www.wunan.com.tw

Managerial Mathematics

管理數學

陳耀茂 編著

Managerial Mathematics

管理數學

管理數學主要以數學的方法解決管理上的問題，包括三大構面，即「矩陣方法」、「機率與機率過程」以及「微分方程、差分方程」。

本書的規劃是理論與應用並重，內容中均附有對應的習題及例題，幫助學生學習，是一本教學即自習不可多得的好書。

$r = a(1 \pm \cos\theta)$

五南文化事業

ISBN 957-11-2751-5

00600

9 789571 127514

五南圖書出版公司

管理數學

Managerial Mathematics

陳　耀　茂 編著

東海大學企管系暨管理研究所教授

五南圖書出版公司 印行

國家圖書館出版品預行編目資料

管理數學 = managerial mathematics / 陳耀茂
編著. -- 初版. -- 臺北市 : 五南,2002〔民
91〕
面;　　公分
參考書目:面
ISBN 957-11-2751-5（平裝）
1. 應用數學
319　　　　　　　　　　　　91001382

5B74
管理數學

作　者　陳耀茂 (270)

出版者　五南圖書出版股份有限公司
發行人　楊榮川
地　　址：台北市大安區106
和平東路2段339號4樓
電　　話：02-27055066
傳　　真：02-27066100
郵政劃撥：0106895-3
網　　址：http://www.wunan.com.tw
電子郵件：wunan@wunan.com.tw

版　刷　2002年2月　初版一刷

定　價　600元

版權所有．請予尊重

序　言

商學院的課目中訂有「商用數學」，工學院訂有「工程數學」，管理學院也訂有「管理數學」，基於數學的領域涉及層面甚廣，加之管理數學的內容主要是以數學的方法解決管理上的問題爲主，然而管理上的問題大多是多元性的數據，涉及的變數甚多，因之管理數學的內容探討，主要是以三大構面爲主，亦即「矩陣方法」、「機率與機率過程」以及「微分方程、差分方程」等方法爲主，學習了基礎的「矩陣方法」後，可銜接「多變量分析」及「AHP 分析」等方法，特別是對於「作業研究」中的「線性規劃」及「對局理論」等的學習更是有甚大的幫助。此外，「差分方程」、「極值方法」、「微分方程」以及「機率過程」等方法，對學習「作業研究」中的「等候理論」、「決策理論」、「動態規劃」等也是非常有助益的。

數量方法學得愈多，自然解決問題的分析能力就會提升，本書雖然是以一年的課程來撰寫，如果是一學期的課程時，則可斟酌其中的內容，視需要選擇相關部份講授即可。對數學不會排斥的同學，雖然因時間的關係有些部分老師並未講授，但仍可自行閱讀，充實自己的數理能力。

本書的規劃是理論與應用並重，因之內容中均附有對應的「例題」佐以說明，而且每章的結尾也大多附有習題，並且視問題性質斟量提供解答，以幫助同學學習。學習數學的最佳途徑就是多做習題，如果只是課堂中了解卻未實際進行演算，事實上只是半知狀態而已，故建議同學務必要多做習題，才是求知的不二法門。

本書的內容規劃是以修完「微積分」作爲基礎，主要是想與「作業研究」、「多變量分析」、「APH 分析」、「迴歸分析」等相結合，如果內容仍有不足之處，亦可自行斟量追加講授內容，如果內容過多，亦可斟量刪減。編撰過程中雖力求周全卻仍有力猶未及之感，因之有不周或謬誤之處，尚請賢達指正，不勝感激。最後，本書於校對期間，承蒙劉泓欣助教不辭辛勞，逐字校對，由衷表示謝意。

謹誌於東海大學企管系研究室

陳耀茂

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　錄

第①篇

矩陣篇

▢本篇提供您▢

第 1 章

矩陣簡介

定義 1-1

由 mn 個實數所構成的 m 列 (row)、n 行 (column) 長方形數列

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

稱爲 $m\times n$ 階 (order) 矩陣 (Matrix) A。

【說明】

矩陣 A 可視爲

齊次線性方程組 (參第 10 章，容後述)：

$$\begin{cases} 2x+3y+7z=0 \\ x-y+5z=0 \end{cases}$$

之係數矩陣 (coefficient matrix)，或視作非齊次線性方程式組：

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-y=5 \end{cases}$$

之擴大矩陣 (Augmented Matrix)。

於矩陣

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

中，諸數或函數 a_{ij} 稱爲此矩陣之元素 (Elements)，於 2 個下標符號中，第一個下標表示此元素所在之列 (row)，第 2 個下標表示所在之行 (column)。一個 m 列與 n 行之矩陣其階 (order) 以 $m\times n$ 表示。

矩陣 (1.1) 常稱爲 " $m\times n$ 矩陣 $[a_{ij}]$ " 或 " $m\times n$ 矩陣 $A=[a_{ij}]$" 。若其階已清楚，則簡寫爲 "矩陣 A" 。

定義 1-2

於矩陣 (1.1) 中如 $m=n$，則稱爲 n 階方陣 (square Matrix)。

定義 1-3

兩矩陣 $A=[a_{ij}]$ 與 $B=[b_{ij}]$ 謂之相等 (equal)，其充要條件爲 A 與 B 有相同之階，且其中一矩陣之每一元素與另一矩陣之對應元素相等，亦即若且唯若

