高考加速训练

JIASUXUNLIAN

GAO KAO JIA SU XUN LIAN

思维点拨与能力训练

王宜学　赵富生　主编

高二数学

试验修订本·必修

（二年级·全一册）

辽宁大学出版社

目录指南

第六章　不等式

第七章　直线和圆的方程

第八章　圆锥曲线方程

第九章　直线、平面、简单几何体(A)

第九章 直线、平面、简单几何体(B)

第十章 排列、组合和概率

第六章　不等式

本章知识要点

- 不等式的性质
- 算术平均数与几何平均数
- 不等式证明的基本方法(比较法、分析法、综合法)
- 不等式的解法举例
- 含有绝对值的不等式

§6.1　不等式的性质

概念理解 基础点拨

1. 两个实数 a 与 b 之间具有以下性质:

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b;$$
$$a-b=0\Leftrightarrow a=b;$$
$$a-b<0\Leftrightarrow a<b.$$

上式的左边部分反映的是实数的运算性质,而右边部分反映的是实数的大小顺序,合起来就反映了实数的运算性质和大小顺序之间的关系,它是本章整个内容的基础,是证明不等式与解不等式的主要依据.

2. 不等式的性质:

定理 1　$a>b\Leftrightarrow b<a$　　(对称性)

定理 2　$a>b$ 且 $b>c\Rightarrow a>c$　　(传递性)

定理 3　$a>b\Rightarrow a+c>b+c$　　(加法单调性)

定理 4

$$\left.\begin{array}{l}a>b\\c>0\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bc$$
$$\left.\begin{array}{l}a>b\\c<0\end{array}\right\}\Rightarrow ac<bc$$
(乘法单调性)

定理 5　$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n>1$ 且 $n\in \mathbf{N}^*$)　　(开方法则)

由它们可以推出以下不等式的运算法则:

若　$a+b>c\Rightarrow a>c-b$　　(移项法则)

若　$\left.\begin{array}{l}a>b\\c>d\end{array}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$　　(同向不等式相加)

若　$\left.\begin{array}{l}a>b>0\\c>d>0\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bd$　　(同向不等式相乘)

若　$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$ ($n>1$ 且 $n\in \mathbf{N}^*$)　　(乘方法则)

若　a、b 同号,$a>b\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(倒数法则)

点拨:在运用不等式性质时,一定要注意它们成立的条件,如乘法的单调性、同向不等式相乘,不等式两边同时乘方(开方)等.

范例解析 思维激活

例 1　$a>b$,$ab>0$,试比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.

【思路明线】　要比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小,只要考察它们的差 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ 的符号即可.

【规范解答】　$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$,

因为　$a>b$,$ab>0$,

所以 $b-a<0,\frac{b-a}{ab}<0$,即$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

【特别提示】 同号两数的顺序关系与其倒数的顺序关系相反.

例 2 对于实数 a、b、c,判断下列命题的真假.

(1)若 $a>b$,则 $ac<bc$.

(2)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$.

(3)若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$.

(4)若 $a<b<0$,则 $a^2>ab>b^2$.

(5)若 $a<b<0$,则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(6)若 $a<b<0$,则$\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$.

(7)若 $a<b<0$,则 $|a|>|b|$.

(8)若 $a<b<0$,则$\frac{b}{a}<1$.

(9)若 $c>a>b>0$,则$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

(10)若 $a>b,\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,则 $a>0,b<0$.

【思路明线】 这一组命题,是考察不等式的性质及性质定理的条件与结论,可直接应用性质定理加以判别命题的真假.

【规范解答】 (1)因 c 的正负或是否为零未知,无法判断 ac 与 bc 的大小,所以是假命题.

(2)因 $c^2\geqslant 0$,所以 $c=0$ 时,有 $ac^2=bc^2$,故为假命题.

(3)由 $ac^2>bc^2$,知 $c\neq 0,c^2>0$,所以为真命题.

(4)由$\begin{cases}a<b\\a<0\end{cases}\Rightarrow a^2>ab$,又$\begin{cases}a<b\\b<0\end{cases}\Rightarrow ab>b^2$,所以为真命题.

(5)由 $a<b<0$ 有 $ab>0,\frac{1}{ab}>0\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,故为假命题.

(6)因 $a<b<0\Rightarrow\begin{cases}-a>-b>0\\-\frac{1}{b}>-\frac{1}{a}>0\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$,所以为假命题.

(7)两负实数中,较小的数的绝对值反而大,所以是真命题.

(8)$a<b<0\Rightarrow|a|>|b|\Rightarrow\frac{|b|}{|a|}<1\Rightarrow\frac{b}{a}<1$,所以为真命题.

(9)因为 $c-b>c-a>0\Rightarrow\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0$

又因为$\begin{cases}a>b>0\\\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$,所以为真命题.

(10)因为$\begin{cases}a-b>0\\\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0\end{cases}\Rightarrow\frac{b-a}{ab}>0\Rightarrow ab<0$ 又因为 $a>b$,所以 $a>0,b<0$,为真命题.

【特别提示】 对于判断题,如果是真命题,应说明理由或进行证明.在推理过程中应紧扣定义、性质、定理,并要注意特殊情况,如果是假命题只需举一反例.

