配合《普通高中数学课程标准(实验)》

2010 高考数学复习指导

GAOKAO SHUXUE FUXI ZHIDAO

理科

下册

主编 况国平

广东省出版集团
新世纪出版社

配合《普通高中数学课程标准(实验)》

2010

高考数学复习指导

理科・下册

主编　况国平

・广州・
廣東省出版集團
新世纪出版社

主　编　况国平

编　者　赵银仓　孟胜奇　王振肃　黄云秀

苏传忠　何作龙　龚建兵　王树玲

于　涛　张小勇　张智姬　宋鹏辉

温冬生　赵金国　解兴武　邹仁高

吕小华　岳永巍　况国平

说　明

本书依据《普通高中数学课程标准(实验)》和2009年高考《考试大纲》及说明，分课时编写，力求做到面向全体学生，注重不同层次学校的教学要求和不同层次学生的学习要求，分层次组织每课时的内容，使不同层次的学生都能通过本书的学习体会成功的喜悦.

本书分文科(上、下册)和理科(上、下册)，其中文科共17章，17份课标与考纲要求、95个课时、15份单元测试题；理科共19章，19份课标与考纲要求、113个课时、16份单元测试题. 本书覆盖了必修系列、必选修系列和任意选修系列高考要求的全部内容. 每章开头配有课标与考纲要求，把课程标准与考试大纲对该章的教学与考试要求进行了系统的归纳；每个课时含考纲要求、基础知识、基本训练、例题精讲、反馈训练、拓展提高、方法总结等七个部分，考纲要求是2009年高考中该节内容的最新要求；基础知识是该节重要知识点的系统归纳；例题和练习的内容则是针对不同层次学生的实际，分层次编写，期望让学生在掌握该节基本知识、基本技能的基础上，逐步掌握该节涉及的数学思想方法和解题方法，品味解题过程，进而形成自我完善和提高的能力；拓展提高部分是为学有余力的学生设计的，是这部分学生进一步提高、探究的平台；方法总结是对该节知识和内容的梳理，通过小结形成方法的归纳和思维的开发、拓展、发散、创新、提高. 本书强调基础，突出高考的重点、热点及能力要求，配有全部例题和练习题的答案及部分题的解答过程，供教师参考.

在使用本书时，首先要发挥教师的主导性，在教学过程中教师应站在学生的思维起点上展示其思维过程，在培养学生思维的过程中给学生留有足够的时间和空间，给学生的思维发展提供平台，同时还要结合学生的实际，决定教学内容的取舍，让不同层次的学生在每一节课都有可以学懂的内容，从而保持旺盛的学习兴趣和强烈的求知欲；其次要充分发挥学生的学习主动性，本书的例题和练习题具有一定的基础性、综合性、覆盖性和创新性，充分考虑了高考的“热点”，并留有空白供学生书写解题过程，以帮助学生有效达到课标和考纲的要求.

本书的编写人员由对考试大纲和课程标准有着深入探讨和研究的经验丰富的教学一线的教师、高考研究人员组成，在编写过程中我们认真研讨、不断完善，力求通过我们的努力使本书成为复习迎考的精品. 但由于水平有限，或偶有疏忽，本书难免存在一些不足之处，恳切地期望读者的批评和建议，以便再版时修订.

编者

2009年5月

目 录

第八章　直线和圆的方程

解析几何是17世纪数学发展的重大成果之一，其本质思想是用代数方法研究图形的几何性质，体现了数形结合的重要数学思想. 本章主要考察学生能在平面直角坐标系中建立直线和圆的代数方程，运用代数方法研究它们的几何性质及其位置关系，并了解空间直角坐标系，体会数形结合思想，初步形成用代数方法解决几何问题的能力.

课程标准与考试大纲对本章的要求

1. 直线与圆

(1)在平面直角坐标系中，结合具体图形，确定直线位置的几何要素.

(2)理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线斜率的计算公式.

(3)能根据两条直线的斜率判定这两条直线平行或垂直.

(4)掌握确定直线位置的几何要素，掌握直线方程的几种形式(点斜式、两点式及一般式)，了解斜截式与一次函数的关系.

(5)能用解方程组的方法求两条直线的交点坐标.

(6)掌握两点间的距离公式、点到直线的距离公式，会求两条平行直线间的距离.

2. 圆与方程

(1)掌握确定圆的几何要素，掌握圆的标准方程与一般方程.

(2)能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆的位置关系；能根据给定两个圆的方程，判断两圆的位置关系.

(3)能用直线和圆的方程解决一些简单的问题.

(4)初步了解用代数方法处理几何问题的思想.

3. 空间直角坐标系

(1)了解空间直角坐标系，会用空间直角坐标系表示点的位置.

(2)会推导空间两点间的距离公式.

8.1　直线的方程(一)

考纲要求

1. 在平面直角坐标系中，结合具体图形，确定直线位置的几何要素.

2. 理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线斜率的计算公式.

基础知识

通过对不同版本数学实验教材的归纳，本节有以下几个方面的内容：

1. 直线的倾斜角：平面直角坐标系中，直线 l 与 x 轴相交，如果把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线 l 重合时，所转的最小正角 α，叫做直线的倾斜角.

特殊地，直线 l 垂直于 x 轴时，$\alpha=\frac{\pi}{2}$；直线 l 平行于 x 轴时，$\alpha=0$.

2. 倾斜角的范围：$\alpha\in[0,\ \pi)$.

3. 斜率：直线倾斜角的正切值叫做直线的斜率，即 $k=\tan\alpha$. 特别地，$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，斜率不存在.

4. 直线斜率公式：过两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，其中 $x_1\neq x_2$，斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

5. 截距：直线 l 与 x 轴、y 轴的交点分别为 $(a,\ 0)$、$(0,\ b)$，则 a，b 分别叫做直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距.

基本训练

1. 直线 l 经过原点和点 $(1,\ -1)$，则它的倾斜角是(　　)

A. 45°　　B. 135°

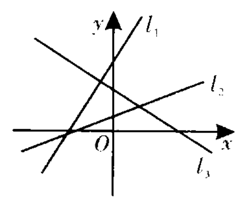
C. 45°或135°　　D. 225°

2. 斜率为2的直线经过 $(3,\ 5)$，$(a,\ 7)$，$(-1,\ b)$ 三点，则 a，b 的值是(　　)

A. $a=4$，$b=0$　　B. $a=-4$，$b=-3$

C. $a=-4$，$b=3$　　D. $a=4$，$b=-3$

3. 如图，直线 l_1，l_2，l_3 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，则有(　　)



A. $k_1<k_2<k_3$　　B. $k_1<k_3<k_2$

C. $k_3<k_2<k_1$　　D. $k_2<k_1<k_3$

4. 已知直线 l_1：$y=k_1x+b_1$ 不经过第二象限，直线 l_2：$y=k_2x+b_2$，$k_1k_2<0$，$b_1b_2>0$，则直线 l_2 一定不经过(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

5. 已知直线 l_1 的斜率 $k_1=\frac{3}{4}$，直线 l_2 经过点 $A(0,a^2+1)$，$B(3a,\ -2)$，且 $l_1\perp l_2$，则实数 a 的值为______.

