工程數學題庫

上 册

原著 美國教育協會
譯著 藍 建 羣

曉園出版社
世界图书出版公司

工程數學題庫

上册

原著 美國教育協會
譯著 藍 建 羣

曉園出版社
世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

工程数学题库　上册

美国教育协会　著

蓝建群　译

晓园出版社出版

·

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

·

1995 年 5 月第　一　版　　开本：711×1245　1/24

1995 年 5 月第一次印刷　　印张：26

印数：0001—500　　字数：480 千字

ISBN: 7-5062-1825-9/O·159

定价：44.00 元（WB9409/1825）

前　　言

通常學生們都覺得微分方程式是一門很難瞭解與學習的科目，儘管在這一方面的教科書已出現不少，每一本都想對以前的教本提供一些改進，但由於用來解題所用的定理太多及太複雜，學生們還是不斷地感到困擾。他們選這門課祇是為了符合學校/科系所定選課之要求。

在經過研究以後，美國教育研究協會發現學生對微分方程式感到困難的理由有下列幾個：

(1) 沒有系統的分析法可供學生遵循來逐步解答所遭遇到的問題。這也許是由於一個問題中能包含許多不同的條件與定理而導致許多不同的可能解法所造成的結果。如果對於每一種可能的變化都要規定一組法則來遵循，將會產生許多需要學生去找尋的法則和步驟，這樣倒不如使用某種試誤法(Trial and Error)。

(2) 現有的教本通常是一些對這些問題頗有研究的學者所寫的，一個已知的定理往往祇使用幾頁來解釋，由於寫得比較抽象而使學生們無法真正瞭解，以致使用起來十分困難。並且這些解釋也不夠詳細與廣泛，學生們無法將定理與其應用加以引伸或推廣至其它問題上去。定理中許多可能變化與應用通常都不加討論，而把它們留下來供給學生們做練習時自行發掘。因此學生們必須花費時間去瞭解早已熟知而教本上未提供的定理及應用。

(3) 通常在主題解釋後面所列舉的例子數目太少、太簡單，無法使學生徹底瞭解其原理。所作的解釋對學生解答作業或考試上的問題都未提供充份的基礎。

通常所舉的例子都用簡縮的形式，把解答的各步驟間的許多資料都予以略去，要求學生自己去導出這些略去的資料。結果，學生們發現例子很難瞭解，而不能充份達成舉例的目的。

此外，大多數例子常以含混的字句寫出，不敍述問題而提供解答。只透過一般的討論，不表示要解答的是什麼。

同時在需要的地方，很多例子中未包括圖解，學生們無法練習作圖來簡化和組織他們的思想。

(4) 學生只能利用做練習與班上複習來學習這門課，去體念應用相關原理。

在做練習時，學生們發現他們對微分方程式所花的時間比其它相當學分的課目要多得多，因為他們不能確定究竟要選用那個定理或原理。於是需要學生們找出教本上沒有的那些易於解題的技巧或妙訣。因此，他們只得求助於試誤法來一點一點地摸索。結果，解答一題有時會花上幾小時的時間。

(5) 當在課堂上複習練習時，教師常要求學生輪流在黑板上寫出解答並且對全班加以解釋。但這樣的解釋很難使其餘學生保持興趣，因為他們要看黑板上的資料並忙著抄寫下來，無法傾聽口頭解釋與將注意力集中在解法上。

本書編寫的目的是要幫助學微分方程式的學生克服這些困難，提供解法的詳細說明。這些解法都是透過選自作業或考試上的各種問題來加以解說的。書中列出的問題都是按由淺入深的順序排列，使學生能從複習問題來加强對一個特殊課目的學習與瞭解。詳細的逐步解說這些問題，可大量節省學生的時間。

美國教育研究學會認為微分方程式最好是讓學生用觀察分析法與解題技巧來學習。這種方法與各種科學實驗中所使用的相似。

使用本書時，學生可按自己的步調來複習與學習解說的問題，不受時間的限制。

當學生需要找出一種特別的問題與解答時，可查看書中的目錄或索引。也可查看每個問題方框內的資料。為了便於快速查出問題，除了對每個問題加上方框外，方框外右上角還加上粗體的問題序碼。

為了符合本書的編寫目的，美國教育研究學會選擇了常在考試中出現的那些問題，很小心地解答每個問題，並且解說過程中的每個步驟。

要能快速瞭解本書用法，學生應先看看"如何使用本書"一節。

為了符合本書之目的，教育研究協會特別選擇會在作業及考試中遇到的問題，將它們的解題步驟詳細解說使學生們易於瞭解。對於這方面有傑出貢獻必須感謝

R. Kannan 先生

下列教授們對本書出版提供許多幫助與支持：

Neil Bellinson
Leslie Burton
William Fowlkes
Kenneth Haas
Chris Harrington
Ken Lent
Leon Leung
Dianne Niedzinski