例 3 设 $f(x)=ax^2+bx$,且 $-1\leqslant f(-1)\leqslant 2$,$2\leqslant f(1)\leqslant 4$,求 $f(-2)$的取值范围.

【思路明线】 用 $f(-1)$和 $f(1)$去表示$f(-2)$,然后用不等式的性质求 $f(-2)$的取值范围.

【规范解答】 因为 $f(x)=ax^2+bx$

所以 $f(-1)=a-b,f(1)=a+b,f(-2)=4a-2b$

设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$

即 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)$

$=(m+n)a+(n-m)b$

所以 $\begin{cases}m+n=4,\\m-n=2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}m=3,\\n=1.\end{cases}$

从而 $f(-2)=3f(-1)+f(1)$

而 $-3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6,2\leqslant f(1)\leqslant 4$

所以 $-1\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

【特别提示】 此题解题的关键在于找出$f(-2)$用 $f(-1)$、$f(1)$表达的式子,也就是把$(4a-2b)$用 $a-b$,$a+b$ 来表示.解决这一问题,我们用的是待定系数法,此题的 m 和 n 是待定系数,当我们找到$f(-2)$用$f(-1)$、$f(1)$表示的式子以后,我们依据同向不等式相加这个性质,很方便地解决了这一问题.

精彩小结 方法提炼

1. 不等式的性质是研究不等式问题的基础，学习不等式的性质，要掌握好两点：(1)每条性质定理的条件不能忽略；(2)正确区分不同性质定理中条件和结论之间的关系是“⇒”还是“⇔”的关系.

2. 有关不等式的性质的考查，一般采用选择题或填空题的形式，在具体解决时，也经常使用特值法或对比验证法等，方便快捷.

层面选题 自练自测

基础知识训练(*A* 层面)

(限时 15 分钟)

一、选择题

1. 若 $a<b<0$，则下面命题中正确的是 ( )

(A) $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　(B) $\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a}$

(C) $\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$　　(D)不能确定

2. 若 $a<0$，$-1<b<0$，则有 ( )

(A) $a>ab>ab^2$　　(B) $ab^2>ab>a$

(C) $ab>a>ab^2$　　(D) $ab>ab^2>a$

3. 若 $a>b$，下列不等式中一定成立的是 ( )

(A) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(B) $\frac{b}{a}<1$

(C) $2^a<2^b$　　(D) $\lg(a-b)>0$

4. 已知 $a+b>0$ 且 $b<0$，那么 $a,b,-a,-b$ 的大小关系是 ( )

(A) $a>b>-b>-a$　　(B) $a>-b>-a>b$

(C) $a>-b>b>-a$　　(D) $a>b>-a>-b$

二、填空题

5. 比较 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ 与 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$ 的大小________.

6. 如果 $x\in\mathbf{R}$，那么 x^2 与 $x-1$ 的大小关系为________.

7. 已知 a、b、c 是三角形 ABC 的三边，比较大小：$(a+b+c)^2$ ________ $4(ab+bc+ca)$.

8. 已知不等式：① $|x|\geqslant x$；② $a^2+b^2\geqslant 2ab$；③ $\lg(x^2+1)>0$；④ $x^2-x+1<0$；⑤ $\sqrt{x-2}>1-x$，其中________是绝对值不等式，________是条件不等式，________是矛盾不等式.

综合能力检测(*B* 层面)

(限时 45 分钟)

一、选择题

1. 已知 $a=\log_{\frac{1}{3}}5$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$，$c=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$，那么 a、b、c 间的大小关系为 ( )

(A) $a<b<c$　　(B) $a<c<b$

(C) $c<a<b$　　(D) $c<b<a$

2. 已知 a、b、c 均为实数，下面四个命题中

① $a<b<0\Rightarrow a^2<b^2$　　② $\frac{a}{b}<c\Rightarrow a<bc$

③ $ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$　　④ $a<b<0\Rightarrow\frac{b}{a}<1$

正确命题的个数是 ( )

(A)0 个　　(B)1 个

(C)2 个　　(D)3 个

3. 若 $a>0>b$，$0>c>d$，则以下不等式中不成立的是 ( )

(A) $ac<bd$　　(B) $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

(C) $a+c>b+d$　　(D) $a-d>b-c$

4. 下面与 $a>b$ 等价的不等式是 ( )

(A) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(B) $|a|>b$

(C) $\frac{a}{b}>1$　　(D) $2^a>2^b$

5. 下列命题中正确的是 ( )

(A) $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$　　(B) $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Rightarrow a>b$

(C) $\left.\begin{matrix}a^3>b^3\\ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(D) $\left.\begin{matrix}a^2>b^2\\ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

6. 设 $a=\log_{\frac{1}{2}}2$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\sin30^\circ$，$c=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin30^\circ}$，则 ( )

(A) $a<b<c$　　(B) $b<c<a$

(C) $a<c<b$　　(D) $c<b<a$

二、填空题

7. 已知 $a>0,\frac{1}{b}-\frac{1}{a}>1$，则 $\sqrt{1+a}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{1-b}}$ 之间的大小关系是________.

