



注册公用设备工程师考试

# 公共基础课 精讲精练

## 给水排水 暖通空调及动力专业

刘 燕 主编



中国电力出版社  
[www.cepp.com.cn](http://www.cepp.com.cn)

# 2009

注册公用设备工程师考试  
公共基础课精讲精练

## 给水排水 暖通空调及动力专业

刘 燕 主编



中国电力出版社  
www.cepp.com.cn

注册公用设备（给水排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格考试即将开始，为有效指导考生复习、应考而组织编写的本辅导教材，以中华人民共和国建设部 2004 年 7 月公布的注册公用设备工程师基础考试大纲为依据，以大纲中提供的参考书目为基础，集中了编者们深厚的专业知识和多年丰富的教学、辅导经验，使其具有较强的指导性和实用性。

本教材力求简明扼要，联系实际，着重于对概念的理解和运用，特别是其中的例题结合考题的形式，注意突出重点概念的讲解。每章前附有考试大纲，每章后附有参考习题以及习题答案和提示，可作为考生检验复习效果和准备考试之用，最后有三套模拟试卷可作为考前冲刺的训练。

由于很多专业（如电气、结构）工程师执业资格公共基础部分的考试大纲完全相同，因此本书不仅是参加公用设备（给排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格公共基础考试人员的必备参考书，也同样适用于其他与注册公用设备工程师公共基础考试大纲相同的专业。

## 图书在版编目（CIP）数据

2009 注册公用设备工程师考试公共基础课精讲精练·给水排水、暖通空调及动力专业/刘燕主编. —北京：中国电力出版社，2009

ISBN 978 - 7 - 5083 - 8673 - 7

I. 2… II. 刘… III. 城市公用设施 - 工程师 - 资格考核 - 自学参考资料  
IV. TU8

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 050062 号

中国电力出版社出版发行

北京三里河路 6 号 100044 <http://www.cepp.com.cn>

责任编辑：张鹤凌 电话：010 - 58383355 邮箱：zhiyezige2008@163.com

责任印制：陈焊彬 责任校对：李 亚

北京同江印刷厂印刷·各地新华书店经售

2009 年 5 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm × 1092mm 1/16 · 32.5 印张 · 808 千字

定价：68.00 元

### 敬告读者

本书封面贴有防伪标签，加热后中心图案消失

本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

本社购书热线电话（010 - 88386685）

## 编委会成员

主 编：刘 燕

参 编：（排名不分先后）

李群高 程学平 岳冠华 刘 燕 张 英  
王文海 陈志新 叶安丽 刘辛国 章美芬

# 前 言

原建设部和人事部决定自2005年起实施注册公用设备（给排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格考试制度，这是为适应社会主义市场经济体制，使工程设计管理体制和人事管理制度尽快与国际接轨的一项配套改革措施。要想取得注册公用设备（给排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格，必须通过全国统一考试取得方可执业上岗。

为配合全国注册公用设备（给排水、暖通空调及动力专业）工程师资格考试，也为有效指导考生复习、应考所组织编写的本辅导教材，以中华人民共和国建设部2004年7月公布的注册公用设备工程师公共基础考试大纲为依据，以大纲中提供的参考书目为基础，集中了编者们的深厚的专业知识和多年丰富的教学、辅导经验，使其具有较强的指导性和实用性。本书包含了高等数学、普通物理、普通化学、理论力学、材料力学、流体力学、计算机应用基础、电工电子技术和工程经济九门课程的基础知识。

本辅导教材自2005年出版以来，深受广大读者和考生的好评，已修订过多次。本次再版，编者们在吸收部分读者和考生根据自身复习和考试经历提出的有效建议的同时，以近几年的工程师执业资格公共基础考试题为参考依据，对原教材进行了修改。

再版后教材的主要特点有以下几项。

- (1) 为方便考生了解考试内容，在每一章开始时附有该章的考试大纲。
- (2) 教材简明扼要，联系实际，着重于对概念的理解和运用。
- (3) 教材中的例题和复习题结合历年考题真题的形式，注意突出重点概念的讲解。
- (4) 每章后均附有参考复习题以及习题的参考答案和提示，作为练习和检验复习效果之用。
- (5) 最后的三套模拟试卷可作为考前冲刺的训练。

由于很多专业（如电气、结构）工程师执业资格公共基础部分的考试大纲完全相同，因此本书不仅是参加公用设备（给排水、暖通空调及动力专业）工程师执业资格公共基础考试人员的必备参考书，也同样适用于其他与注册公用设备工程师公共基础考试大纲相同的专业。

