商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$,可以通过中学学习的普通除法或长除法(例 1.2.1)进行.

评析 实质上,带余除法是一种完全机械的操作,但它往往过于繁琐,有时在计算时可以利用待定系数法来替代它. 利用待定系数法要注意保证 $\partial(f(x))=\partial(q(x)g(x))$,以及 $\partial(r(x)<\partial(g(x))$(当 $r(x)\neq 0$ 时).

c. 综合除法

要点 设以 $g(x)=x-a$ 除 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 时,所得的商 $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 及余式 $r(x)=c_0$,则比较 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 两端同次幂的系数得

$$b_{n-1}=a_n,\quad b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1},\quad \cdots,\quad b_0=a_1+ab_1,\quad c_0=a_0+ab_0.$$

可将以上 $n+1$ 个等式排成以下格式进行:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a & & +ab_{n-1} & +ab_{n-2} & \cdots & +ab_1 & +ab_0 \\ \hline & b_{n-1}(=a_n) & b_{n-2} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & c_0 \end{array}$$

用这种方法求商和余式(的系数)称为综合除法.

例 1.2.2 设 $f(x)=3x^4+x^3+x^2+3, g(x)=2x^2+x+1$,求 $g(x)$除 $f(x)$的商及余式.

解 利用长除法

$$
\begin{array}{l|l|l}
q(x) & f(x) & g(x) \\
\frac{3}{2}x^2-\frac{x}{4}-\frac{5}{8} & 3x^4+x^3+0x^2+x+3 & 2x^2+x+1 \\
 & 3x^4+\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2 & \\
\cline{2-2}
 & \quad -\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+3 & \\
 & \quad -\frac{2}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x & \\
\cline{2-2}
 & \qquad -\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{4}x+3 & \\
 & \qquad -\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{8}x-\frac{5}{8} & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad \frac{15}{8}x+\frac{29}{8} &
\end{array}
$$

故

$$3x^4+x^3+x+3=(2x^2+x+1)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{5}{8}\right)+\frac{15}{8}x+\frac{29}{8}.$$

例 1.2.3　把 $f(x)=x^5$ 表成 $x-1$ 的方幂和，即表成

$$c_0+c_1(x-1)+c_2(x-1)^2+\cdots$$

的形式.

解　由例 1.2.1 可知，用 $x-1$ 除 $f(x)$ 得余数 c_0，再用 $x-1$ 逐次除所得的商得到余数 c_1；这一过程可通过连续施行综合除法来实现.

由

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1=c_0 \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5=c_1 & \\
 & & 1 & 3 & 6 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 6 & 10=c_2 & & \\
 & & 1 & 4 & & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & 10=c_3 & & & \\
 & & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & 5=c_4 & & & &
\end{array}
$$

故

$$x^5=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5.$$

二、整除

a. 整除的判定

要点 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,如果存在 $q(x)\in P[x]$,使得

$$f(x)=q(x)g(x),$$

则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$(记为 $g(x)\mid f(x)$). 此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式,$f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式.

整除的判定除了利用定义外,常用的方法还有:

1° 设 $g(x)\neq 0$,利用带余除法. 即若 $g(x)\mid f(x)$ 当且仅当以 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式为 0.

2° 验根法. 设 c 为 $g(x)$ 在复数域 c 上的任一根,证明 c 也必为 $f(x)$ 的根(例 1.3.6 至例 1.3.10).

b. 整除的性质

由整除的定义易得:

1° 若 $f(x)\mid g(x),g(x)\mid f(x)$ 当且仅当存在 $c\in P$,使得 $f(x)=cg(x)$,其中 $c\neq 0$.

2° 若 $f(x)\mid g(x),g(x)\mid h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$.

3° 若 $g(x)\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,r$,则

$$g(x)\Big|\sum_{i=1}^{r}u_i(x)f_i(x),$$

其中 $u_i(x)\in P[x],i=1,2,\cdots,r$.

例 1.2.4 设 $f_0(x),f_1(x),\cdots,f_{n-1}(x)\in P[x]$,

$$x^n-a\Big|\sum_{i=0}^{n-1}f_i(x^n)x^i,\quad a\neq 0,a\in P,$$

则

$$x-a\mid f_i(x),\quad i=0,1,\cdots,n-1.$$

证明 由带余除法有 $f_i(x)=q_i(x)(x-a)+r_i,r_i\in P$. 则

$$f_i(x^n)=q_i(x^n)(x^n-a)+r_i,$$

故有 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f_i(x^n)x^i=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(x^n-a)q_i(x^n)x^i+\sum\limits_{i=0}^{n-1}r_ix^i$. 则由 $x^n-a\Big|\sum\limits_{i=0}^{n-1}f_i(x^n)x^i$,必有 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}r_ix^i=0$,即

$$r_i = 0, i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

因此 $x-a \mid f_i(x), i=0,1,\cdots,n-1$.

三、最大公因式及其求法

a. 最大公因式

要点 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，$P[x]$中的多项式 $d(x)$称为 $f(x), g(x)$的一个最大公因式，如果 $d(x)$满足：

(1) $d(x)$是 $f(x), g(x)$的公因式；

(2) $f(x), g(x)$的公因式全是 $d(x)$的因式.

若 $d(x)$是 $f(x), g(x)$的最大公因式，则 $cd(x)$也是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式，其中 $c\neq 0$. 用$(f(x), g(x))$表示 $f(x)$与 $g(x)$的首一的最大公因式.

b. 最大公因式的性质

1° 设 $d(x)$是 $f(x), g(x)$的最大公因式，则存在 $u(x), v(x) \in P[x]$，使得 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

提示：利用辗转相除法可得.

利用最大公因式的定义以及多项式相等的判定方法可得如下结论：

2° 设 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，则$(f(x), g(x))=(g(x), r(x))$.

3° $(f(x), g(x))=(f(x)+g(x), f(x)-g(x))$.

4° $(f(x)h(x), g(x)h(x))=(f(x), g(x))h(x)$，其中 $h(x)$为首一多项式.

5° $(f_1(x), g_1(x))(f_2(x), g_2(x))=(f_1(x)f_2(x), f_1(x)g_2(x), f_2(x)g_1(x), g_1(x)g_2(x))$.

例 1.2.5 证明：如果 $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$，且 $d(x)$为 $f(x)$与 $g(x)$的一个组合，则 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式.

证明 由已知有 $d(x)$是 $f(x), g(x)$的一个公因式. 设 $\varphi(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的任一公因式，下证 $\varphi(x) \mid d(x)$.

由 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个组合，即存在多项式 $u(x), v(x) \in P[x]$，使得

$$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x),$$

而 $\varphi(x) \mid f(x), \varphi(x) \mid g(x)$，故 $\varphi(x) \mid d(x)$.

综上可知，$d(x)$为 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式.

c. 最大公因式的求法

要点 利用最大公因式的定义以及例 1.2.5 可以求两个多项式的最大公因式，但这两种方法均适应于在理论上证明某个多项式是某两个多项式的最大公因