8. 若 $1<x<10,a=(\lg x)^2,b=\lg x^2,c=\lg(\lg x)$，则 a、b、c 的大小顺序是________.

9. 已知 $a>b$，且 $a\cdot b\neq 0$，比较大小：$\frac{1}{a}$ ________ $\frac{1}{b}$.

三、解答题

10. 判断下列各命题的真假，并说明理由.

(1) $a>b>0,c\geqslant 0,c>d\Rightarrow ac>bd$；

(2) $a>b,\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow a,b>0$；

(3) $a<b<0\Rightarrow\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$；

(4) $a^2<a\Leftrightarrow 0<a<1$；

(5) $1+a+a^2+\cdots+a^{2n}>0(a\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*)$.

11. 已知 $f(x)=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1,-4\leqslant f(2)\leqslant -1$，求 $f(3)$ 的取值范围.

12. 已知 $2^{a+b}>1$，试比较 a^5+b^5 与 $a^3b^2+a^2b^3$ 的大小.

§6.2 算术平均数与几何平均数

概念理解 基础点拨

①如果 a、$b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取等号），反之 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$ 也成立.

②如果 a、$b\in\mathbf{R}$，那么 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号），反之 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 也成立. 这里，我们称 $\frac{a+b}{2}$ 为 a、b 的算术平均数，称 $\sqrt{ab}$ 为 a、b 的几何平均数，即 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，其几何意义是"半径不小于半弦".

利用算术平均数与几何平均数的关系，我们可以求某些函数的最大值、最小值. 但一定要注意：①公式成立的条件②含变数的各项和或积必须是常数，并且只有相等时，才能利用算术平均数与几何平均数的关系求某些函数的最大值或最小值.

范例解析 思维激活

例1 设 $b>a>0$ 且 $a+b=1$，则下列四个数 $\frac{1}{2}$，$2ab$，a^2+b^2，b 中最大的数是 （　）

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $2ab$

(C) a^2+b^2　　(D) b

【思路明线】 这是比较四个正数的大小，根据已知条件预先判断出它们两两的大小关系，再利用比较法比较大小，否则头绪显得纷乱.

【规范解答】 由已知 $0<a<\frac{1}{2}<b<1$，

得：$a^2+b^2>2ab$. 又因为

$$b-(a^2+b^2)=-2b^2+3b-1$$
$$=(1-b)(2b-1)>0$$

所以应选(D).

【特别提示】 象这样的题可以采用特殊值法，比如 $b=\frac{2}{3}$，$a=\frac{1}{3}$.

例2 已知 a、b、c、m、$n\in\mathbf{R}^+$，设 $p=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$ 则 p、q 的大小关系是__________.

【思路明线】 因为 q 为两个同次根式的积，可以化简，化简后再寻找解决问题的办法.

【规范解答】
$$q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$$
$$=\sqrt{ab+cd+\frac{nbc}{m}+\frac{mad}{n}}$$
$$\geqslant\sqrt{ab+cd+2\sqrt{abcd}}=P.$$

【特别提示】 ①给的代数式能化简的尽量化简.

②比较以根式形式出现的两个正实数的大小，常采用比较它们平方的大小，如本题求 q^2-p^2 的正负.

例3 点 (x,y) 在第一象限，且在直线 $2x+3y=6$ 上移动，求 $\log_{\frac{3}{2}}x+\log_{\frac{3}{2}}y$ 的最大值.

【思路明线】 本题为一道综合题，首先要注意到对数函数为一增函数，其次要为利用均值不等式创造条件，进行合理变形.

【规范解答】 因为 $x>0$，$y>0$ 且 $xy=\frac{1}{6}(2x\cdot 3y)\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\cdot 3^2=\frac{3}{2}$（$2x=3y=3$ 时取等号）

所以 $\log_{\frac{3}{2}}x+\log_{\frac{3}{2}}y=\log_{\frac{3}{2}}xy\leqslant\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}=1$.

【特别提示】 充分利用已知条件，关键在于变形，变形的目的为使用均值定理创造条件.

精彩小结 方法提炼

1. 称不等式"$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$、$b\in\mathbf{R}^+$）"为均值不等式，它的适用条件是两个数均为正数. 两种平均数

的关系推广至3个或几个的情形仍然成立.

2. 使用均值不等式求某些函数的最大(小)值是其主要应用.在具体求解时必须深思:"一正、二定、三相等"三个条件,缺一不可.在具体操作时,一般为了使"积"或"和"为定值,往往要对函数的解析式进行"配凑"的变形,常见的变形技巧有"拆项或添项"、"同乘或同除"等.