由于时间仓促，在编写过程中难免有疏漏之处，恳请读者指正。

编者

2009年4月

# 目 录

## 前言

第 1 章 高等数学	1
1.1 空间解析几何	1
1.1.1 向量代数	1
1.1.2 平面	4
1.1.3 直线	5
1.1.4 曲面	6
1.1.5 空间曲线	7
1.2 微分学	8
1.2.1 极限与函数的连续性	8
1.2.2 导数与微分	12
1.2.3 偏导数与全微分	15
1.2.4 导数与微分应用	16
1.3 积分学	20
1.3.1 不定积分	20
1.3.2 定积分	23
1.3.3 广义积分	26
1.3.4 重积分	27
1.3.5 平面曲线积分	31
1.3.6 积分应用	34
1.4 无穷级数	36
1.4.1 常数项级数	36
1.4.2 幂级数	39
1.4.3 傅里叶级数	42
1.5 常微分方程	43
1.5.1 微分方程的基本概念	43
1.5.2 可分离变量方程	43
1.5.3 一阶线性微分方程	44
1.5.4 可降阶微分方程	44
1.5.5 常系数线性微分方程	45
1.6 概率与数理统计	46
1.6.1 随机事件的概率	46
1.6.2 一维随机变量及其分布	54
1.6.3 大数定律和中心极限定理	61
1.6.4 数理统计的基本概念	62
1.6.5 参数估计	65

1.6.6	假设检验 .....	68
1.6.7	方差分析与一元回归分析 .....	71
1.7	向量分析 .....	75
1.7.1	向量函数 .....	75
1.7.2	向量函数的导向量及微分 .....	75
1.8	线性代数 .....	76
1.8.1	行列式 .....	76
1.8.2	矩阵 .....	79
1.8.3	$n$ 维向量 .....	85
1.8.4	线性方程组 .....	87
1.8.5	矩阵的特征值与特征向量 .....	91
1.8.6	二次型 .....	93
	复习题 .....	95
	复习题答案与提示 .....	103
<b>第2章 普通物理</b> .....		<b>107</b>
2.1	热学 .....	107
2.1.1	复习指导 .....	107
2.1.2	气体状态参量 平衡态 .....	107
2.1.3	理想气体状态方程 .....	108
2.1.4	理想气体的压强和温度的统计解释 .....	108
2.1.5	能量按自由度均分原理 .....	109
2.1.6	理想气体内能 .....	110
2.1.7	麦克斯韦速率分布定律 .....	110
2.1.8	平均碰撞次数和平均自由程 .....	112
2.2	热力学 .....	113
2.2.1	内能、功和热量 .....	113
2.2.2	热力学第一定律 .....	113
2.2.3	热力学第一定律在理想气体等值过程和绝热过程中的应用 .....	114
2.2.4	气体摩尔热容 .....	115
2.2.5	循环过程和卡诺循环 .....	116
2.2.6	热力学第二定律及其统计意义 .....	117
2.2.7	可逆过程和不可逆过程 .....	117
2.2.8	熵 .....	118
2.3	波动学 .....	118
2.3.1	复习指导 .....	118
2.3.2	机械波的产生与传播 .....	118
2.3.3	简谐波的表达式 .....	120
2.3.4	波的能量 .....	121
2.3.5	波的干涉、驻波 .....	122
2.3.6	声波、超声波、次声波 .....	124
2.3.7	多普勒效应 .....	124
2.4	光学 .....	124

2.4.1	复习指导	124
2.4.2	概述	125
2.4.3	光的衍射	129
2.4.4	光的偏振	131
	复习题	134
	复习题答案与提示	143
<b>第3章</b>	<b>普通化学</b>	<b>147</b>
3.1	物质的结构与物质的状态	149
3.1.1	原子结构	149
3.1.2	化学键和分子结构	153
3.1.3	晶体结构和性质	157
3.1.4	气体定律	159
3.2	溶液	161
3.2.1	溶液浓度	161
3.2.2	稀溶液的通性	161
3.2.3	可溶电解质单相电离平衡	163
3.2.4	难溶电解质的多相解离平衡	168
3.3	周期	170
3.3.1	元素周期系和元素核外电子分布	170
3.3.2	元素性质的周期性递变	171
3.3.3	氧化物及其水合物的酸碱性递变规律	172
3.4	化学反应方程式, 化学反应速率与化学平衡	173
3.4.1	化学反应方程式的写法及计算	173
3.4.2	化学反应热效应	173
3.4.3	化学反应方向判断	175
3.4.4	化学反应速率	176
3.4.5	化学平衡	178
3.4.6	化学平衡的移动	180
3.5	氧化还原与电化学	182
3.5.1	氧化还原反应	182
3.5.2	原电池	183
3.5.3	电极电势	184
3.5.4	电极电势的应用	186
3.5.5	电解池	187
3.5.6	电解产物的判断及电解的应用	187
3.5.7	金属的腐蚀及防护	188
3.6	有机化学	189
3.6.1	有机物的特点、分类	189
3.6.2	烃及烃的衍生物的分类及结构特征	190
3.6.3	有机化合物的命名	191
3.6.4	有机物的重要化学反应	194
3.6.5	高分子化合物及其合成	199