本書原稿經過無數次的改變、修正及增加篇幅，必須歸功打字小姐Agnes Czirjak及Sophie Gerber。她們對這種煩雜、枯燥工作的熱心及技巧，有助於本書之編輯。

本書中所繪各種圖形及外觀設計必須感謝Jonathan Plummer先生，因他對幫助本書出版之美工人員提供訓練與指導。

最後必須感謝Helen Kaufmann女士，因她建設性提議及幫助使本書能夠順利出版。

Max Fogiel, Ph. D.
Program Director

如何使用本書

這本書對於學微分方程式的學生是很有幫助的，它可用作教本的補充讀物。全書共分成 39 章，每章均討論不同的課題，從可分離變數之方程式開始，依序為二階方程式、聯立方程式及非線性方程式。有關運算符、變數轉換、拉普拉斯轉換及近似解的技巧也包括在內。此外，也包括了許多廣泛的應用，這些應用對於學生來說似乎是最困難的。

對課題的澈底學習與瞭解

(1) 參考課本，閱讀與課題有關的章節，熟悉討論的原理。

(2) 參看本書目錄，找出需要的課題。

(3) 複習此課題下的各個問題。這些問題都是按由淺入深的順序排列的。有些問題可能與其它問題相似，但每個問題的選擇都是用來解說一個不同點或解題方法。

要將一個課題澈底學習與瞭解以及牢記其內容，通常學生需要複習相關的問題好幾次。為了認識原理的應用與選擇最佳的解法，重複的複習是最基本或最重要的途徑或方式。

尋找特殊的問題

要注意索引中，每個名詞或術語後面的數字是表示題碼，不是頁碼。將索引以這種方式排列，是便於很快找到所需要的問題，因為一頁上可能出現兩三個問題，有了題碼便可直接找出相關的問題了。

要找尋一個特殊問題，可查看本書的目錄或索引，先找出與問題有關的課題的章節。然後再細察每個方框內的題材。從觀察目錄著手去熟悉本書的組織，就能快速找到所需要的問題。

為了準備考試，可從目錄中找到有關的課題，將這些課題下的問題多看幾次，便可幫助學生辨別那些問題可能是考試所需要的。

目　錄

第 一 章

微分方程式之分類

1-1 請判別下列方程式，何者爲常微分方程式？何者爲偏微分方程式？

(1) $\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t,$

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$

(3) $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v,$

(4) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$

(5) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0.$

解：考慮函數 $y = f(x)$，其中依變數 y 爲單一獨立變數 x 之函數。經由普通微分法可計算它的第一階、第二階……導數。微分方程式爲包含未知函數之導數的方程式，而常微分方程式被定義爲由一或多個依變數相對於單一獨立變數之常導數（Ordinary Derivatives）所組成之方程式。

至於偏微分方程式爲由一或多個依變數相對於超過一個之獨立變數的偏導數（Partial Derivatives）所組成之方程式。

我們將利用上述分類來判別(1)至(5)。

(1) 其中 $x = f(t)$，爲單一變數之函數，故(1)爲常微分方程式。

(2) 其中 $u = f(x, y, z)$且 u 爲多個變數之函數，因此(2)爲偏微分方程式。

(3) 其中 $v = g(s, t)$，因此，所予方程式爲偏微分方程式。

(4) 其中 $y = f(x)$，雖然含有其導數的平方，但仍爲常微分方程式。

(5) 其中 $y = f(x)$，故(5)爲常微分方程式。

1-2 下列微分方程式之階次（Order）爲何？

(1) $y' + xy = x^2,$

(2) $(y')^3 = \sin x,$

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+7\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{2}u=\sin xy,$

(4) $\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+y=e^x,$

(5) $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\frac{dy}{dx}=0$。

解：微分方程式之階次爲在方程式中所出現未知函數的導數的最高階次。

在(1)中，祇有第一階導數出現，因此，(1)式爲一階方程式。

雖然(2)中第一階導數的冪次爲 3，但冪次與方程式的階次無關，故(2)式仍爲一階微分方程式。

在(3)中有偏導數出現，故它爲一偏微分方程式。因它含有 u 對 x 之二階偏導數（如同其他二階偏導數），故(3)式爲二階偏微分方程式。

在(4)中，$y=f(x)$ 且有 $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ 出現，故(4)式爲三階微分方程式。