层面选题 自练自测

基础知识训练(A层面)

(限时15分钟)

一、选择题

1. 下列函数中,最小值为2的是 ( )

(A)$y=\frac{1}{x}+x(x<0)$

(B)$y=\frac{1}{x}+1(x\geqslant 1)$

(C)$y=\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-2(x>0)$

(D)$y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$

2. 已知$a>0,b>0$且$a+b\leqslant 4$,则下列不等式中正确的是 ( )

(A)$\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{4}$　(B)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 1$

(C)$\sqrt{ab}\geqslant 2$　(D)$\frac{1}{ab}\geqslant 1$

3. 若$a>b>0$,则下面不等式正确的是 ( )

(A)$\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$　(B)$\sqrt{ab}\leqslant\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{a+b}{2}$

(C)$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$　(D)$\sqrt{ab}<\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$

4. 已知$x>0,y>0$且$x+y=5$,则$\lg x+\lg y$的最大值是 ( )

(A)$\lg 5$　(B)$2-4\lg 2$

(C)$\lg\frac{5}{2}$　(D)不存在

二、填空题

5. 已知$\lg x+\lg y=2$,则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为__________.

6. 已知$x>0,y>0$且$x+y=6$,则x^2+y^2的最小值是__________.

7. 已知$a+b=1,a、b\in\mathbf{R}^+$,判断a^4+b^4与$\frac{1}{8}$的大小关系为__________.

8. 已知$x>0,y>0,x+y=1$,则$\frac{1}{xy}$与4的大小关系是__________;$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{y^2}\right)$的最小值为__________.

综合能力检测(B层面)

(限时45分钟)

一、选择题

1. 若$x,y\in\mathbf{R}^+,x+y\leqslant 4$,则下列不等式恒成立的是 ( )

(A)$\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{4}$　(B)$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 1$

(C)$\sqrt{xy}\geqslant 2$　(D)$\frac{1}{xy}\geqslant 1$

2. 当$a>1,0<b<1$时,$\log_a b+\log_b a$的取值范围是 ( )

(A)$[2,+\infty)$　(B)$(-\infty,-2)$

(C)$(2,+\infty)$　(D)$(-\infty,-2]$

3. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q>0$,S_n是其前n项的和,则 ( )

(A)$S_n\cdot S_{n+2}\leqslant S_{n+1}^2$　(B)$S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$

(C)$S_n\cdot S_{n+2}>S_{n+1}^2$　(D)$S_n\cdot S_{n+2}\geqslant S_{n+1}^2$

4. 已知$x+2y=1$,则2^x+4^y的最小值为 ( )

(A)8　(B)6

(C)$2\sqrt{2}$　(D)$3\sqrt{2}$

5. 已知$0<a<1,0<x\leqslant y<1$,且$\log_a x\cdot\log_a y=1$,那么xy ( )

(A)无最大值也无最小值

(B)无最大值而有最小值

(C)有最大值而无最小值

(D)有最大值也有最小值

6. 若$x+2y=4$,且$x>0,y>0$,则$\lg x+\lg y$最大值为 ( )

(A)2　(B)$2\lg 2$

(C)lg2　　　　(D)lg $\frac{1}{2}$

二、填空题

7. 若 a、b、c 为正数，则 $a+b+c$ 与 $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$ 的大小关系为__________.

8. 已知 a、b、c 是正数且 $a+b+c=1$，比较大小：$(1-a)(1-b)(1-c)$__________ $8abc$.

9. 若 $x,y\in(0,+\infty)$ 且 $x\neq y$，设 $M=\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}$，$N=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，$P=2\sqrt[4]{xy}$，则 M、N、P 的大小关系是__________.

三、解答题

10. 求函数 $y=\frac{\sqrt{x+2}}{2x+5}$ 的值域.

11. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，求证：$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

12. 已知：$x,y\in\mathbf{R}^+$，且 $x+2y=1$，求 $x^{-1}+y^{-1}$ 的取值范围.

§6.3 不等式的证明

概念理解 基础点拨

掌握不等式证明的基本方法：比较法，分析法，综合法.

1. 由 $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$，故要证明 $a>b$，只要证明 $a-b>0$，这就是求差比较法.

求差比较法的一般证题步骤是：作差→变形→判断符号. 其中"变形"是证明的关键，一般通过配方或因式分解，将差变形为几个因式的积或配成几个平方和的形式.

2. 若 $a>0, b>0$，那么 $\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b$，即可用求商的方法判断 a 与 b 的大小，此法为求商比较法.

求商比较法的证题步骤为：作商→变形→判断商与 1 的大小关系. 证明有关指数幂型不等式时，常用此法.

3. 证明不等式，也可根据不等式的性质和已经证明过的不等式来进行，这就是用综合法来证明不等式. 换言之，综合法是由已知条件出发，推导出所要证明的不等式. 在运用不等式的性质和已经证明过的不等式时，要注意它们各自成立的条件.

4. 分析法也是证明不等式时一种常用的方法.

当证题不知从何处入手时，有时可以运用分析法而获得解决，特别对于条件简单而结论复杂的题目往往更是行之有效. 分析法的思维特点是执果索因，步步寻求上一步成立的充分条件. 它与综合法是对立统一的两种方法.

范例解析 思维激活

例 1 若 $a>0, b>0$，求证：$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geqslant a+b$.

【规范解答】 因为 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}-a-b=(a-b)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}$，

又因为 $(a-b)^2\geqslant 0, a+b>0, ab>0$，

所以 $\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}\geqslant 0$，即 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geqslant a+b$.