例题精讲

斜率公式的应用

例1 已知 $A(2,\ 3)$，$B(3,\ -2)$，$C(\frac{1}{2},\ a)$三点共线，求 a 的值.

解：$\because A$，B，C 三点共线，$\therefore k_{AB}=k_{AC}$，

即$\frac{-2-3}{3-2}=\frac{a-3}{\frac{1}{2}-2}$，解得 $a=\frac{21}{2}$.

点评：运用斜率计算公式，通过斜率相等列方程求解.

直线方程不同形式的灵活应用：两点式、截距式、斜截式

例2 $\triangle ABC$ 的三个顶点为$A(-3,\ 0)$，$B(2,\ 1)$，$C(-2,\ 3)$，求：(1)BC 所在直线的方程；(2)BC 边上中线 AD 所在的直线方程；(3)BC 边的垂直平分线 DE 的方程.

解：(1)因为直线 BC 经过 $B(2,\ 1)$和 $C(-2,\ 3)$两点，由两点式得 BC 的方程为：

$\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-2}{-2-2}$，即 $x+2y-4=0$.

(2)设 BC 的中点 D 的坐标为$(x,\ y)$，则 $x=\frac{2-2}{2}=0$，$y=\frac{1+3}{2}=2$. 所以 BC 边中线 AD 过点 $A(-3,\ 0)$，$D(0,\ 2)$两点，由截距式得 AD 所在直线方程为 $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$，即 $2x-3y+6=0$.

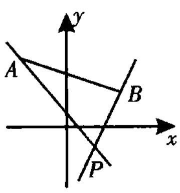
(3)BC 的斜率为 $k_1=-\frac{1}{2}$，则 BC 的垂直平分线 DE 的斜率为 $k_2=2$，由斜截式得直线 DE 的方程为 $y=2x+2$.

点评：正确应用直线几种不同形式的公式. (1)两点式；(2)截距式；(3)斜截式.

数形结合，倾斜角与斜率范围的关系

例3 已知两点$A(-3,\ 4)$，$B(3,\ 2)$，过点$P(2,\ -1)$的直线 l 与线段 AB 有公共点，求直线 l 的斜率 k 的范围.

解：如图，要使直线 l 与线段 AB 有公共点，则直线 l 的倾斜角在直线 PA 与 PB 直线之间.



$\because k_{PA}=\frac{4-(-1)}{-3-2}=-1$，

$k_{PB}=\frac{2-(-1)}{3-2}=3$.

$\therefore k_l\leqslant -1$ 或 $k_l\geqslant 3$.

点评：画出图形，用数形结合的方法，过 P 的直线 l 与 AB 相交时，只要判断 l 斜率与 PA、PB 斜率的关系即可得到斜率 k 的范围.

斜率公式新颖题

例4 已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图象交于 A，B 两点，分别过点 A，B 作 y 轴的平行线与函数 $y=\log_2 x$ 的图象交于 C，D 两点.

(1)证明：点 C，D 和原点 O 在同一条直线上；

(2)当 BC 平行于 x 轴时，求点 A 的坐标.

(1)**证明**：设 A，B 的横坐标分别为 x_1，x_2，由题设知 $x_1>1$，$x_2>1$，点 $A(x_1,\ \log_8 x_1)$，$B(x_2,\ \log_8 x_2)$.

因为 A，B 在过点 O 的直线上，

所以$\frac{\log_8 x_1}{x_1}=\frac{\log_8 x_2}{x_2}$，

又点 C，D 的坐标分别为$(x_1,\ \log_2 x_1)$，$(x_2,\ \log_2 x_2)$，

由于 $\log_2 x_1=\frac{\log_8 x_1}{\log_8 2}=3\log_8 x_1$，

$\log_2 x_2=\frac{\log_8 x_2}{\log_8 2}=3\log_8 x_2$，

所以 $k_{OC}=\frac{\log_2 x_1}{x_1}=\frac{3\log_8 x_1}{x_1}$，$k_{OD}=\frac{\log_2 x_2}{x_2}=\frac{3\log_8 x_2}{x_2}$.

由此得 $k_{OC}=k_{OD}$，即 O，C，D 三点共线 .

(2)解：由 BC 平行于 x 轴，有 $\log_2 x_1=\log_8 x_2$，解得 $x_2=x_1^{\ 3}$，

将其代入$\frac{\log_8 x_1}{x_1}=\frac{\log_8 x_2}{x_2}$，得 $x_1^{\ 3}\log_8 x_1=3x_1\log_8 x_1$.

由于 $x_1>1$，知 $\log_8 x_1\neq 0$，故 $x_1^{\ 3}=3x_1$，$x_1=\sqrt{3}$，于是点 A 的坐标为$(\sqrt{3},\ \log_8\sqrt{3})$.

点评：(1)利用点在曲线上设出点 A，B，C，D 坐标，注意四个点之间的关系，通过斜率公式及对数公式运算来证明；(2)通过对数运算，利用横纵坐标的相等关系列方程求解.

反馈训练

1. 若两条直线倾斜角相等，则这两条直线斜率 k_1 和 k_2 的关系是(　　)

A. $k_1=k_2$　　B. $k_1>k_2$

C. $k_1<k_2$　　D. 以上判断均不对

2. 已知方程 $y=k(x-2)$表示(　　)

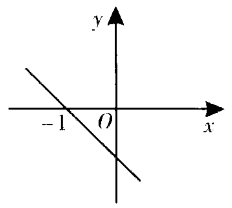
A. 通过点$(-2,\ 0)$的一切直线

B. 通过点$(2,\ 0)$的一切直线

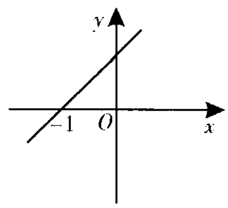
C. 通过点$(2,\ 0)$且不垂直于 x 轴的一切直线

D. 通过点$(2,\ 0)$且不含 x 轴的一切直线

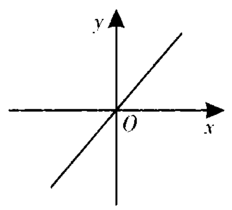
3. 直线 $y=ax+b(a+b=0)$的图象可能是(　　)



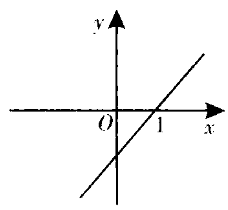
A.