在(5)中雖然 y 對 x 的第四階、第三階及第二階導數乘在一起，但此方程式之階次仍然爲 4 。

1-3 請判別線性（Linear）及非線性（Non-linear）常微分方程式間的差異。

解：一 n 階微分方程式若滿足下列三個條件則爲線性的：

(1) 依變數（如 y ）及它的導數的冪次均爲 1 。

(2) 未含有依變數 y 及／或它的導數的乘積。

(3) 未含有 y 及／或它的導數的超越函數。

若上列三個條件中有任一個未滿足即爲非線性的。

考慮下列微分方程式：

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=b(x)$$

因所有導數的係數祇爲 x 的函數，此方程式爲線性的。實際上它爲 n 階線性微分方程式的通式。注意其中 $a_i(x)$ 爲 x 的任意函數。

下列爲一些線性微分方程式之例子：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}+x^2\frac{d^3y}{dx^3}+x^3\frac{dy}{dx}=xe^x.$$

此外，我們也列了一些非線性微分方程式的例子：

1) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0,$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \cos xy = 0,$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0.$

1-4　微分方程式上所謂“齊次”（Homogeneous）的意思爲何？

解：一 n 階微分方程式的通式爲：

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}) = g(x). \tag{1}$$

(1)式典型地描述獨立變數 x，依變數 y 及它的導數間之函數關係。此通式通常可轉換成：

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = g(x) \tag{2}$$

假設在(2)中 $g(x)=0$ 則(2)式被稱爲一齊次方程式。

爲了使此定義更加活用，考慮一線性方程式組：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3}$$

若 $b_1 = b_2 = \cdots\cdots = b_m = 0$ 則此方程式組稱爲齊次的。當(3)式爲齊次時，它的解中之一爲顯然解（Trivial Solution）$x_i = 0$（$i = 1,\ \cdots\cdots,\ n$）。

考慮(2)式，若 $g(x) = 0$ 則 $y(x) = 0$ 爲(2)式之一解。

齊次微分方程式例子之一爲關於彈簧之自由阻尼運動（Free Damped Motion）。利用虎克定律可獲得下列齊次微分方程式：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

1-5　何謂非齊次微分方程式？

解：考慮 n 階微分方程式如下：

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{1}$$

方程式(1)被稱爲齊次微分方程式因爲獨立變數 x 連同 y 或它的導數一起出現。假設 $g(x)$ 與 y 或它的導數無關，則(1)式變成：

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=g(x). \tag{2}$$

方程式(2)爲一非齊次微分方程式。

將微分方程式區分爲齊次或非齊次是很重要的，因爲解齊次方程式的方法比解非齊次者簡單得多。此外，(2)式之解由二部份組成：(I)對應於(1)式之通解，又被稱爲餘解及 (II) (2)式之特解。可寫成：

$$y = y_c + y_p$$

考慮一彈簧受力之運動，作爲非齊次微分方程式之例子，基於物理原理，可將它寫成一個二階微分方程式如下：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+kx=F_1\cos wt. \tag{3}$$

爲求得滿足(3)式之函數 $x(t)$，我們需先求滿足下式之解：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+kx=0,$$

然後與滿足(3)式之任何函數 $g(t)$ 相加。

1-6 考慮一階微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y). \tag{1}$$

則(1)式爲齊次方程式之意義爲何？

解：n 階微分方程式之通式爲：

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=F(x)$$

若 $F(x)\equiv 0$，則爲齊次的。但在本題中之一階微分方程式，“齊次”有附加解釋。一個具有兩變數之函數 $f(x,y)$ 若滿足下式則被稱爲 n 次齊次函數：

$$f(tx,\ ty)=t^n f(x,\ y).$$

在(1)式中 y 函數的導數爲 x,y 之函數，因此(1)式若滿足下式則爲齊次的：

$$f(tx,\ ty)=t^n f(x,\ y).$$

舉例如下：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}=f(x,\ y). \tag{2}$$

設 $x=tx$，$y=ty$ 則

$$\frac{(tx)^2 + 3(ty)^2}{2(tx)(ty)} = \frac{t^2\ [x^2 + 3y^2]}{t^2\ [2xy]} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$

因此(2)式爲一齊次微分方程式。

一階齊次微分方程式的解法並不困難，因此我們必須能夠辨認它。

1-7 舉一具有可變係數，線性微分方程式之例子。

解：n 階線性微分方程式之通式爲：

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = g(x)$$

即“若 y 及其導數之冪次皆爲一次”且“ y 及其導數之係數祇爲獨立變數之函數”則此微分方程式爲線性的。

若 y 及其導數的係數爲獨立變數的函數，則爲一具有可變係數之微分方程式。考慮：

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}x\frac{dy}{dx} + a_ny = F(x)$$

上式爲具有可變係數之方程式，又稱爲柯西-尤拉（Cauchy-Euler ）方程式。此方程式之特性爲代 $x = e^t$ 可轉換成常係數線性微分方程式。考慮二階柯西-尤拉微分方程式如下：

$$a_0x^2\frac{d^ny}{dx^n} + a_1x\frac{dy}{dx} + a_2y = F(x), \qquad (1)$$

其中 a_0，a_1，a_2 爲常數。

設 $x = e^t$，則 $t = \ln x$，因此，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

