高等院校规划教材

高等数学学习指导

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

◎主编 张昕

广东科技出版社
全国优秀出版社

高等院校规划教材

高等数学学习指导

主　编　张　昕
副主编　刘国栋　古定桂　方　平　周裕中
　　　　庄锦才　何小兰　关裕中
主　审　黄志达　张国权

廣東省出版集團
广东科技出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/张昕主编. —广州：广东科技出版社，2008

ISBN 978-7-5359-4731-4

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 高等数学—自学参考资料　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 111311 号

出版发行：广东科技出版社

（广州市环市东路水荫路 11 号　邮编：510075）

经　　销：广州科信图书发行有限公司

（地址：广州市石牌华南师范大学开放学院二幢二层　邮编：510631

电话：020-85217975　85217303　传真：85217705）

印　　刷：惠州彩丰印务有限公司

（地址：广东省惠州市惠城区汝湖镇水苑工业区　邮编：516001）

规　　格：787mm×1 092mm　1/16

印　　张：22

字　　数：500 千字

版　　次：2008 年 8 月第 1 版　　2008 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：36.00 元

内容简介

本书作为《高等数学》教材配套的学习指导书，其内容紧扣教学要求，突出教材内容的系统梳理，对重难点进行归纳整理，强化一题多解训练，揭示错解原因。各章均由知识结构图、学习要求、典型例题、错误分析、自我测试题及参考答案等部分组成。书后附有常用基本公式。

本书叙述详细，结构严谨，逻辑清晰，通俗易懂；选题由易到难，便于自学。本书典型例题突出一题多解、分析归纳、错题解析；自我测试题分A、B两级，A级自测题是本科生必须掌握的内容，主要考查学生的基本知识和基本技能；B级自测题适合学有余力及考研的学生，主要考查学生的综合分析能力及应用能力。

本书适合高等院校理、工、农、医、经济类等本科专业使用，也可供高校教师教学参考。

本书编委会

主　编　张　昕
副主编　刘国栋　古定桂　方　平　周裕中
　　　　庄锦才　何小兰　关裕中
编　委　陈　羽　郭　军　蒋明星　李娇娇
　　　　梁茹冰　刘　丹　邱　华　王雪琴
　　　　陈顺轩　袁利国　朱玲湘　朱艳科
主　审　黄志达　张国权

目录

第一章　函数　极限　连续

一、知识结构图与学习要求

（一）知识结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的概念
    - 函数的几种特性：单调性、有界性、奇偶性、周期性
    - 复合函数
    - 分段函数
    - 反函数
    - 隐函数
    - 初等函数
  - 极限
    - 极限的概念
    - 极限的性质：惟一性、局部有界性、局部保号性
    - 极限存在准则
      - 夹逼准则
      - 单调有界准则
    - 两个重要极限
    - 极限运算法则
      - 四则运算法则
      - 复合函数的极限运算法则
    - 无穷大与无穷小
  - 连续
    - 连续与间断的概念
    - 间断点的分类
    - 连续函数的运算性质
      - 和、差、积、商的连续性
      - 反函数的连续性
      - 复合函数的连续性
      - 初等函数的连续性
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 有界性定理与最值定理
      - 零点定理与介值定理

（二）学习要求

（1）理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式.

（2）了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

（3）理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

（4）掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

（5）理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系．掌握极限的性质及四则运算法则．

（6）掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法．

（7）理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限．

（8）理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型．

（9）了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性定理、最大值和最小值定理、零点定理与介值定理）并会应用这些性质．