B.



C.



D.

4. 已知过原点的直线 l 与(1，1)和(1，－1)两点的连线段相交，则 l 倾斜角 α 的范围是(　　)

A. $0°\leqslant\alpha\leqslant45°$或 $135°\leqslant\alpha<180°$

B. $45°\leqslant\alpha\leqslant135°$

C. $0°\leqslant\alpha\leqslant45°$或 $135°\leqslant\alpha\leqslant180°$

D. $0°\leqslant\alpha\leqslant45°$或 $90°\leqslant\alpha<180°$

5. 已知三点 $A(-2,3)$，$B(3,-4m)$，$C(\frac{1}{2},m)$在同一条直线上，则实数 $m=$________.

6. 过原点作直线 l 的垂线，若垂足为$(-2,3)$，则直线 l 的方程为______________.

7. 三角形的三个顶点为 $A(2,8)$，$B(-4,0)$，$C(6,0)$，求过点 B 将△ABC 的面积平分的直线方程.

8. 如果直线 l 沿 x 轴负方向平移6个单位，再沿 y 轴正方向平移2个单位后，又回到原来的位置，求直线 l 的斜率.

拓展提高

1. 若直线 $ax+by+c=0$ 不过第二象限，则 a，b，c 应满足的条件为(　　)

A. $ab<0$，$bc>0$　　B. $ab<0$，$bc<0$

C. $ab<0$，$bc\geqslant0$　　D. 以上都不对

2. 已知点 $M(2,2)$，$N(5,-2)$，点 P 在 x 轴上，且∠MPN 为直角，则 P 点的坐标为________.

3. 实数 x，y 满足 $3x-2y-5=0(1\leqslant x\leqslant3)$，则$\frac{y}{x}$的最大值、最小值分别为______、______.

4. 已知直线 $ax-y+2a+1=0$.（1）当 $x\in(-1,1)$时，$y>0$ 恒成立，求 a 的取值范围；（2）若 $a\in(-\frac{1}{6},1)$时，恒有 $y>0$，求 x 的取值范围.

方法总结

1. 在确定直线的斜率、倾斜角时，首先要注意斜率存在的条件，其次是倾斜角的范围.

2. 判定三点共线的方法：斜率法、长度法，直线方程法.

8.2　直线的方程(二)

考纲要求

掌握确定直线位置的几何要素，掌握直线方程的几种形式(点斜式、两点式及一般式)，了解斜截式与一次函数的关系.

基础知识

通过对不同版本数学实验教材的归纳，本节有以下几个方面的内容：

直线的方程：

(1)点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$，要求已知：斜率 k，定点(x_0,y_0)；

(2)斜截式：$y=kx+b$，要求已知：斜率 k，y 轴上截距 b；

(3)两点式：$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，要求已知：直线上

两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，其中 $x_1 \neq x_2$，$y_1 \neq y_2$；

(4)截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，要求已知：$x$ 轴、y 轴上的截距分别为 a，b，其中 $a \neq 0$，$b \neq 0$；

(5)一般式：$Ax+By+C=0$，A，B 不同时为零.

基本训练

1. 方程 $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=-1$ 表示的直线在 x 轴、y 轴上的截距分别为（　　）

A. 2，3　　B. -2，3

C. -2，-3　　D. 2，-3

2. 如果 $AC<0$，$BC<0$，那么直线 $Ax+By+C=0$ 不通过（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 直线 $x-2y+b=0$ 与两坐标轴所围成的三角形的面积不大于1，那么 b 的取值范围是(　　)

A. $[-2, 2]$

B. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

C. $[-2, 0) \cup (0, 2]$

D. $(-\infty, +\infty)$

4. 下列四个命题中的真命题是（　　）

A. 经过定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线都可以用方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 表示

B. 经过任意两个不同的点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 的直线都可以用方程 $(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$ 表示

C. 不经过原点的直线都可以用方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 表示

D. 经过定点 $A(0, b)$ 的直线都可以用方程 $y=kx+b$ 表示

5. 若两条直线 $a_1x+b_1y+1=0$ 和 $a_2x+b_2y+1=0$ 的交点是 $P(3, 4)$，则过两点 $A(a_1, b_1)$，$B(a_2, b_2)$ 的直线方程为______________.

例题精讲

截距及直线位置判断

例1　设直线 l 的方程为 $(a+1)x+y+2-a=0(a \in \mathbf{R})$.(1)若 l 在两坐标轴上截距相等，求 l 的方程；(2)若 l 不经过第二象限，求实数 a 的取值范围.

解：(1)①当直线过原点时，该直线在 x 轴和 y 轴上的截距为0时，$a=2$，即 $3x+y=0$；

②当直线不过原点时，即 $a \neq 2$，由截距相等得 $\frac{a-2}{a+1}=a-2$，解得 $a=0$，直线为 $x+y+2=0$.

(2)将直线方程化为 $y=-(a+1)x+a-2$，

$\therefore \begin{cases}-(a+1)>0\\ a-2 \leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-(a+1)=0\\ a-2 \leqslant 0\end{cases}$，解得 $a \leqslant -1$.

点评：(1)截距相等需要分为过原点与不过原点两类，截距可正可负；(2)结合图象利用斜率和截距满足的条件列不等式组.

含参直线方程求解

例2　在平面直角坐标系中，已知矩形 $ABCD$ 的长为2，宽为1，长为 AB，宽为 AD，AB、AD 边分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，A 点与坐标原点重合. 将矩形折叠，使 A 点落在线段 DC 上，若折痕所在直线的斜率为 k，试写出折痕所在直线的方程.

解：①当 $k=0$ 时，此时 A，D 重合，折痕所在直线方程为 $y=\frac{1}{2}$；

②当 $k \neq 0$ 时，将矩形折叠后，设 A 点落在线段 CD 上的点为 $G(a, 1)$，所以 A 与 G 关于折痕所在直线对称，有 $k_{OG} \cdot k=-1$，即 $\frac{1}{a} \cdot k=-1$，$\therefore a=-k$，故点 G 的坐标为 $G(-k, 1)$，所以折痕所在直线与 OG 交点坐标为 $M(-\frac{k}{2}, \frac{1}{2})$，折痕所在直线方程为 $y-\frac{1}{2}=k(x+\frac{k}{2})$.

综上所述：折痕所在直线为 $y=\frac{1}{2}$ 或 $y=kx+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}$.

点评：注重结合图形，确定点、斜率(用斜率表示所有参数)，用点斜式求方程.

直线与不等式结合

例3　直线 l 过点 $M(2, 1)$，且分别交 x 轴，y 轴的正半轴于点 A、B，O 为坐标原点.(1)当 $\triangle AOB$ 的面积最小时，求直线 l 的方程；(2)当 $|MA| \cdot |MB|$ 取最小值时，求直线 l 的方程.