3.6.6 高分子材料 .....	200
3.6.7 典型有机化合物的主要性质及用途 .....	202
复习题 .....	206
复习题答案与提示 .....	216
<b>第4章 理论力学</b> .....	<b>224</b>
4.1 静力学 .....	224
4.1.1 静力学的基本概念及基本原理 .....	224
4.1.2 力系的简化 .....	230
4.1.3 力系的平衡 .....	231
4.2 运动学 .....	239
4.2.1 点的运动学 .....	239
4.2.2 刚体的基本运动 .....	241
4.2.3 点的合成运动 .....	244
4.2.4 刚体的平面运动 .....	246
4.3 动力学 .....	249
4.3.1 动力学基本定律及质点运动微分方程 .....	249
4.3.2 动力学普遍定理 .....	250
4.3.3 达朗贝尔原理 .....	256
4.3.4 虚位移原理 .....	259
4.3.5 单自由度系统自由振动 .....	261
复习题 .....	263
复习题答案与提示 .....	273
<b>第5章 材料力学</b> .....	<b>276</b>
5.1 轴向拉伸与压缩 .....	276
5.1.1 轴向拉伸与压缩的概念 .....	276
5.1.2 轴向拉伸与压缩杆件的内力 .....	276
5.1.3 强度条件 .....	279
5.1.4 轴向拉压杆的变形 胡克定律 .....	280
5.2 剪切 .....	282
5.2.1 连接件的实用计算 .....	282
5.2.2 切应力互等定理剪切 胡克定律 .....	283
5.3 扭转 .....	284
5.3.1 扭转的概念 .....	284
5.3.2 外力偶矩的计算 .....	284
5.3.3 扭矩和扭矩图 .....	284
5.3.4 圆杆在扭转时的应力和强度条件 .....	284
5.3.5 圆杆扭转时的变形 .....	285
5.3.6 扭转变形能计算 .....	286
5.4 截面图形几何性质 .....	286
5.4.1 静矩与形心 .....	286
5.4.2 极惯性矩、惯性矩、惯性积、惯性半径 .....	287

5.4.3	惯性矩的平行移轴公式	288
5.4.4	惯性主轴和主惯性矩	288
5.5	弯曲梁的内力、应力和位移	288
5.5.1	平面弯曲的概念	288
5.5.2	梁的内力	289
5.5.3	弯曲正应力 正应力强度条件	292
5.5.4	弯曲切应力 弯曲切应力强度条件	293
5.5.5	梁的合理截面形状	293
5.5.6	弯曲中心的概念	294
5.5.7	梁的位移	295
5.5.8	卡氏第二定理求变形	298
5.6	应力状态和强度理论	299
5.6.1	点的应力状态	299
5.6.2	平面应力状态	300
5.6.3	三向应力状态简介	301
5.6.4	广义胡克定律	301
5.6.5	强度理论	302
5.7	组合变形	304
5.7.1	斜弯曲	305
5.7.2	拉(压)弯组和变形	305
5.7.3	弯扭组合变形	305
5.8	压杆稳定	307
5.8.1	压杆稳定的临界力 欧拉公式	307
5.8.2	欧拉公式的适用范围 经验公式	308
5.8.3	压杆的稳定计算	309
5.8.4	提高压杆稳定性的措施	309
	复习题	311
	复习题答案与提示	321
<b>第6章</b>	<b>流体力学</b>	<b>324</b>
6.1	流体的主要物理性质	324
6.1.1	易流动性	324
6.1.2	惯性	324
6.1.3	重力特性	324
6.1.4	黏滞性	325
6.1.5	压缩性和热胀性	326
6.2	流体静力学	327
6.2.1	流体静压强及其特性	327
6.2.2	重力作用下流体静压强的分布规律及其度量	327
6.2.3	液体总压力的计算	329
6.3	流体运动学、动力学基础	332
6.3.1	流场的基本概念	332
6.3.2	流体运动的总流分析	333