二、内容提要

（一）函数

1．函数概念

函数是微积分学研究的对象，它具有两个要素（定义域与对应法则），函数与自变量及因变量选用字母无关．另外，两个函数相等指其对应两个要素相同．

2．函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性

（1）奇函数与偶函数的定义域均关于坐标原点对称，并且奇函数对应的图形关于坐标原点对称，偶函数对应的图形关于 y 轴对称．

（2）函数的单调性是在其相关定义区间上讨论， 研究函数的单调性既可以用单调性定义的方法，也可以采用将在第三章介绍的方法．

（3）周期函数的定义域是无界集，其周期通常指最小正周期，但并非每个周期函数都有最小正周期．

（4）函数的有界性依赖于所讨论的区间．函数在区间 I 上有界的充要条件是既有上界又有下界．

3．复合函数

多个函数能否复合成一个函数要满足一定条件，得到的复合函数的定义域可能减小．另外，复杂的函数则可分解为形式较简单的函数．复合函数是微积分学研究的主要对象之一，读者应熟练掌握函数的复合与分解的方法．

4．分段函数

在定义域内的若干部分定义域上分别给出不同表达式的一个函数称之为分段函数．常见分段函数表示法：

（1）分段表示的函数．如

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},$$

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}\text{（符号函数）等．}$$

（2）含有绝对值符号的函数，也是分段函数．如

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

（3）含参变量的极限式表示的函数．如

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}，\ |x|>0$$

等，此类函数应当通过求极限把函数写成分段表示式：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<|x|<1\\ 0, & x=-1\\ 2, & x=1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$．

（4）其他形式的分段函数，如

$$f(x)=\sqrt{1-\sin 4x}，\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}；$$

$$g(x)=\min\{2,x^2\}，\ -3\leqslant x\leqslant 2；$$

$$h(x)=\frac{[x]}{x}，\ x>0$$

等．这些函数实际上也是分段函数，均可改写成分段表示式

$$f(x)=\sqrt{(\sin 2x-\cos 2x)^2}=\begin{cases}\cos 2x-\sin 2x, 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8}\\ \sin 2x-\cos 2x, \dfrac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}2, & x\in[-3,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},2]\\ x^2, & x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\end{cases},$$

$$h(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1\\ \dfrac{n}{x}, & n\leqslant x<n+1, n\in N\end{cases}.$$

后面将对分段函数的极限、连续性、导数与微分等问题分别进行讨论．

5．反函数

在同一坐标系下，$y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称；另外，$y=f(x)$ 的定义域为 $y=f^{-1}(x)$ 的值域；$y=f(x)$ 的值域为 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域．利用两者的这一关系，有时可用来求函数的定义域与值域．

6．隐函数

通过方程式 $F(x,y)=0$ 给出的两个变量 x 和 y 之间的函数关系称为隐函数．

从 $F(x,y)=0$ 中解出 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$ 这一过程称为隐函数的显化．并非所有的隐函数都可以显化，比如 $xy=\mathrm{e}^{x+y}$ 就不能显化．

7．基本初等函数和初等函数

（1）基本初等函数共有五类：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数．读者应熟练掌握基本初等函数的定义域、值域以及它们的图形与性质．

（2）初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数．

（二）极限

1．极限的定义

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N>0$，使得当$n>N$时，有$|x_n - A|<\varepsilon$．

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$．

（3）$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$．

（4）$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$．

（5）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$．

（6）$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$．

（7）$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$x<-X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$．

2．数列与函数极限的性质

（1）惟一性；

（2）有界性（或局部有界性）；

（3）保号性（或局部保号性）；

（4）数列极限与函数极限的关系．

3．函数极限存在的充要条件

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$．

（2）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$．

4．两个准则与两个重要极限

（1）夹逼准则：在自变量x的同一变化过程中，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$．若

$$\lim g(x)=\lim h(x)=A,$$

则$\lim f(x)=A$．

使用该准则时，将函数（或数列）放大与缩小成一个新的函数（或数列），而新的函数（或数列）与原来的函数（或数列）只相差一个无穷小量．

（2）单调有界准则：单调有界数列必有极限．

使用该准则时，通常是用如下两个结论之一：

a．单调递增且有上界则极限存在；

b．单调递减且有下界则极限存在．

有界性的证明通常采用数学归纳法，而证明单调性则用作差或作商的方法．一般地，利用该准则时，先证明有界性，后证明单调性．

（3）两个重要极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

或

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\,.$$

另外，有以下常用推广形式：设自变量 x 在同一变化趋势下，如果 $\lim f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$，则有

$$\lim\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1\,,$$

与

$$\lim[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}\,.$$

5．极限四则运算法则

在自变量 x 的同一变化过程中，如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$，其中 $B\neq 0$．