解：设 l：$y-1=k(x-2)(k<0)$，则 $A(2-\frac{1}{k}, 0)$，$B(0, 1-2k)$.

(1)由 $S=\frac{1}{2}(1-2k)(2-\frac{1}{k})=\frac{1}{2}(4-4k-\frac{1}{k}) \geqslant \frac{1}{2}(4+2\sqrt{(-4k)(-\frac{1}{k})})=4$.

当且仅当 $-4k=-\frac{1}{k}$，即 $k=-\frac{1}{2}$ 时取等.

所以 $\triangle AOB$ 的面积最小为4，此时直线方程为 $x+2y-4=0$.

(2)$\because |MA| \cdot |MB|=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1} \cdot \sqrt{4+4k^2}$

$=\frac{2(1+k^2)}{|k|}=2(-\frac{1}{k}+(-k)) \geqslant 4$.

当且仅当 $-k=-\frac{1}{k}$，即 $k=-1$ 时取等.

所以 $|MB| \cdot |MB|$ 最小值为4，此时直线方程为 $x+y-3=0$.

点评：(1)(2)两问涉及到的直线的斜率均存在，因此利用斜率 k 为自变量，建立关于 k 的函数，利用函数的最值法进行求解. 两问在求解过程中都可以利用均值不等式进行放缩.（另解：可以直接设直线的截距式，利用不等式放缩解决问题）

反馈训练

1. 已知直线 l_1：$3x+4y-6=0$，l_2：$3x-4y+6=0$，则它们的倾斜角（　　）

A. 互补　B. 互余　C. 相等　D. 相差$\frac{\pi}{2}$

2. 过点 $A(1, 4)$，且在 x 轴和 y 轴上截距的绝对值相等的直线共有（　　）

A. 1条　B. 2条　C. 3条　D. 4条

3. 设 A，B 是 x 轴上的两点，点 P 的横坐标为2，且 $|PA|=|PB|$，若直线 PA 的方程为 $x-y+1=0$，则直线 PB 的方程为（　　）

A. $x+y-5=0$　　B. $2x-y-1=0$

C. $2y-x-4=0$　　D. $2x+y-7=0$

4. 若直线 $(2m^2+m-3)x+(m^2-m)y=4m-1$ 在 x 轴上的截距为1，则实数 m 的值是（　　）

A. 1　B. 2　C. $-\frac{1}{2}$　D. 2或$-\frac{1}{2}$

5. (2008 四川)直线 $y=3x$ 绕原点逆时针旋转 $90°$，再向右平移1个单位，所得到的直线为（　　）

A. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$　　B. $y=-\frac{1}{3}x+1$

C. $y=3x-3$　　D. $y=\frac{1}{3}x+1$

6. 倾斜角等于直线 $x-2y-3=0$ 的倾斜角的2倍，且经过点 $P(2, 1)$ 的直线方程为________.

7. 求过点 $P(2, -1)$ 在 x 轴和 y 轴的截距分别为 a，b，且满足 $a=3b$ 的直线方程.

8. 与直线 $4x-3y+5=0$ 平行的直线 l，与坐标轴围成的三角形的面积为6，求直线 l 的方程.

拓展提高

1. 过点 $M(2, 1)$ 的直线 l 与 x 轴、y 轴分别相交于 P，Q 两点，且 $|MP|=|MQ|$，则直线 l 的方程是________.

2. (2008 全国 Ⅰ)若直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 通过点 $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$，则（　　）

A. $a^2+b^2\leqslant 1$　　B. $a^2+b^2\geqslant 1$

C. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\leqslant 1$　　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$

3. 已知直线 l_1：$2x+y-6=0$ 和点 $A(1, -1)$，过点 A 作直线 l 与已知直线相交于 B 点，且 $|AB|=5$，求直线 l 的方程.

4. 已知直线 l：$y=\sqrt{3}x$ 和点 $P(3,2)$，点 Q 是直线 l 上在第一象限内的点，直线 QP 交 x 轴的正半轴于点 M，当点 Q 在何处时，$\triangle OMQ$ 是等边三角形.

方法总结

1. 注意截距与距离的区别：

直线在 x 轴(或 y 轴)上的截距是指该直线与 x 轴(或 y 轴)相交的交点的横(或纵)坐标，其值可正可负，如直线与 y 轴相交，若交点在 y 轴负半轴上时，直线在 y 轴上的截距就是一个负值.

2. 注意直线方程各种形式的适用条件.

深刻理解直线方程各种形式的适用范围. 如点斜式和斜截式方程表示的直线斜率一定存在，不能表示倾斜角为90°斜率不存在的直线；两点式方程不能表示倾斜角为0°或90°的直线；截距式方程表示的直线在两坐标轴上的截距存在且不为零，即除了不能表示倾斜角为0°或90°的直线外，还不能表示经过原点的直线. 直线方程的一般形式则没有以上限制.

3. 直线在两个坐标轴上截距相等的条件是直线斜率为 -1 或直线经过坐标原点，往往容易遗漏直线经过坐标原点的情况.

8.3 两条直线的位置关系

考纲要求

1. 能根据两条直线的斜率判定这两条直线平行或垂直.

2. 能用解方程组的方法求两条直线的交点坐标.

3. 掌握两点间的距离公式、点到直线的距离公式，会求两条平行直线间的距离.

基础知识

通过对不同版本数学实验教材的归纳，本节有以下几个方面的内容：

1. 两直线的位置关系：重合、平行、垂直、相交.

(1)两直线 l_1 与 l_2 的斜率都存在，且不重合时：

$k_1=k_2\Leftrightarrow l_1/\!/l_2$；

$k_1\cdot k_2=-1\Leftrightarrow l_1\perp l_2$；

$k_1\neq k_2$，则 l_1 与 l_2 相交.

(2)两条直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 的位置关系可由系数来确定.

$A_1B_2=A_2B_1$ 且 $B_1C_2\neq B_2C_1\Leftrightarrow l_1/\!/l_2$；

$A_1B_2=A_2B_1$ 且 $B_1C_2=B_2C_1\Leftrightarrow l_1$ 与 l_2 重合；

$A_1A_2+B_1B_2=0\Leftrightarrow l_1\perp l_2$；

$A_1B_2\neq A_2B_1\Leftrightarrow l_1$ 与 l_2 相交.