【特别提示】 作差比较法中，作差是依据，变形是手段，判断符号才是目的.

【规范解答】 因为 $\dfrac{\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}}{a+b}=\frac{a^3+b^3}{ab(a+b)}=\frac{a^2-ab+b^2}{ab}\geqslant\frac{2ab-ab}{ab}=1$.

【特别提示】 利用作商比较法要注意作商的两数必须是正数. 作商是依据，变形是手段，判断与 1 的大小是目的.

例 2 已知 $x>0, y>0$ 且 $2x+y=1$.

求证：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

【思路明线】 此题证题的关键是如何使用条件 $2x+y=1$.

【规范解答】 证法一：

因为 $x>0, y>0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(2x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=3+\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$

当且仅当 $\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{2x}{y}\\ 2x+y=1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\frac{2-\sqrt{2}}{x}\\ y=\sqrt{2}-1\end{cases}$ 时，取等号.

证法二：因为 $x>0, y>0, 2x+y=1$.

所以 $y=1-2x$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-2x}=\frac{x-1}{2x^2-x}$.

设 $\frac{x-1}{2x^2-x}=p$，所以 $2px^2-(p+1)x+1=0$.

因为 $x>0$ 存在，所以 $\Delta=(p+1)^2-8p\geqslant 0$

即 $p^2-6p+1\geqslant 0$，所以 $p\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

【特别提示】 条件不等式的证明关键是条件的适当利用.

例3 当 $a\geqslant 3$ 时，求证 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$.

【规范解答】 证法一：因为

$(\sqrt{a}+\sqrt{a-3})^2-(\sqrt{a-2}+\sqrt{a-1})^2$

$=a+a-3+2\sqrt{a(a-3)}-[a-2+a-1+2\sqrt{(a-2)(a-1)}]$

$=2(\sqrt{a^2-3a}-\sqrt{a^2-3a+2})<0$

所以 $(\sqrt{a}+\sqrt{a-3})^2<(\sqrt{a-2}+\sqrt{a-1})^2$

所以 $\sqrt{a}+\sqrt{a-3}<\sqrt{a-2}+\sqrt{a-1}$

所以 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}(a\geqslant 3)$.

证法二：

要证 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$

只要证 $\sqrt{a}+\sqrt{a-3}<\sqrt{a-2}+\sqrt{a-1}$

只要证 $(\sqrt{a}+\sqrt{a-3})^2<(\sqrt{a-2}+\sqrt{a-1})^2$

只要证 $\sqrt{a}\sqrt{a-3}<\sqrt{a-2}\sqrt{a-1}$

只要证 $(\sqrt{a^2-3a})^2<(\sqrt{a^2-3a+2})^2$

只要证 $0<2$

因为 $0<2$ 显然成立

所以 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}(a\geqslant 3)$.

证法三：

要证 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}(a\geqslant 3)$

只要证 $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}<\dfrac{1}{\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}}$

只要证 $\sqrt{a}+\sqrt{a-1}>\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}$

因为 $\sqrt{a}>\sqrt{a-2}$，$\sqrt{a-1}>\sqrt{a-3}$

所以 $\sqrt{a}+\sqrt{a-1}>\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}$ 显然成立，所以原式成立.

【特别提示】 当比较法和综合法都难以入手时可用分析法，从求证入手分析要证明的结论，寻求其成立的充分条件. 有时，在用分析法找出依据的条件后，用综合法写出证明. 证法三的分子有理化的变形方式，在许多地方可用上.

精彩小结 方法提炼

1. 不等式证明的基本方法有三种：(1)比较法；(2)分析法；(3)综合法.

2. 用"比较法"证明不等式有两类方法：(1)作差法；(2)作商法. 其证题步骤一般表现为：作差(商)→变形→定号(或与1比较大小). 其中变形是难点和关键. 较为常见的变形手段有通分，配方，因式分解等.

3. "分析法"与"综合法"是证明不等式的常用方法，两种方法从思考的方向上恰好相反. 当已知条件信息量较多，而结论所含信息量较少时，一般选用综合法，反之，则选用分析法. 但也有时我们常把这两种方法结合起来去应用，这对于探索挖掘证明思路十分有效.

层面选题 自练自测

基础知识训练(A层面)

(限时15分钟)

一、选择题

1. 已知 a、b 是非零实数，则下列不等式

①$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab$；

②$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$；

③$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\dfrac{ab}{a+b}$；

④$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$ 中恒成立的个数是 ( )

(A)1个 (B)2个

(C)3个 (D)4个

2. 已知 $a>b>0$，$x>0$，那么 $\dfrac{b+x}{a+x}$ 的取值范围是 ( )

(A)$\dfrac{b+x}{a+x}>1$ (B)$\dfrac{b+x}{a+x}<1$

(C)$0<\dfrac{b+x}{a+x}<1$ (D)$1<\dfrac{b+x}{a+x}<\dfrac{b}{a}$

3. 如果 $x>1$，$M=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$，$N=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$，那么 M、N 的大小关系是 ( )

(A)$M<N$　　(B)$M>N$

(C)$M\geqslant N$　　(D)$M\leqslant N$

4. 已知 a,b 是不相等的两正数，则下面不等式中正确的是 ( )