6．复合函数的极限运算法则

设 $y=f[g(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义．若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ 且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A\,.$$

该命题表明：如果 $f(u)$ 和 $g(x)$ 满足相应的条件，那么作代换 $u=g(x)$ 可把求 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]$ 化为求 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$，这里 $u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$．

7．幂指函数的极限

在自变量 x 的同一变化过程中，对于极限 $\lim u(x)^{v(x)}$，其中 $u(x)>0$ 且 $u(x)$ 不恒等于 1，有以下情形：

（1）当 $\lim u(x)=a$，$\lim v(x)=b$，且 a，b 有限时，则有

$$\lim u(x)^{v(x)}=a^b\,.$$

（2）当 $\lim u(x)=1$，$\lim v(x)=\infty$（或 $-\infty$，或 $+\infty$）时，则有

$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim\{1+[u(x)-1]\}^{\frac{1}{u(x)-1}\cdot v(x)\cdot[u(x)-1]}=\exp\{\lim v(x)\cdot[u(x)-1]\}\,,$$

或利用恒等式 $\exp\ln x=x$，则有

$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim\exp\ln u(x)^{v(x)}=\exp[\lim v(x)\cdot\ln u(x)]\,.$$

8．无穷小与无穷大

（1）在自变量的某一变化过程中，如果 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为无穷小；如果 $\lim f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 为无穷大．

（2）无穷小与无穷大的讨论必须指出自变量的变化过程．理解无穷小与很小的数以及无穷大与很大的数之间的差别．无穷小、无穷大不是数．零是惟一可以作为无穷小的常数．

（3）无穷小与无穷大的关系：在自变量 x 的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

（4）无穷大与无界的关系：无穷大量一定无界．反之，则不一定.

（5）无穷小与函数极限的关系：设在自变量 x 的同一变化过程中，

$$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,$$

其中 $\lim\alpha=0$.

（6）无穷小的比较：设在自变量的同一变化过程中，α 和 β 均为无穷小，则

a．若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，称 α 是比 β 高阶的无穷小．记为 $\alpha=o(\beta)$．显然 $\lim\dfrac{o(\beta)}{\beta}=0$.

b．若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，称 α 是比 β 低阶的无穷小．从而 β 比 α 高阶.

c．若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c$，且 $c\neq 0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小.

d．若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta^k}=c$，且 $c\neq 0$，$k>0$，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

e．若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，称 α 与 β 是等价无穷小．记为 $\alpha\sim\beta$.

根据如上定义，显然有如下结论成立：

f．若 $\alpha\sim\beta$ 且 $\beta\sim\gamma$，则有 $\alpha\sim\gamma$.

g．$\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \beta=\alpha+o(\alpha)$

h．当 $x\to 0$ 时，

$$k\cdot o(x)=o(x),\quad o(x)+ko(x)=o(x),\quad \alpha\cdot o(x)=o(x),$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$，$k$ 为常数.

（7）无穷小的运算：在同一极限过程下，有如下常用结论：

a．有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

b．有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

c．有界量与无穷小的乘积仍为无穷小.

（8）利用等价无穷小的代换求极限.

a．替换定理：

在自变量 x 的某一变化过程中，α，α_1，β，β_1 均为无穷小，且 $\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$．则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

b．当 $x\to 0$ 时，常用等价无穷小：

$x\sim\sin x$，　　$x\sim\tan x$，

$x\sim\arcsin x$，　　$x\sim\arctan x$，

$x\sim \mathrm{e}^x-1$，　　$x\sim\ln(1+x)$，

$a^x-1\sim x\ln a$，　　$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

▲注　上述等价关系中的 x 可换成任一无穷小量.