2. 距离

(1)点到直线的距离：点 $P(x_0,y_0)$，直线 l：$Ax+By+C=0$，则点 P 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

(2)两平行线间距离：两平行直线 l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$ 间的距离为 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

3. 五种常用直线系方程

(1) 过两直线 l_1 和 l_2 交点的直线系方程为 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（不含 l_2）；

(2) 与直线 $y=kx+b$ 平行的直线系方程为 $y=kx+m(m\neq b)$；

(3) 过定点(x_0,y_0)的直线系方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$ 及 $x=x_0$；

(4) 与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线系方程为 $Ax+By+m=0(m\neq C)$；

(5) 与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线系方程为 $Bx-Ay+n=0$.

基本训练

1. 下列各组直线中，两条直线互相垂直的方程是(　　)

A. $y=3x+1$ 和 $2x-6y+4=0$

B. $x+y=0$ 和 $2x-y+5=0$

C. $2x+y=5$ 和 $8x-4y=7$

D. $3x-4y=8$ 和 $8x+6y-\sqrt{2}=0$

2. 经过点 $M(4,-1)$，且与直线 $3x-4y+6=0$ 平行的直线方程是(　　)

A. $3x-4y-16=0$

B. $4x+3y-13=0$

C. $4x+3y-9=0$

D. $\sqrt{3}x+y-1=0$ 和 $\sqrt{3}x+3y+6=0$

3. 点$(4,a)$到直线 $4x-3y=1$ 的距离不大于3，则 a 的取值范围是(　　)

A. $[0,10]$　　B. $(0,10)$

C. $[\frac{1}{3},\frac{3}{13}]$　　D. $(-\infty,0)\cup[10,+\infty)$

4. “$m=\frac{1}{2}$”是“直线$(m+2)x+3my+1=0$与直线$(m-2)x+(m+2)y-3=0$相互垂直”的（　　）

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

5. (2008 广东)经过圆$x^2+2x+y^2=0$的圆心C，且与直线$x+y=0$垂直的直线方程是____________.

例题精讲

用系数判断两直线的位置关系

例1　已知直线l_1：$x+my+6=0$，l_2：$(m-2)x+3y+2m=0$，求m的值，使得(1)$l_1\parallel l_2$；(2)$l_1\perp l_2$；(3)l_1与l_2重合.

解：(1)由$l_1\parallel l_2$有$A_1B_2=A_2B_1$，$A_1C_2\neq A_2C_1$，

$\therefore\begin{cases}(m-2)m=3\\2m\neq 6(m-2)\end{cases}$，解得$m=-1$.

(2)由$l_1\perp l_2$有$A_1A_2+B_1B_2=0$，

$\therefore 1\times(m-2)+m\times 3=0$，解得$m=\frac{1}{2}$.

(3)由两直线重合，$A_1B_2=A_2B_1$，$A_1C_2=A_2C_1$，

$\therefore\begin{cases}(m-2)m=3\\2m=6(m-2)\end{cases}$，解得$m=3$.

点评：正确应用两直线平行、垂直、重合时，系数满足的关系，这样不易漏解、错解.

与已知直线平行的直线的设法应用及两点间的距离公式

例2　直线l平行于直线$4x-3y+5=0$，且被直线$3x+4y=0$与$11x-2y=0$截得的线段长为10，求直线l的方程.

解：由已知可设直线l的方程为$4x-3y+m=0$，设l与已知直线的交点为A、B，

则$\begin{cases}4x-3y+m=0\\3x+4y=0\end{cases}$，解得$A(-\frac{4}{25}m,\ \frac{3}{25}m)$；

$\begin{cases}4x-3y+m=0\\11x-2y=0\end{cases}$，解得$B(\frac{2}{25}m,\ \frac{11}{25}m)$.

由$|AB|=10=\sqrt{(\frac{2}{25}m-(-\frac{4}{25}m))^2+(\frac{11}{25}m-\frac{3}{25}m)^2}$，

解得$m=\pm 25$，故l的直线方程为$4x-3y\pm 25=0$.

点评：正确设取与已知直线平行的直线方程，求解交点坐标，利用点到点距离公式列方程求解.

点关于直线对称问题

例3　一条光线经过点$P(2,\ 1)$射到直线l：$x+y+1=0$，反射后穿过点$Q(0,\ 2)$.(1)求入射光的方程；(2)求沿这条光线从P到Q的长度.

解：(1)设点$Q'(a,\ b)$是Q关于直线l的对称点，

则$\begin{cases}\frac{b-2}{a-0}\times(-1)=-1\\\frac{a}{2}+\frac{b+2}{2}+1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-3\\b=-1\end{cases}$，$\therefore Q'(-3,\ -1)$.

$\because Q'$在入射光线上，

$\therefore$入射光线斜率$k=\frac{1-(-1)}{2-(-3)}=\frac{2}{5}$，

入射光线方程为$y-1=\frac{2}{5}(x-2)$，即$2x-5y+1=0$.

(2)设PQ'与l交于点M.

$\because l$是QQ'的垂直平分线，$\therefore |QM|=|Q'M|$，

$\therefore |PM|+|MQ|=|PM|+|MQ'|=|PQ'|=\sqrt{(3+2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{29}$.

点评：题目主要考查点关于直线的对称问题. 通过作P点关于直线$x+y+1=0$的对称点Q，结合图形解决问题.

点到直线距离公式的应用

例4　求经过点$P(2,\ -1)$且与点$A(-3,\ -1)$和$B(7,\ 3)$距离相等的直线方程.

解：若直线斜率不存在，则$x=2$，符合题意；

若直线斜率存在，设l：$y+1=k(x-2)$，

即$kx-y-1-2k=0$.

由$\frac{|-3k+1-1-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|7k-3-1-2k|}{\sqrt{k^2+1}}$，

即$|5k|=|5k-4|$，解得$k=\frac{2}{5}$.

此时直线方程为$2x-5y-9=0$.

综上所述，经过P点的直线方程为$x=2$或$2x-5y-9=0$.

点评：利用点斜式设直线方程，通过点到直线的距离相等列方程即可.

反馈训练

1. 若直线$2x+3y+8=0$，$x-y-1=0$和$x+ky+k+\frac{1}{2}=0$相交于一点，则k的值为（　　）

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

2. 已知点$A(1,\ -2)$，$B(m,\ 2)$，若线段AB的垂直平分线方程是$x+2y-2=0$，则实数m的值是（　　）

A. -2　　B. -7　　C. 3　　D. 1

3. 两平行直线$Ax+By+C_1=0$与$2Ax+2By+C_2=0$间的距离是（　　）

A. $\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$　　B. $\frac{|C_1|-|C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

C. $\frac{|2C_1-C_2|}{2\sqrt{A^2+B^2}}$　　D. $\frac{2|C_1|-|C_2|}{2\sqrt{A^2+B^2}}$

4. $\triangle ABC$的两个顶点$A(3,\ 7)$，$B(-2,\ 5)$，若AC的中点在x轴上，BC的中点在y轴上，则顶点C的坐标为（　　）

A. $(2,\ -7)$　　B. $(-7,\ 2)$

C. $(-3,\ -5)$　　D. $(-5,\ -3)$

5. 两直线$2x+3y-k=0$和$x-ky+12=0$的交点

在 y 轴上，那么 k 值为________.