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$a_{ij}=b_{ij} \qquad (i=1,2,\cdots,n\,;\,j=1,2,\cdots,n)$$

則稱 A 與 B 相等，記成 $A=B$。

定義 1-4

一矩陣若其每一元素均為零，則稱為零矩陣 (Zero Matrix)。若 A 為零矩陣，且其階不致發生混淆，則可寫成 $A=0$。

定義 1-5

若 $A=[a_{ij}]$ 與 $B=[b_{ij}]$ 與 $C=[C_{ij}]$均為 $m\times n$ 矩陣，如 C 之每一元素均為 A 與 B 之對應元素之和 (差)，則記成 $A\pm B=C$，亦即

$$[c_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

例題 1-1

若 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&3&0\\-1&2&5\end{bmatrix}$，則

$$A+B=\begin{bmatrix}1+2&2+3&3+0\\0+(-1)&1+2&4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5&3\\-1&3&9\end{bmatrix}$$

及

$$A-B=\begin{bmatrix}1-2&2-3&3-0\\0-(-1)&1-2&4-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&3\\1&-1&-1\end{bmatrix}$$

【註】兩同階矩陣謂之能適合 (conformable) 加法與減法，不同階之兩矩陣不能相加或相減。

定義 1-6

若 k 爲任意純量，A 爲 $m\times n$ 階矩陣，則 $kA=[ka_{ij}]$。意即將 A 的每一元素乘以 k 所得之矩陣。

【註】

$$k\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

例題 1-2

若 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，則

$$A+A+A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}=3A$$

因之，$\underbrace{A+A+\cdots+A}_{k}=kA$

亦即，$k[a_{ij}]=[ka_{ij}]$

【註】$[k]$ 表 1×1 矩陣，k 則爲純量，注意兩者之不同。

定理 1-1

假設矩陣 A,B,C 能適合於相加，則

1. $A+B=B+C$　(交換律)
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$　(結合律)
3. $k(A+B)=kA+kB$　，k 爲一純量
4. 有一矩陣 D 存在且 $A+D=B$

《證明省略》

定義 1-7

1. $1\times m$ 矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}$ 與

$m\times 1$ 矩陣 $B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$

之乘積 AB，即為 1×1 矩陣

$$C=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1m}b_{m1} \end{bmatrix}$$

亦即，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1m}b_{m1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1} \end{bmatrix}$$

【註】 1. 此乘法運算是列乘以行，列中的每一元素乘上行中的對應元素再求諸乘積之和。

2. 注意階的表示，$A_{1\times m}\cdot B_{m\times 1}=C_{1\times 1}$。

例題 1-3

試求以下之矩陣的乘積。

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. $[3 \quad -1 \quad 4]\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

【解】

1. $[2 \quad 3 \quad 4]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2(1)+3(-1)+4(2)] = [7]$

2. $[3 \quad -1 \quad 4]\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = [-6-6+12] = [0]$

定義 1-8

2. $m \times p$ 矩陣 $A=[a_{ij}]$ 與 $p \times n$ 矩陣 $B=[b_{ij}]$ 之乘積 AB，亦即爲 $m \times n$ 矩陣 $C=[c_{ij}]$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m\,;\ j=1,2,\cdots,n)$$

例題 1-4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

【註】

1. A能適合乘於 B，僅當 A 之行數等於 B 的列數。

2. A能適合乘於 B， B 不一定能適合乘於 A。

定理 1-2

假定 A, B, C 適合於下列所述之加法與乘法，則

1. $A(B+C)=AB+AC$ (第一分配律)

2. $(A+B)C=AC+BC$ (第二分配律)

3. $A(BC)=(AB)C$ (結合律)

《證明省略》

【註】

1. 一般情況下， $AB \neq BA$

2. $AB=0$ 不一定表示 $A=0$ 或 $B=0$

【ex.】 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A \cdot B=0$，但 $A \neq 0, B \neq 0$

3. $A \cdot B=A \cdot C$ 不一定表示 $B=C$

【ex.】 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$A \cdot B=\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=AC$，但 $B \neq C$

矩陣之分割法

令 $A=[a_{ij}]$ 爲 $m\times p$ 階，分割如下：

$$A=\left[\begin{array}{c:c:c}(m_1\times p_1) & (m_1\times p_2) & (m_1\times p_3)\\ \hdashline (m_2\times p_1) & (m_2\times p_2) & (m_2\times p_3)\end{array}\right] \text{ 或 } A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\end{bmatrix}$$

$B=[b_{ij}]$ 爲 $p\times n$ 階，分割如下：

$$B=\left[\begin{array}{c:c}(p_1\times n_1) & (p_1\times n_2)\\ \hdashline (p_2\times n_1) & (p_2\times n_2)\\ \hdashline (p_3\times n_1) & (p_3\times n_2)\end{array}\right] \text{ 或 } B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\\ B_{31} & B_{32}\end{bmatrix}$$

則 $$A\cdot B=\left[\begin{array}{c:c}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32}\\ \hdashline A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32}\end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}=C$$

【註】

1. 此法將爲利用分部法求積 (Products by partitioning)，對於可適合相乘之兩矩陣，其階甚大時，即可利用分部法計算。

2. 可適合相乘之兩矩陣 A,B，當 A 的行分割方式等於 B 的列分割方式時，即可利用分部法。

例題 1-5

已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 與 $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$

利用分部法計算 AB。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com