6.4 流动阻力和水头损失 .....	336
6.4.1 实际流体的两种流态 层流和紊流 .....	337
6.4.2 圆管中的层流运动 紊流运动的特征 .....	337
6.4.3 沿程水头损失和局部水头损失 .....	338
6.4.4 边界层基本概念和绕流阻力 .....	340
6.5 孔口、管嘴出流 有压管道恒定流 .....	342
6.5.1 孔口、管嘴出流 .....	342
6.5.2 有压管道恒定流 .....	344
6.6 明渠恒定均匀流 .....	346
6.6.1 明渠流的基本概念 .....	346
6.6.2 过水断面的几何要素 .....	347
6.6.3 明渠均匀流的水力特征和基本公式 .....	347
6.7 渗流定律 井和集水廊道 .....	349
6.7.1 渗流基本概念 .....	349
6.7.2 渗流基本定律 .....	349
6.7.3 单井的渗流 .....	350
6.7.4 集水廊道 .....	351
6.8 相似原理和量纲分析 .....	352
6.8.1 相似原理 .....	352
6.8.2 量纲和谐原理与量纲分析 .....	354
6.9 流体运动参数的测量 .....	355
6.9.1 流速的测量 .....	355
6.9.2 流量的测量 .....	355
6.9.3 压强的测量 .....	356
复习题 .....	358
复习题答案与提示 .....	366

## 第7章 计算机应用基础 .....

7.1 计算机基础知识 .....	370
7.1.1 计算机硬件的组成及功能 .....	370
7.1.2 计算机软件的组成及功能 .....	371
7.1.3 数制转换 .....	374
7.2 Windows 操作系统 .....	376
7.2.1 基本知识 .....	376
7.2.2 系统的启动与退出 .....	376
7.2.3 资源管理器的基本操作 .....	377
7.2.4 磁盘操作 .....	378
7.2.5 查找文件与文件夹 .....	379
7.2.6 选定文件与文件夹 .....	379
7.2.7 复制或移动文件与文件夹 .....	380
7.2.8 重新命名文件或文件夹 .....	381
7.2.9 删除文件或文件夹 .....	381
7.2.10 剪贴板 .....	382

7.2.11 创建文件夹 .....	382
7.2.12 计算机网络 .....	383
7.3 计算机程序设计语言 .....	385
7.3.1 FORTRAN 程序构成与基本规定 .....	385
7.3.2 数据类型与运算 .....	386
7.3.3 FORTRAN 数据文件 .....	387
7.3.4 FORTRAN 程序设计常用语句 .....	389
复习题 .....	393
复习题答案与提示 .....	397
<b>第8章 电工电子技术 .....</b>	<b>400</b>
8.1 电场与磁场 .....	400
8.1.1 库仑定律 .....	400
8.1.2 高斯定理 .....	401
8.1.3 安培环路定律 .....	401
8.1.4 电磁感应定律 .....	402
8.2 直流电路 .....	402
8.2.1 电路基本元件 .....	402
8.2.2 欧姆定律 .....	403
8.2.3 基尔霍夫定律 .....	403
8.2.4 叠加原理 .....	405
8.2.5 戴维宁定理 .....	405
8.3 正弦交流电路 .....	406
8.3.1 三要素 .....	406
8.3.2 有效值 .....	407
8.3.3 复阻抗 .....	408
8.3.4 功率及功率因数 .....	409
8.3.5 串联谐振和并联谐振 .....	411
8.3.6 三相电路 .....	411
8.3.7 安全用电常识 .....	413
8.4 RC 和 RL 电路暂态过程 .....	416
8.4.1 RC、RL 电路的响应 .....	416
8.4.2 三要素法 .....	416
8.5 变压器与电动机 .....	417
8.5.1 变压器 .....	417
8.5.2 三相异步电动机的使用 .....	418
8.5.3 常用电动机的继电—接触器控制 .....	419
8.6 二极管及整流、滤波、稳压电路 .....	420
8.6.1 半导体二极管 .....	420
8.6.2 整流电路和滤波电路 .....	420
8.6.3 稳压电路 .....	422
8.7 三极管和单管放大电路 .....	423
8.7.1 三极管的结构及工作状态 .....	423