(A)$\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(B)$\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(C)$\sqrt{ab}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<\frac{a+b}{2}$

(D)$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$

5. 下列关系式中对任意 $a<b<0$ 的实数都成立的是 ( )

(A)$a^2<b^2$

(B)$\lg b^2<\lg a^2$

(C)$\frac{b}{a}>1$

(D)$\left(\frac{1}{2}\right)^{a^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{b^2}$

6. 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，$P=\log_a(a^3+1)$，$Q=\log_a(a^2+1)$，则 P、Q 的大小关系是 ( )

(A)$P>Q$　　(B)$P<Q$

(C)$P=Q$　　(D)大小不确定

7. 若 $\frac{1}{a}<a$，则 a 的取值范围是 ( )

(A)$a<-1$ 或 $a>1$

(B)$-1<a<1$

(C)$-1<a<0$ 或 $a>1$

(D)$-1<a<0$ 或 $0<a<1$

二、填空题

8. 用适当的符号联结下列各式：

(1)a^5+b^5 ________ a^4b+ab^4；(a、b 均为正数)

(2)$a\neq1$，a^2 ________ $2a-1$；

(3)$a>0$ 且 $a\neq1$，$\log_a(1+a)$ ________ $\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$；

(4)$0<a<1$，$(1-a)^{\frac{1}{3}}$ ________ $(1-a)^{\frac{1}{2}}$.

综合能力检测（B 层面）

（限时 45 分钟）

一、选择题

1. 已知 $0<a<1<b$，下面不等式中一定成立的是 ( )

(A)$\log_ab+\log_ba+2>0$

(B)$\log_ab+\log_ba-2>0$

(C)$\log_ab+\log_ba+2\geqslant0$

(D)$\log_ab+\log_ba+2<0$

2. 若 a、b 都是正数，$P=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$，$Q=\sqrt{a+b}$，则 P、Q 的大小关系是 ( )

(A)$P>Q$　　(B)$P<Q$

(C)$P\geqslant Q$　　(D)$P\leqslant Q$

3. 已知 $0<x<1$，$a=2\sqrt{x}$，$b=1+x$，$c=\frac{1}{1-x}$，则其中最大的一个是 ( )

(A)a　　(B)b

(C)c　　(D)不能确定

4. 若 $a>b$，$c\in\mathbf{R}$，则下列不等式中正确的是 ( )

(A)$ac^4>bc^4$　　(B)$a^{-1}>b^{-1}$

(C)$a^{2n}>b^{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$　　(D)$a^{2n+1}>b^{2n+1}(n\in\mathbf{N}^+)$

5. 若 a、$b\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq b$，则下列不等式中

①$a^2+3ab>2b^2$；

②$a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$；

③$a^2+b^2\geqslant2(a-b-1)$；

④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$. 其中恒成立的个数是 ( )

(A)1 个　　(B)2 个

(C)3 个　　(D)4 个

6. 若 a、b、c 为互不相等的正数，且 $a+b+c=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的取值范围是 ( )

(A)$[5,+\infty)$　　(B)$(5,+\infty)$

(C)$[9,+\infty)$　　(D)$(9,+\infty)$

二、填空题

7. 已知 a,b,m 都是正数，在空白处填上适当的不等号.

(1)当 a ________ b 时，$\frac{a}{b}>\frac{a+m}{b+m}$；

(2)当 a ________ b 时，$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+m}{b+m}$.

8. (1)已知 $x>1$，则 $x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值______；

(2)设 $a>0,b>0$，且 $a^2+\frac{b^2}{2}=1$，则 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值是________.

9. 用适当的符号联结下列各题：

(1)a^5+b^5 ________ a^4b+ab^4；(a、b 均为正数)

(2)$a\neq1$，a^2 ________ $2a-1$；

(3)$a>0$ 且 $a\neq1$，$\log_a(1+a)$ ____ $\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$；

(4)$0<a<1$，$(1-a)^{\frac{1}{3}}$ ________ $(1-a)^{\frac{1}{2}}$.

三、解答题

10. 若 a、b、$c\in\mathbf{R}$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

11. 已知 $a>0,b>0$，且 $2c>a+b$.

求证：$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

12. 已知 $f(x)=1+\log_x3$，$g(x)=2\log_x2$，试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

§6.4 不等式的解法举例

概念理解 基础点拨

1. 掌握一元二次不等式及其应用，掌握绝对值不等式，无理不等式的解法.

2. 解分式不等式、高次不等式的基本思路，都是设法将它们同解变形为一次、二次不等式(组)，然后解之.

3. 解有理分式不等式首先应将不等式同解变形为$\frac{f(x)}{g(x)}>0$或$\frac{f(x)}{g(x)}<0(g(x)\neq0)$的形式，然后再转化为$f(x)\cdot g(x)>0$或$f(x)\cdot g(x)<0$去解.

要注意不等式中含有等号时的情况，如$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant0$应与$\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant0\\g(x)\neq0\end{cases}$同解.