（三）连续

1．函数的连续性

（1）函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 处连续有如下几种形式的等价定义：

定义1　设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域（包括 x_0）内有定义．如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义2　设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域（包括 x_0）内有定义．如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

▲注1　上述函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 处连续的定义可用"$\varepsilon-\delta$"语言来表述：

$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

▲注2　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续须具备三个条件：

a．函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处要有定义；

b．极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

c．$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

▲注3　当 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续时，不能认为 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内都连续．例如函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in Q\\ x^2, & x\in R\setminus Q\end{cases}$，仅在点 $x=0$ 处连续，而在其他点尽管有定义，但不连续.

（2）函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 处的单侧连续：

a．若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续；

b．若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

c．单侧连续与函数连续有如下关系：

$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处既要左连续又要右连续．即

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0).$$

（3）函数 $y=f(x)$ 在区间上的连续性：

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续；如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内连续，且在点 $x=a$ 处右连续，在点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

2．函数的间断点

（1）定义：

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义（在点 x_0 处有无定义均可），而 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，即 $y=f(x)$ 在点 x_0 无定义或者 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，则称 x_0 为 $y=f(x)$ 的间断点.

（2）间断点的分类：

间断点

- 第一类间断点（在 x_0 处的左、右极限均存在）
  - 可去间断点（左极限=右极限）
  - 跳跃间断点（左极限 $\neq$ 右极限）
- 第二类间断点：在 x_0 处的左右极限至少有一个不存在（常见的有振荡间断点和无穷间断点）.

3. 连续函数的运算

（1）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（当 $g(x_0)\neq 0$ 时）均在点 x_0 处连续.

（2）设函数 $f(u)$ 在点 u_0 处连续，函数 $u=g(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

（3）基本初等函数在其定义域内均连续；初等函数在其定义区间（即定义域内的区间）内是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

最大与最小值定理 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定能取得最大值与最小值.

推论 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界.

介值定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$，$f(b)=B$，$A\neq B$，那么对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

推论 1 在闭区间上连续的函数必能取得介于最大值与最小值之间的任何值.

推论 2 （零点定理）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么在开区间 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

三、典型例题解析

●●**例 1** 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$ 的解析式及其定义域.

解 依题意得

$$\sin\varphi(x)=1-x^2，\quad \varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

由 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$ 可知 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$. 故

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)，\quad x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

●●**例 2** 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, x\leq 0\\ x+2, x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2,\ x<0\\ -x, x\geqslant 0\end{cases}$. 求 $f[g(x)]$.

解 （1）由 $g(x)\leqslant 0$ 得 $g(x)=-x\leqslant 0$ 即 $x\geqslant 0$，所以 $x\geqslant 0$ 时 $f[g(x)]=1+x$.

（2）由 $g(x)>0$ 即 $g(x)=x^2>0$ 得 $x<0$. 所以 $x<0$ 时，$f[g(x)]=x^2+2$.

故 $f[g(x)]=\begin{cases}x^2+2, x<0\\ 1+x,\quad x\geqslant 0\end{cases}$.

●●**例 3** 设 $\varphi(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1\\ 0, |x|>1\end{cases}$，$\phi(x)=\begin{cases}2-x^2, |x|\leqslant 1\\ 2,\qquad |x|>1\end{cases}$. 试求 $\varphi[\phi(x)]$，$\varphi\{\varphi[\varphi(x)]\}$.

解 （1）由于

$$\varphi[\phi(x)]=\begin{cases}1,|\phi(x)|\leqslant 1\\0,|\phi(x)|>0\end{cases},$$

且仅当$|x|=1$时，$\phi(x)=1$；$|x|\neq 1$时，$1<\phi(x)\leqslant 2$．则

$$\varphi[\phi(x)]=\begin{cases}1,|x|=1\\0,|x|\neq 1\end{cases}.$$

（2）当$x\in(-\infty,+\infty)$时，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$．故$\varphi[\varphi(x)]\equiv 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$．于是

$$\varphi\{\varphi[\varphi(x)]\}\equiv 1,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