8.7.2 单管放大电路 .....	424
8.8 运算放大器 .....	426
8.8.1 组成与特点 .....	426
8.8.2 运算放大器的应用 .....	427
8.9 门电路和触发器 .....	429
8.9.1 基本门电路 .....	429
8.9.2 触发器 .....	431
复习题 .....	433
复习题答案与提示 .....	440
模拟试卷 (一) .....	443
模拟试卷 (一) 答案与提示 .....	457
模拟试卷 (二) .....	463
模拟试卷 (二) 答案与提示 .....	478
模拟试卷 (三) .....	484
模拟试卷 (三) 答案与提示 .....	499
参考文献 .....	505

# 第1章 高等数学

## 考试大纲

- 1.1 空间解析几何 向量代数 直线 平面 柱面 旋转曲面 二次曲面 空间曲线
- 1.2 微分学 极限 连续 导数 微分 偏导数 全微分 导数与微分的应用
- 1.3 积分学 不定积分 定积分 广义积分 二重积分 三重积分 平面曲线积分 积分应用
- 1.4 无穷级数 数项级数 幂级数 泰勒级数 傅里叶级数
- 1.5 常微分方程 可分离变量方程 一阶线性方程 可降阶方程 常系数线性方程
- 1.6 概率与数理统计 随机事件与概率 古典概型 一维随机变量的分布和数字特征 数理统计的基本概念 参数估计 假设检验 方差分析 一元回归分析
- 1.7 向量分析
- 1.8 线性代数 行列式 矩阵  $n$  维向量 线性方程组 矩阵的特征值与特征向量 二次型

## 1.1 空间解析几何

### 1.1.1 向量代数

1. 向量(有大小又有方向的量)

(1) 向量的表示法。设向量  $\boldsymbol{a}$  的起点为  $A(x_1, y_1, z_1)$ , 终点为  $B(x_2, y_2, z_2)$ 。

1) 几何表示: 用起点为  $A(x_1, y_1, z_1)$ , 终点为  $B(x_2, y_2, z_2)$  有向线段表示。

2) 坐标表达式:  $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{a_x, a_y, a_z\}$  (1-1)

注:  $a_x, a_y, a_z$  是向量  $\boldsymbol{a}$  的坐标, 向量的坐标也是该向量在三坐标轴上的投影。

(2) 向量的模(向量的大小)

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1-2)$$

(3) 向量的方向角与方向余弦(向量的方向)

向量  $\boldsymbol{a}$  与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正向的夹角  $\alpha, \beta, \gamma$  叫  $\boldsymbol{a}$  的方向角 ( $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ )。  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  叫做  $\boldsymbol{a}$  的方向余弦 ( $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ )

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} \quad (1-3)$$

(4) 几种特殊向量

1) 单位向量: 模为 1 的向量。

与  $\boldsymbol{a}$  同向的单位向量  $\boldsymbol{a}^0 = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|} \boldsymbol{a}$  (1-4)

基本单位向量: 与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴同方向的单位向量, 记为  $\boldsymbol{i}(1, 0, 0), \boldsymbol{j}(0, 1, 0), \boldsymbol{k}(0, 0, 1)$ 。

2) 负向量: 与  $\boldsymbol{a}$  模相同, 方向相反的向量, 记为  $-\boldsymbol{a}$ 。

3) 零向量: 模为 0, 没有确定方向的向量, 记为  $\mathbf{0}$ 。

(5) 两自由向量相等。  $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow$  模相等且方向相同(相等的自由向量视为同一个向量)

## (6) 向量在轴上的投影

定义: 设向量  $\mathbf{AB}$  的起点  $A$  与终点  $B$  在轴  $u$  上的投影点分别为  $A'$  和  $B'$ , 则称轴  $u$  上的有向线段  $A'B'$  的值  $A'B'$  叫向量  $\mathbf{AB}$  在轴  $u$  上的投影, 记作  $\text{Prj}_u \mathbf{AB} = A'B'$ , 且

$$\text{Prj}_u \mathbf{AB} = |\mathbf{AB}| \cos(\widehat{\mathbf{AB}, u}) \quad (1-5)$$

## 2. 向量的运算

## (1) 向量的加减法

1) 两向量相加, 其和仍为向量, 平面向量遵循平行四边形法则或三角形法则。

2) 坐标表达式:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\} \quad (1-6)$$

3) 运算律:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (1-7)$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \quad (1-8)$$