4. 解无理不等式的基本思路是：首先保证根式有意义，然后将原不等式变形为不含根式的不等式组. 如：$\sqrt{f(x)}\geqslant\varphi(x)$与$\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\\varphi(x)\geqslant0,\\f(x)\geqslant\varphi^2(x).\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\\varphi(x)<0.\end{cases}$同解.

$\sqrt{f(x)}\leqslant\varphi(x)$与$\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\\varphi(x)\geqslant0,\\f(x)\leqslant\varphi^2(x).\end{cases}$同解.

范例解析 思维激活

例1 已知关于x的方程$x^2-2(a+2)x+a^2-1=0$的两根都大于2，求实数a的范围.

【思路明线】 若方程的两根为x_1、x_2，则应满足$\Delta\geqslant0$且$x_1-2>0$，$x_2-2>0$.

【规范解答】 方程的两根都大于2的充要条件是：

$$\begin{cases}(x_1-2)+(x_2-2)>0,\\(x_1-2)(x_2-2)>0,\\\Delta\geqslant0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(a+2)>4,\\(a^2-1)-4(a+2)+4>0\Rightarrow a>5,\\(a+2)^2-(a^2-1)\geqslant0.\end{cases}$$

所以a的取值范围是$a>5$.

【特别提示】 两根都大于2的充要条件是

$$\begin{cases}(x_1-2)+(x_2-2)>0,\\(x_1-2)(x_2-2)>0,\\\Delta\geqslant0.\end{cases}$$

而不是$\begin{cases}x_1+x_2>4,\\x_1\cdot x_2>4,\\\Delta\geqslant0.\end{cases}$

②本题还可如下解：

设$f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2-1$，

则$\begin{cases}f(2)>0,\\\Delta\geqslant0,\\\frac{2(a+2)}{2}>2.\end{cases}\Rightarrow a>5.$

例2 函数$y=\sqrt{(x+2)(3-x)}$的定义域为A，函数$y=\lg(kx^2+4x+k+3)$的定义域为B，当$A\supsetneqq B$时，求实数k的取值范围.

【思路明线】 首先要考虑根式和对数有意义. 然后根据$A\supsetneqq B$求实数k的范围.

【规范解答】 集合$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant3\}$.

集合B是不等式$kx^2+4x+k+3>0$的解集.

当$k=0$时，$B=\left\{x\,\middle|\,x>-\frac{3}{4}\right\}$，此时$A\not\supsetneqq B$，所以$k\neq0$.

若使$A\supsetneqq B$，必有$k<0$.

对于B有$x^2+\frac{4}{k}x+\frac{k+3}{k}<0$.

设$f(x)=x^2+\frac{4}{k}x+\frac{k+3}{k}$

所以要使$B\subsetneqq A$即$f(x)=0$的两根在$[-2,3]$之内，须满足：

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(-2)\geqslant 0,\\ f(3)\geqslant 0,\\ -2<-\dfrac{2}{k}<3,\\ k<0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{4(4-k^2-3k)}{k^2}\geqslant 0,\\ 4-\dfrac{8}{k}+\dfrac{k+3}{k}\geqslant 0,\\ 9+\dfrac{12}{k}+\dfrac{k+3}{k}\geqslant 0,\\ -2<-\dfrac{2}{k}<3,\\ k<0.\end{cases}$$

解得$-4<k<-\dfrac{3}{2}$时，$A\supsetneqq B$.

【特别提示】 本题考查了集合的运算与一元二次不等式的解法.对于不等式$ax^2+bx+c>0$，首先要讨论$a=0$，而不能想当然地认为$a\neq 0$，这样易产生失根，问题最后转化为一元二次方程根的分布.此种模式题较多，应掌握好根的分布的处理思路.

例3 设不等式$(2x-1)>m(x^2-1)$对满足$|m|\leqslant 2$的一切实数m的值都成立，求x的取值范围.

【规范解答】 首先须分离出m，因此，对(x^2-1)要进行讨论.

(1)当$x^2-1=0$时，要满足$(2x-1)>0$对$|m|\leqslant 2$的一切m值都成立，此时$x=1$；

(2)当$x^2-1>0$时，要使$\dfrac{2x-1}{x^2-1}>m$对$|m|\leqslant 2$恒成立，只要$\dfrac{2x-1}{x^2-1}>2\Rightarrow\dfrac{2x^2-2x-1}{x^2-1}<0$，解得$1<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$；

(3)当$x^2-1<0$时，要使$\dfrac{2x-1}{x^2-1}<m$对$|m|\leqslant 2$恒成立，只要$\dfrac{2x-1}{x^2-1}<-2\Rightarrow\dfrac{2x^2+2x-3}{x^2-1}<0$，解得$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<1$.

综合(1)，(2)，(3)得所求x的范围为$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

本题还可以用函数的观点来解.

构造一个m的一次函数$f(m)=(x^2-1)m-(2x-1)$在$m\in[-2,2]$时恒小于零.

所以只要解$\begin{cases}f(x)<0\\ f(-2)<0\end{cases}$即可.

精彩小结 方法提炼

1.解一元二次不等式的方法为"数形结合法"，对解的记忆口诀"大于零在两边，小于零在中间"是对$a>0$和$\Delta>0$两个条件而言的.