代入(1)式中，可得：

$$a_0\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + a_1\frac{dy}{dt} + a_2y = F(e^t),$$

或

$$A_0\frac{d^2y}{dt^2} + A_1\frac{dy}{dt} + A_2y = G(t), \qquad (2)$$

其中 $A_0 = a_0;\ A_1 = a_1 - a_0;\ A_2 = a_2;\ G(t) = F(e^t)$

方程式(2)爲二階常係數線性方程式。

比較(2)與(1)即可分辨出線性方程式具有可變係數及常係數間之差異。

1-8 何謂初值問題（ Initial Vaule Problem，縮寫爲 IVP ）？

解：考慮微分方程式：

$$\frac{dy}{dx} = ky \ . \tag{1}$$

由觀察中可知 $y = e^{kx}$ 爲(1)式之解，但它並不是唯一的解。 $y = ce^{kx}$（c 爲任意常數）亦爲其解，可將它微分後代入(1)式中得到證實。因此，(1)式似乎有無限多個解。

在大多數的應用問題中，我們須求一微分方程式的唯一解（ Uuique Solution ）。求法之一爲利用在 $x = 0$時，此解所具有之值，即 $y(0) = A$，其中 A 爲一數值。通常 A 值可由物理條件來決定。例如(1)式可視爲人口對時間之瞬時變化率的代表式。如果我們要求(1)式之唯一解，我們必須附加上起始條件 $y(0) = y_0$。

求下列微分方程式在起始條件 $y(0) = y_0$ 下之解的問題

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

稱爲初值問題。

1-9 舉例說明邊界值問題（ Boundary-Value Problem ）。

解：首先定義邊界值問題。如果微分方程式之解的輔助條件在超過一點以上之處詳予敍述，這些條件稱爲邊界條件。典型的邊界條件由敍述未知函數及其導數在兩點 x_0 與 x_1 處之值所組成。邊界值問題的解由微分方程式在區間（ x_0，x_1 ）內且滿足在 x_0 及 x_1 處邊界條件來決定。

兩個典型邊界值問題如下：

(1) 解

$$y'' - y = r(x); \qquad 0 < x < 1,$$

其中 $y(0) = 1$ ，$y'(1) = 0$

(2) 解

$$y'' + \frac{3}{x}y' = 1 - \frac{1}{y^2} \qquad 0 < x < 1$$

其中 $y'(0) = 0$ ，$y(1) = 1$

通常邊界值問題比初值問題難解。

1-10 舉例說明邊界值問題。

解：考慮初值問題如下：

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=g(x),$$

$$y^{(n)}(0)=y_0;\ y^{(n-1)}(0)=y_1;\ \ldots\ y(0)=y_n\ .$$

上式中起始條件爲 y 及其導數在 $x=0$ 處之值。如果將條件改成下列形式：

$$y^{(n)}(x_0)=y_0;\ y^{(n-1)}(x_1)=y_1;\ \ldots\ y(x_n)=y_n\ ,$$

其中　$x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n$ 爲 x 軸上固定點且不全爲 0，則上述問題稱爲邊界值問題。

有名的邊界值問題爲史騰-呂維爾（Sturm-Liouville）問題，如下所述：

$$\frac{d}{dx}[p(x)y']+[q(x)+\lambda r(x)]y=0, \tag{1}$$

$$A_1\ y(a)+A_2\ y'(a)=0, \tag{2}$$

$$B_1\ y(b)+B_2\ y'(b)=0, \tag{3}$$

其中 λ 爲一參數而 A_1，A_2，B_1 及 B_2 爲常數並使得 A_1 及 A_2，B_1 及 B_2 不能同時爲 0。

在(1)式中令 $p(x)=1$，$q(x)=0$，$r(x)=1$。在(2)式中令 $a=0$，$b=\pi$，$A_1=1$，$A_2=0$，$B_1=1$，$B_2=0$。則上列問題變成：

$$y''+\lambda y=0,$$

$$y(0)=0,\qquad y(\pi)=0.$$

上列二階邊界值問題之解導致傅立葉（Fourier）級數之數學結構。

1-11 舉例說明非線性微分方程式。

解：n 階微分方程式通式爲：

$$f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})=0. \tag{1}$$

如果其中 y 及其導數的冪次祇有一次且係數爲獨立變數的函數。(1)式稱爲線性微分方程式，一微分方程式如果不爲線性的，必爲非線性的。

下列 Riccati 方程式爲非線性微方之一例：

$$y'+y^2+ay+b=0. \tag{2}$$

(2)式因含有 y^2 項故爲非線性。如果我們知道(2)式之任何解，可將它轉換爲線性方程式。