6. 若 $A(1, 3)$，$B(-1, 3)$ 关于直线 l 对称，则 l 的方程为____________.

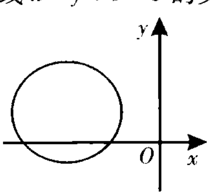
7. 已知三条直线 $3x-y+2=0$，$2x+y+3=0$，$mx+y=0$ 不能构成三角形，求 m 的值.

8. 已知直线 l：$(a-1)x+y+a+1=0$ 及定点 $A(3, 4)$. 试求：(1) a 为何值时，直线 l 过点 A；(2) a 为何值时，点 A 到直线 l 的距离最大？

拓展提高

1. 方程 $(1+4k)x-(2-3k)y+(1-7k)=0$ 所确定的直线必经过点________.

2. 如图，定圆半径为 a，圆心为 (b, c)，则直线 $ax+by+c=0$ 与直线 $x-y+1=0$ 的交点在（　　）



A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 求直线 $x+y+1=0$ 关于直线 $y=2x+1$ 对称的直线方程.

4. 已知直线 l：$3x-y-1=0$，在 l 上求一点 P，使得：(1) P 到点 $A(4, 1)$ 和 $B(0, 4)$ 距离之和最小；(2) P 到点 $A(4, 1)$ 和 $B(0, 4)$ 距离之差最大.

方法总结

1. 求两条平行线之间的距离，可以在其中的一条直线上取一点，求这点到另一条直线的距离，即把两条平行线之间的距离，转化为点到直线的距离. 也可以直接套两平行线间的距离公式 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

2. 判断两直线的平行与垂直时注意条件的附加条件，如两线垂直中的斜率存在且不为零，若忽视在解题时往往容易造成遗漏. 如将两条直线 l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$，l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$ 平行的充要条件修改为 $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$，则只需附加两线不重合即可；将两线 l_1：$a_1x+b_1+c_1=0$，l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$ 垂直的充要条件修改为 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$ 则不用任何附加条件. 可将这些结论和两平面向量共线与垂直的判定有机地结合在一起.

8.4 圆的方程

考纲要求

1. 掌握确定圆的几何要素，掌握圆的标准方程与一般方程.

2. 初步了解用代数方法处理几何问题的思想.

基础知识

通过对不同版本数学实验教材的归纳，本节有以下几个方面的内容：

1. 圆的方程

(1)标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，其中圆心为(a,b)，半径为r. 特别地，当圆心在原点时，方程为$x^2+y^2=r^2$.

(2)一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

当$D^2+E^2-4F>0$时，表示圆，圆心为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径为$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$；

当$D^2+E^2-4F=0$时，表示一个点$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$；

当$D^2+E^2-4F<0$时，无轨迹.

2. 常见的圆系方程

(1)过直线l：$Ax+By+C=0$和定圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$两交点的圆系方程为：$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$.

(2)过两定圆$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$和$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$的交点的圆系方程是：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$($\lambda\in\mathbf{R}$且$\lambda\neq-1$，其中不含圆$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$).

当$\lambda=-1$时，方程表示两圆的公共弦所在的直线方程.

基本训练

1. 圆$(x+2)^2+y^2=5$关于原点(0，0)对称的圆的方程为(　　)

A. $(x-2)^2+y^2=5$

B. $x^2+(y-2)^2=5$

C. $(x+2)^2+(y+2)^2=5$

D. $x^2+(y+2)=5$

2. 若$x^2+y^2-x+y-m=0$表示一个圆的方程，则m的取值范围是(　　)

A. $m>-\frac{1}{2}$　　B. $m\geqslant-\frac{1}{2}$

C. $m<-\frac{1}{2}$　　D. $m>-2$

3. 过点$A(1,-1)$，$B(-1,1)$且圆心在直线$x+y-2=0$上的圆的方程是(　　)

A. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

B. $(x+3)^2+(y-1)^2=4$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

D. $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

4. 方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$表示的曲线是以$(-2,3)$为圆心，4为半径的圆，则D，E，F的值分别为(　　)

A. 4，−6，3　　B. −4，6，3

C. −4，6，−3　　D. 4，−6，−3

5. 圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$与y轴相切的充要条件是(　　)

A. $a=r$　　B. $b=r$

C. $|a|=r$　　D. $|b|=r$

例题精讲

圆的方程求解

例1　根据下列条件，求圆的方程.

(1)经过点$A(6,5)$，$B(0,1)$两点，并且圆心在直线$3x+10y+9=0$上；

(2)经过$P(-2,4)$，$Q(3,-1)$两点，并且在x轴上截得的弦长等于6.

解：(1)$\because AB$的中垂线方程为$3x+2y-15=0$，

由$\begin{cases}3x+2y-15=0\\3x+10y+9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7\\y=-3\end{cases}$，

$\therefore$圆心为$C(7,-3)$，又$|CB|=\sqrt{65}$，

故所求圆的方程为$(x-7)^2+(y+3)^2=65$.

(2)设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

将P、Q两点的坐标代入得$\begin{cases}2D-4E-F=20\\3D-E+F=-10\end{cases}$.

又令$y=0$得$x^2+Dx+F=0$，设x_1，x_2为该方程两根，由$|x_1-x_2|=6$，得$D^2-4F=36$.

由上述3个方程解得$D=-2$，$E=-4$，$F=-8$或$D=-6$，$E=-8$，$F=0$.

所以所求圆的方程为$x^2+y^2-2x-4y-8=0$或$x^2+y^2-6x-8y=0$.

点评：(1)利用圆的标准方程，以圆心、半径为未知数列方程求解. 另解：弦AB的中垂线也过圆心，与已知直线列方程求解即可；(2)利用圆的一般方程设未知数列方程求解.

圆的方程满足的条件及其灵活应用

例2　已知方程$x^2+y^2-2(t+3)x+2(1-4t^2)y+16t^4+9=0(t\in\mathbf{R})$的图形是圆.

(1)求t的取值范围；(2)求图形中面积最大的圆的方程；(3)若点$P(3,4t^2)$恒在所给圆内，求t的取值范围.

解：(1)方程可化简得$(x-t-3)^2+(y+1-4t^2)^2=(t+3)^2+(1-4t^2)^2-16t^4-9=-7t^2+6t+1$，

$\therefore r^2=-7t^2+6t+1>0$，解得$-\frac{1}{7}<t<1$.