2.解一元高次不等式的方法称之为数轴标根法或穿针引线法.

3.解分式不等式的常用方法是把分式不等式转化为与之等价的整式不等式进而求解.

4.解无理不等式的常用方法是：把无理不等式转化为与之等价的有理不等式组来解的.

5.不管解何种类型的不等式，都要首先注意不等式的定义域的制约，以确保不等式转化后的等价性.

6.对求字母的取值范围一类不等式问题时，常常依据所给不等式，通过变形构造出一个与之相应的函数，应用函数的思想和方法求解，既直观，又快速.

层面选题，自练自测

基础知识训练(A层面)

(限时15分钟)

一、选择题

1.若$\dfrac{1}{x}<2$和$|x|>\dfrac{1}{3}$同时成立，则x满足 (　　)

(A)$-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$　　(B)$x<-\dfrac{1}{3}$

(C)$x>\dfrac{1}{2}$　　(D)$x<-\dfrac{1}{3}$或$x>\dfrac{1}{2}$

2.不等式$(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)<0$的解集是 (　　)

(A)$(-1,8)$　　(B)$(-\infty,-1)\cup(3,10)$

(C)$(-1,1)\cup(1,3)$　　(D)$(-1,1)\cup(3,+\infty)$

3.不等式$\dfrac{(x-3)(x-5)(8-x)^3}{(x-2)(5x-7)}<0$的解集为 (　　)

(A)$\left(\frac{7}{5},2\right)\cup(3,5)\cup(8,+\infty)$

(B)$\left(\frac{7}{5},2\right)\cup(5,8)$

(C)$\left(-\infty,\frac{7}{5}\right)\cup(2,3)\cup(5,8)$

(D)$(-\infty,2)\cup(3,5)\cup(8,+\infty)$

4. 设 $A=\{x|1<x<2\}$，$B=\{x|x-a<0\}$，若 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是 ( )

(A)$(-\infty,1]$　(B)$[2,+\infty)$

(C)$(-\infty,2]$　(D)$[1,+\infty)$

二、填空题

5. 不等式 $x-2\geqslant\frac{8}{x+4}-3$ 的解集是__________.

6. 不等式 $\sqrt{2x+5}<x+1$ 的解集是__________.

7. $\log_{\frac{1}{2}}[\log_3(x^2-6)]>0$ 的解集是__________.

8. 不等式组 $\begin{cases}\sqrt{x^2-9}\leqslant 4\\ x>0\end{cases}$ 的解集是__________.

综合能力检测(B 层面)

(限时 45 分钟)

一、选择题

1. 设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$，$a<0$，那么 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 ( )

(A)$\{x|x<x_1\}$　(B)$\{x|x>x_2\}$

(C)$\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$　(D)$\{x|x_1<x<x_2\}$

2. 不等式组 $\begin{cases}(x-2)(x-5)\leqslant 0\\ x(x-a)\geqslant 0\end{cases}$ 与不等式 $(x-2)(x-5)\leqslant 0$ 的同解，则 a 的取值范围是 ( )

(A)$a>5$　(B)$a<2$

(C)$a\leqslant 5$　(D)$a\leqslant 2$

3. 不等式 $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}+1>0$ 的解集是 ( )

(A)$\mathbf{R}$　(B)$\varnothing$

(C)$[1,+\infty)$　(D)$[2,+\infty)$

4. 设 $A=\{x|\sqrt{x-1}\geqslant 3\}$，$B=\{x|\sqrt{x-1}<3\}$，则集合 A,B 满足 ( )

(A)$\complement_R A=B$　(B)$\complement_R B=A$

(C)$A\cup B=\mathbf{R}$　(D)$A\cap B=\varnothing$

5. 与不等式 $\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\leqslant 1$ 同解的不等式是 ( )

(A)$0\leqslant\frac{x-2}{x-1}\leqslant 1$　(B)$\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\leqslant 1$

(C)$\frac{x-2}{x-1}\leqslant 1$　(D)$\frac{x-2}{x-1}\geqslant 0$

6. 已知 $A=\{x|3-x\geqslant\sqrt{x-1}\}$，$B=\{x|x^2-(a+1)x+a\leqslant 0\}$，当 $A\subsetneqq B$ 时，a 的范围是 ( )

(A)$a>2$　(B)$a\leqslant 1$

(C)$1<a<2$　(D)$a\geqslant 2$

二、填空题

7. 若不等式 $x^2+bx+c<0$ 的解为 $-1<x<2$，则 $cx^2+bx+1>0$ 的解是__________.

8. 已知 $A=\{x|2^{x^2-x-6}>1\}$，$B=\{x|\log_4(x+1)<a\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，则 a 的取值范围是__________.

9. 关于 x 的不等式 $a^{2x}+a<a^{x+3}+a^{x-2}$ 的解集为__________.

三、解答题

10. 解分式不等式 $\frac{x^2-4x+1}{3x^2-7x+2}<1$.

11. 解不等式 $|x^2-3x-4|>x+2$.

12. 解不等式 $\sqrt{\log_a x-1}<3-\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$).