4) 向量的减法:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \quad (1-9)$$

## (2) 数乘向量

1) 定义: 数  $\lambda$  与向量  $\mathbf{a}$  的乘积为一向量, 记作  $\lambda\mathbf{a}$ , 其模  $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$ , 其方向, 当  $\lambda > 0$  时, 与  $\mathbf{a}$  同向;  $\lambda < 0$  时与  $\mathbf{a}$  反向

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, (-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a} \quad (1-10)$$

2) 坐标表达式:

$$\lambda\mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} \quad (1-11)$$

3) 运算律:

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} = \mu(\lambda\mathbf{a}) \quad (1-12)$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \quad (1-13)$$

4) 性质:

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad (1-14)$$

## (3) 数量积(点积)

1) 定义:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$  (运算结果为一数量)

等价定义

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{Prj}_a \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{Prj}_b \mathbf{a} \quad (1-15)$$

2) 坐标表达式:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1-16)$$

3) 运算律:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (1-17)$$

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}) \quad (1-18)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (1-19)$$

4) 性质:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \quad (1-20)$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (1-21)$$

5) 两向量夹角的余弦公式:

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (1-22)$$

(4) 向量积(叉积)

1) 定义:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = n^0 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{a, b})$ , 其中  $n^0$  是按右手法则垂直于  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  所在平面的单位向量(运算结果为一向量)。

2) 几何意义:  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{a, b})$  是以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为邻边的平行四边形的面积。

3) 坐标表达式:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \quad (1-23)$$

4) 运算律:

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) \quad (1-24)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (1-25)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (1-26)$$

5) 性质:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (1-27)$$

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1-28)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b} \quad (1-29)$$

(5) 混合积

1) 定义:  $[\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  (运算结果为一数量)

$[\mathbf{abc}] = \pm V$  ( $V$  为以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  为棱的平行六面体的体积)

2) 性质:

$$[\mathbf{abc}] = [\mathbf{bac}] = [\mathbf{cab}] \quad (1-30)$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面  $\Leftrightarrow [\mathbf{abc}] = 0$

【例 1-1】若  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ , 则( )。

A.  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$                       B.  $\mathbf{a} // \mathbf{b}$  且  $\mathbf{a} // \mathbf{c}$                       C.  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  或  $\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$                       D.  $\mathbf{a} // (\mathbf{b} - \mathbf{c})$

解:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} // (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ , 故选 D。

【例 1-2】已知  $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = \sqrt{2}$ , 且  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$ , 则  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| =$  ( )。

A. 2                      B.  $2\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{2}/2$                       D. 1

解:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{a, b})$ , 所以  $2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{a, b})$

所以  $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{2}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $\sin(\widehat{a, b}) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{a, b}) = 2$ , 故选 A。

【例 1-3】已知向量  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ , 则垂直于  $\mathbf{a}$  且垂直于  $Oy$  轴的单位向量是( )。

A.  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$                       B.  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$                       C.  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$                       D.  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{k})$



解: 与  $Oy$  轴同方向的单位向量是  $j$ , 而

$$\mathbf{a} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} - \mathbf{i}, \text{ 垂直于 } \mathbf{a} \text{ 且垂直于 } Oy \text{ 轴的单位向量是}$$

$$\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{j}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{j}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{k} - \mathbf{i}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{k}), \text{ 故选 C.}$$

### 1.1.2 平面

#### 1. 平面方程

设平面过点  $(x_0, y_0, z_0)$ , 法向量为  $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$

##### (1) 点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1-31)$$

注: 要求平面的方程, 关键是利用已知条件, 找出平面的法向量和某点坐标。

##### (2) 一般方程

$$Ax + By + Cz + D = 0, (\mathbf{n} = \{A, B, C\} \text{ 为平面的法向量}) \quad (1-32)$$

当  $D = 0$  时, 平面过原点;

当  $A = 0 (B = 0, C = 0)$  时, 平面平行于  $x(y, z)$  轴, 这时若  $D \neq 0$ , 平面不经过  $x(y, z)$  轴, 若  $D = 0$ , 则平面经过  $x(y, z)$  轴;

当  $A = B = 0$  时, 平面平行于  $xoy$  面。

注: 求平面的方程的另一常用方法是利用条件, 写出平面一般式, 再确定系数。

##### (3) 截距式方程

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a, b, c \text{ 为平面在 } x \text{ 轴、} y \text{ 轴、} z \text{ 轴上的截距})$$

#### 2. 两平面的夹角

设平面  $\pi_1, \pi_2$  的法向量为

$$\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \text{ 和 } \mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\} \quad (1-33)$$

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \quad (1-34)$$

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 // \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

#### 3. 点到平面的距离

点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (1-35)$$