(2) $\because r=\sqrt{-7t^2+6t+1}=\sqrt{-7(t-\frac{3}{7})^2+\frac{16}{7}}$,

$t\in(-\frac{1}{7},1)$,

$\therefore t=\frac{3}{7}$时，$r_{\max}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

此时圆心为$(\frac{24}{7},-\frac{13}{49})$,

故所求圆的方程为$(x-\frac{24}{7})^2+(y+\frac{13}{49})^2=\frac{16}{7}$.

(3) 当且仅当 $3^2+(4t^2)^2-2(t+3)3+2(1-4t^2)4t^2+16t^4+9<0$ 时，点 P 在圆内化简得 $8t^2-6t<0$，解得 $0<t<\frac{3}{4}$.

点评：(1)化为圆的标准方程，利用半径的平方大于0列关于 t 的不等式求解；(2)利用(1)中标准方程，将半径表示成关于 t 的函数(注意定义域)，利用二次函数求解；(3)考查点与圆的位置关系.

圆的方程求解

例3 已知圆满足：(1)截 y 轴所得的弦长为2；(2)被 x 轴分成两段圆弧，其弧长的比为3:1；(3)圆心到直线 l: $x-2y=0$ 的距离最小. 求该圆的方程.

解：设圆的圆心 $P(a,b)$，半径为 r，则 P 到 x 轴和 y 轴的距离分别为 $|b|$，$|a|$.

由题设知圆截 x 轴所得劣弧所对圆心角为90°，圆截 x 轴所得弦长为$\sqrt{2}r$，故 $r^2=2b^2$.

又圆截 y 轴所得弦长为2，所以 $r^2=a^2+1$.

又点 $P(a,b)$ 到直线 $x-2y=0$ 的距离为

$d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$.

$5d^2=(a-2b)^2=a^2+4b^2-4ab\geqslant a^2+4b^2-2(a^2+b^2)=2b^2-a^2=1$.

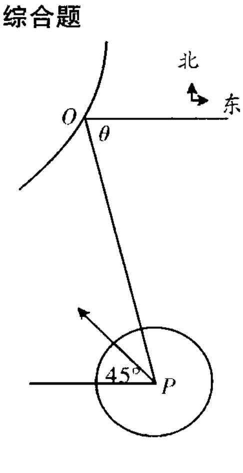
当且仅当 $a=b$ 时取等，此时 $5d^2=1$，从而 d 取最小值时$\begin{cases}a=b\\2b^2-a^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$，进而 $r^2=2b^2=2$.

故所求圆的方程是$(x+1)^2+(y+1)^2=2$或$(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

点评：选择圆的标准方程设圆心、半径3个未知数，从题目条件找3个方程.

圆的方程与解三角形相结合的综合题

例4 在某海滨城市附近海面有一台风. 据检测，当前台风中心位于城市 O 的东偏南 θ(其中 θ 满足 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}$)方向300km的海面 P 处，并以20km/h的速度向西偏北45°方向移动. 台风侵袭的范围为圆形区域，当前半径为60km，并以10km/h的速度不断增大. 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



解：设在时刻 t(h)台风中心为 Q，此时台风侵袭的圆形区域半径为 $10t+60$(km).

若在时刻 t 城市 O 受到台风的侵袭，

则 $OQ\leqslant 10t+60$.

由余弦定理知

$OQ^2=PQ^2+PO^2-2PQ\cdot PO\cos\angle OPQ$,

$PO=300$，$PQ=20t$.

$\cos\angle OPQ=\cos(\theta-45°)=\frac{4}{5}$.

所以 $OQ^2=(20t)^2+300^2-2\times20t\times300\times\frac{4}{5}=20^2t^2-9\,600t+300^2$.

$\therefore 20^2t^2-9\,600t+300^2\leqslant(10t+60)^2$,

化简得 $t^2-36t+288\leqslant0$，解得 $12\leqslant t\leqslant24$.

答：12小时后该城市受到台风的袭击.

点评：设 t 时刻时台风中心的位置为 Q，则 O、P、Q 三点形成了三角形，OQ 表示台风中心到城市的距离，结合解三角形用时间 t 表示三边长，列出关于 t 的不等式 $|OQ|\leqslant$ 台风半径，求解即可.

反馈训练

1. 圆 $x^2+y^2-6x+4y=0$ 的周长为(　　)

A. $\sqrt{13}\pi$　　B. $2\sqrt{13}\pi$

C. 2π　　D. $2\sqrt{3}\pi$

2. 圆 $x^2+y^2=1$ 关于点 $M(3,-2)$ 对称的圆的方程是(　　)

A. $(x-6)^2+(y+4)^2=1$

B. $(x+6)^2+(y-4)^2=1$

C. $(x-3)^2+(y+2)^2=1$

D. $(x+3)^2+(y-2)^2=1$

3. 圆的方程为 $x^2+y^2+kx+2y+k^2=0$，当圆的面积最大时，圆心坐标为(　　)

A. $(-1,1)$　　B. $(1,-1)$

C. $(-1,0)$　　D. $(0,-1)$

4. 若点 $P(x,y)$ 在圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 上，则$\frac{y}{x}$的取值范围是(　　)

A. $[-\frac{\sqrt{3}}{3},0)$　　B. $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$

C. $(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D. $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}]$

5. 圆心为$(1,2)$且与直线 $5x-12y-7=0$ 相切的圆的方程为________.

6. 由动点 P 向圆 $x^2+y^2=1$ 引两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B，$\angle APB=60°$，则动点 P 的轨迹方程为____________.

7. 求圆心在 $3x+2y=0$ 上，且在 x 轴上的截距为 -2，6 的圆的方程.

8. 有一种大型商品，A、B 两地均有出售且价格相同. 某地居民从两地之一购得商品后运回来每千米的运费 A 地是 B 地的两倍. 若 A、B 两地相距 10km. 顾客先在 A 地或 B 地购买这件商品的标准是：包括运费和价格的总费用较低. 那么，不同地点的居民应如何选择购买此商品的地点？

拓展提高

1. 设点 A 在圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上移动，PA 是圆的切线，且 $|PA|=1$，则 P 点的轨迹方程为（　　）

A. $(x-1)^2+y^2=4$　　B. $(x-1)^2+y^2=2$

C. $y^2=2x$　　D. $y^2=-2x$

2. 过点 $(0, 1)$ 和 $(4, a)$ 且与 x 轴相切的圆如果只有一个，那么 a 的值是（　　）

A. 1 或 $1+3\sqrt{2}$　　B. 0 或 $1+3\sqrt{2}$

C. 0　　D. 0 或 1

3. P 是圆 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 上任意一点，Q 是直线 $4x+3y+19=0$ 上任意一点，求 $|PQ|$ 的最小值.

4. 已知实数 x，y 满足方程 $x^2+y^2-4x+1=0$. (1) 求 $\frac{y}{x}$ 的最大值和最小值；(2) 求 $y-x$ 的最大值和最小值；(3) 求 x^2+y^2 的最大值和最小值.