▲**注** 函数复合类似“代入”，但应注意定义域的变化．复合后要写下复合函数的定义域．由于复合函数是微积分研究的主要对象之一，读者应熟练掌握复合函数的概念．

●●**例 4** 设$f(x)$，$\varphi(x)$，$\phi(x)$均为单调递增函数，且$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\phi(x)$．证明：

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\phi[\phi(x)].$$

证明 由题设可知

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant\varphi[f(x)]\leqslant f[f(x)],$$
$$f[f(x)]\leqslant\phi[f(x)]\leqslant\phi[\phi(x)],$$

则由上述不等式可得

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\phi[\phi(x)].$$

▲**注** 此处多次利用函数单调性的定义．

●●**例 5** 下述说法中与$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的定义等价的是（ ）．

A．$\forall\varepsilon\in(0,1),\exists N$，当$n\geqslant N$时，有$|x_n-a|\leqslant 100\varepsilon$．

B．$\forall\varepsilon>1,\exists N$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$．

C．$\forall N,\exists\varepsilon>0$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$．

D．$\exists N,\forall\varepsilon>0$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$．

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的定义：对于数列$x_n$，存在常数$a$，使得对于任意给定的正数$\varepsilon$（不论它多么小），存在自然数$N$，使当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立．

A 与上述定义等价，因为$\varepsilon>0$具有任意性，100ε也具有任意性．

B 因为$\varepsilon>1$不能保证ε为任意小，从而由$|x_n-a|<\varepsilon$不能保证x_n与a无限接近．

C 中的ε是存在性，与定义不符．

D 如果存在自然数N，使对$\forall\varepsilon>0$，当$n>N$时有$|x_n-a|<\varepsilon$，这说明数列x_n有极限a，说明 D 是上述定义的充分条件．但反之如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，不一定能找到那样的$N$（它可能与$\varepsilon$无关．这一要求比$N$与$\varepsilon$有关的要求更高），使对任意$\varepsilon>0$，当$n>N$时，都有$|x_n-a|<\varepsilon$，因为在定义中$N$是依赖于$\varepsilon$的给定而确定的．因而 D 不是上述定义的必要条件．故选 A．

●●**例 6** （03 研*）设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$均为非负数列，且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\quad\lim_{n\to\infty}b_n=1,\quad\lim_{n\to\infty}c_n=\infty,$$

则必有（ ）．

A．$a_n<b_n$对任意n成立． B．$b_n<c_n$对任意n成立．

C．$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在． D．$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在．

解法 1 由数列极限的定义，数列$\{a_n\}$的极限关心的是a_n在某个N（足够大）之后的性

---

*03 研：表示 2003 年考研真题，以下同．

质，前面的有限多项则无关紧要．因此 A、B 中“任意 n”的条件显然不成立．“$0\cdot\infty$”型的极限是未定式，C 不成立，故选 D．

事实上，当 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$ 时，由无穷大量的定义得到 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n = \infty$．

解法 2 举反例：取 $a_n = \dfrac{2}{n}$，$b_n = 1$，$c_n = \dfrac{n}{2}$，则可以直接排除 A、B、C．

●●例 7 当 $x \to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限（　　）．

A．2　　B．0　　C．∞　　D．不存在且不为 ∞

▲分析 左、右极限存在且相等，是函数极限存在的充要条件．本题中函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}\exp\dfrac{1}{x-1}$ 为两个因式的乘积，易求出 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$，所以解本题的关键是因式 $e^{\frac{1}{x-1}}$．

解 因 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$，而 $\lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$．故

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = 0$．所以选 D．

●●例 8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})$．

▲分析 所求极限中有根式．通常需要对分子或分母有理化．有时甚至需要对分子分母同时有理化．本题需对分子有理化．

解

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3\sqrt{n})-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}} = 2.$$

●●例 9 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$．

解法 1 分子分母有理化．则有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{x\to0}\frac{[(1+x)-(1-x)][(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}]}{[(1+x)-(1-x)](\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1-x^2)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{3}{2}.$$

解法 2 注意到该极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 型，可用洛必达法则，从而

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)}{\dfrac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}-\dfrac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-1)}$$