方法总结

1. 研究圆的问题，既要理解代数方法，熟练运用解方程思想，又要重视几何性质及定义的运用，以降低运算量. 总之，要数形结合，拓宽解题思路.

2. 圆的标准方程体现圆作为一种几何图形的特征，圆的一般方程体现了方程作为数的特征. 将圆的一般方程化为 $(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$ 可知，只有当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程表示圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$，半径为 $\sqrt{\frac{D^2+E^2-4F}{4}}$ 的圆，当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程表示点 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$，而当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，则没有任何符合要求的 (x, y)，即不表示任何图形.

3. 求圆的方程需要三个彼此独立的条件，所用的方法多为待定系数法. 若已知条件与圆心半径关系较为密切，则多选择标准方程；若已知条件与圆心半径关系不太密切，则可选择一般方程.

8.5 直线与圆、圆与圆的位置关系(一)

考纲要求

能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆的位置关系；能根据给定两个圆的方程，判断两圆的位置关系.

基础知识

通过对不同版本数学实验教材的归纳，本节有以下几个方面的内容：

1. 点与圆的位置关系：圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，点$P(x_0,y_0)$

若点在圆上，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$；

若点在圆内，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$；

若点在圆外，则$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$.

2. 直线与圆的位置关系：相交、相切、相离

(1) 代数法：通过联立直线方程与圆的方程，根据解的个数来研究. 若有两组不同的实数解(即$\Delta>0$)，则相交；若有两组相同的实数解(即$\Delta=0$)，则相切；若无实数解(即$\Delta<0$)，则相离.

(2) 几何法：由圆心到直线的距离d与半径r的大小比较来判断：$d<r\Leftrightarrow$相交；$d=r\Leftrightarrow$相切；$d>r\Leftrightarrow$相离.

3. 圆与圆的位置关系：相离、外切、相交、内切、内含

判断圆与圆的位置关系常用几何法：设两圆圆心分别为O_1，O_2，半径分别为r_1，r_2，且$r_1\neq r_2$. 则有下列结论：$|O_1O_2|>r_1+r_2\Leftrightarrow$相离；$|O_1O_2|=r_1+r_2\Leftrightarrow$外切；$|r_1-r_2|<|O_1O_2|<r_1+r_2\Leftrightarrow$相交；$|O_1O_2|=|r_1-r_2|\Leftrightarrow$内切；$|O_1O_2|<|r_1-r_2|\Leftrightarrow$内含.

4. 两圆的公切线

相离时有4条；外切时有3条；相交时有2条；内切时有1条；内含时，无公切线.

5. 直线与圆相交的弦长：利用半径、弦心距、半弦长构成的直角三角形，利用勾股定理求得弦长$l=2\sqrt{r^2-d^2}$(d为弦心距).

基本训练

1. 直线$5x+12y-8=0$与圆$(x-1)^2+(y+3)^2=8$的位置关系是(　　)

A. 相交且直线过圆心　　B. 相切

C. 相交但直线不过圆心　　D. 相离

2. 过圆$x^2+y^2=25$上一点$(-4,-3)$的圆的切线方程为(　　)

A. $4x-3y-25=0$　　B. $4x+3y+25=0$

C. $3x+4y-25=0$　　D. $3x-4y-25=0$

3. 直线$x-y+4=0$被圆$x^2+y^2+4x-4y+6=0$截得的弦长等于(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

4. 已知圆C的半径为2，圆心在x轴的正半轴上，直线$3x+4y+4=0$与圆C相切，则圆C的方程为(　　)

A. $x^2+y^2-2x-3=0$

B. $x^2+y^2+4x=0$

C. $x^2+y^2+2x-3=0$

D. $x^2+y^2-4x=0$

5. 已知圆C：$(x-a)^2+(y-2)^2=4(a>0)$及直线l：$x-y+3=0$，当直线l被C截得的弦长为$2\sqrt{3}$时，则$a=$(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}-1$　　D. $\sqrt{2}+1$

例题精讲

直线与圆的位置关系判断

例1　试就m的值讨论直线$x-my+4=0$和圆$x^2+y^2=4$的位置关系.

解：圆$x^2+y^2=4$的圆心为$(0,0)$，半径$r=2$，则圆心到直线$x-my+4=0$的距离$d=\dfrac{4}{\sqrt{1+m^2}}$.

当$m<-\sqrt{3}$或$m>\sqrt{3}$时，$d<r$，直线与圆相交；

当$m=\pm\sqrt{3}$时，$d=r$，直线与圆相切；

当$-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$时，$d>r$，直线与圆相离.

点评：运用几何法较为简捷. 利用圆心到直线的距离与半径的大小关系判断.

圆的方程求解

例2　已知圆P的圆心在y轴上，直线l_1：$3x+4y+3=0$与圆P相交所得弦长为8，直线l_2：$3x-4y+37=0$与圆P相切，求圆P的方程.

解：设所求圆的方程为$x^2+(y-b)^2=r^2$，

则由题意得$\begin{cases}\dfrac{|4b-37|}{5}=r\\ \dfrac{(4b+3)^2}{25}+4^2=r^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=3\\ r=5\end{cases}$，

故所求圆的方程为$x^2+(y-3)^2=25$.

点评：设圆的标准方程，利用距离公式及特殊直角三角形列方程求解即可.

直线与圆的位置关系应用

例3　求与圆$x^2+y^2+8x+6y=0$相切且在两坐标轴上的截距相等的切线方程.

解：由圆的方程$x^2+y^2+8x+6y=0$得圆心为$(-4,-3)$，半径为5.

设圆的切线在两坐标轴上截距均为a.

①当$a=0$时，设切线方程为$y=kx$.

由$\dfrac{|-4k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=5$，解得$k=-\dfrac{4}{3}$，

即切线方程为$4x+3y=0$.

②当$a\neq0$时，设切线方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$，即$x+y-a=0$.

由$\dfrac{|-4-3-a|}{\sqrt{2}}=5$，解得$a=-7\pm5\sqrt{2}$.

故所求切线方程为$x+y+7-5\sqrt{2}=0$或$x+y+7+5\sqrt{2}=0$.

综上所述：所求切线方程为$4x+3y=0$或$x+y+7-5\sqrt{2}=0$或$x+y+7+5\sqrt{2}=0$.

点评：注意分直线过原点与不过原点两类，利用圆心到直线的距离等于半径列方程.

有关圆对称的问题

例4　自点$A(-3,3)$发出的光线l射到x轴上，被x轴反射，其反射光线所在直线与圆$x^2+y^2-4x-4y$