普通高等教育"十一五"国家级规划教材

经济数学——线性代数

第二版

主编 吴传生

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

经济数学

——线性代数

第二版

主编 吴传生

编者 吴传生 王卫华 曾祥金

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学.线性代数/吴传生主编.—2版.—北京:高等教育出版社,2009.1

ISBN 978-7-04-024918-7

Ⅰ.经… Ⅱ.吴… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材 ②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0 O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第191877号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 黄建英
版式设计 范晓红 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京宏信印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版 次	2003年12月第1版
开 本	787×960 1/16		2009年1月第2版
印 张	15.5	**印 次**	2009年1月第1次印刷
字 数	280 000	**定 价**	17.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24918-00

内容简介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是在第一版（普通高等教育“十五”国家级规划教材）的基础上修订而成的，是经济数学首门国家级精品课程的使用教材。

本书的主要内容有：线性方程组的消元法和矩阵的初等变换，行列式、克拉默法则，矩阵的运算，线性方程组的理论，特征值和特征向量、矩阵的对角化，二次型，应用问题。全书习题分节配置，除第七章外，每章后配有总习题。

本书以线性方程组和实二次型化成标准形为两条主线展开讨论，注重将数学建模思想渗透到教学内容中，突出“矩阵方法”，强调矩阵初等变换的应用，由浅入深，由具体到抽象，循序渐进，化难为易，便于教学。

本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，说明到位，行文流畅，例题丰富，可读性强，可作为经济管理类专业的教材或教学参考书，也可供工科专业参考使用。

第二版前言

《经济数学》系列教材(第二版)是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,是在第一版(普通高等教育“十五”国家级规划教材)的基础上修订而成的,是经济数学首门国家级精品课程的使用教材。

该系列教材的主要特点是把数学知识和经济学、管理学的有关内容有机结合,融经济于数学,体现“数学为本,经济为用”的原则。

该系列教材的总的编写原则是:适应经济类、管理类各专业对数学的要求越来越高的趋势,注重适当渗透现代数学思想和方法,理论联系实际,加强学生应用数学知识和方法解决经济问题的能力的培养,突出数学的基本概念、基本理论和基本方法,突出数学的基本思想和应用背景,强调科学性、系统性、准确性和完整性。对课程体系进行优化,力求既能保证课程教学基本要求又适当降低学习难度,处理好具体和抽象,定量和定性,直观判断和逻辑推理等关系,体现数学文化的精髓。

《线性代数》的第一版自 2003 年由高等教育出版社出版以来,被全国许多高校作为经济管理专业和工科类专业的教材。经过几年的教学实践并根据同行们的宝贵建议,我们进一步对国内外优秀的同类教材进行了比较研究,在保持第一版的优点、特色的基础上,第二版主要作了如下修订:

1. 本着“以学为本”的原则,加强了第一章“线性方程组的消元法与矩阵的初等变换”的内容,使得全书以线性方程组为主线,以矩阵的初等变换为主要方法,由浅入深,环环相扣,循序渐进地展开课程内容,化解了线性代数课程的教学难点,让学生能顺畅地阅读全书。

2. 在第二章,将行列式改用排列的方式定义,对相应的内容作了调整。

3. 在第四章,改写了第一节“线性方程组有解的条件”,使其为第一章内容的自然过渡和发展,为简化“线性相关性”、“向量组的最大无关组和秩”等内容的讨论奠定了基础;增加了第六节“向量空间”,以让学生了解如何把一些具体的数学对象抽象为数学结构。

4. 在第七章的最后,增加了“基于二次型理论的最优化问题”一节内容,这与全书的第一个例子(其数学模型与线性规划问题相关联)相呼应,为同学们学习另一门重要的课程——运筹学作了铺垫。

5. 根据课程内容调整了部分习题。对有些学生易于产生模糊的问题(例如

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$\mathbf{R}^n$中含有无穷多个向量，但为什么我们讨论问题时一般都假设向量组只含有有限个向量等）做了“画龙点睛”的说明。

6. 对于一些非必读的内容，改用小字排印。

本版修订工作第二章主要由曾祥金完成，其他各章由吴传生完成。全书由吴传生负责统稿定稿。

本书在修订过程中，参考了众多的国内外教材；高等教育出版社的领导和编辑们对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助，尤其是李艳馥、马丽和崔梅萍等老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血，在此一并致谢！

新版中存在的问题，欢迎广大专家、同行和读者继续给予批评指正。

编者

2008年9月

第一版前言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材。教材注意将线性代数的知识和经济学及其他有关应用问题适当结合，在保持传统教材优点的基础上，对体系进行了适当的调整和优化。前四章以线性方程组为主线展开讨论，第五、六两章以实二次型化成标准形为主线展开讨论，第七章综合介绍线性代数的一些应用。全书突出“矩阵方法”，从始至终贯穿矩阵的初等变换的作用，表述上从具体问题入手，问题的引入自然、贴切，问题的讨论由浅入深，由易及难，由具体到抽象，循序渐进，脉络清晰，做到了难点分散，化难为易，便于组织教学。

本书的主要内容及教学处理意见如下：

第一章先介绍线性方程组及矩阵的一些基本概念，从线性方程组的消元法引出矩阵的初等变换，与中学代数紧密衔接，突出了线性方程组及矩阵的初等变换的作用，为以后各章的讨论提供了方便，奠定了基础；

第二章从分析二阶矩阵和三阶矩阵所确定的行列式的结构出发，递归地定义 n 阶矩阵所确定的 n 阶行列式，由此导出求解一类特殊线性方程组的克拉默法则；

第三章先进一步介绍产生矩阵概念的实际例子，再讨论矩阵运算、逆矩阵、分块矩阵、初等矩阵、矩阵的秩等内容，这一章叙述详尽，说理透彻，例题丰富，学生应该牢固掌握；

第四章先利用矩阵的秩的概念及性质讨论线性方程组有解的条件，以此为基础讨论向量组的线性相关性的理论，达到了化难为易的目的，再综合利用前面知识，讨论线性方程组解的结构，这样，从第一章到第四章循序渐进，形成一个有机整体；

第五章从实例出发讨论矩阵的特征值和特征向量，介绍了矩阵可对角化的条件，重点讨论实对称矩阵可对角化，为第六章做好准备；

第六章利用前面所学的知识，较全面地讨论二次型化为标准形的三种方法及正定二次型的判定，重点讨论用正交变换化二次型为标准形；

第七章介绍了线性代数在几何学、递推关系求解、经济学模型的建立和求解等三个方面的应用实例，以窥见线性代数应用的广泛性，这一章可供教学中选用。

本书的习题按节配置，遵循循序渐进的原则，充分注意基本概念，基本方法

和理论，也适当配置了一些应用性习题。除第一章和第七章外，每章后配置总习题，这些题目有许多选自历年研究生入学考试的考题，供学完一章后复习、总结、提高之用。需要说明的是，这些总习题不是要求每个学生都必做的。

本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，说明到位，文字流畅，例题丰富，注重应用，习题量较大，便于自学，可作为高等学校经济类、管理类专业学生的教材，也可供工科学生选用或参考。

本书第一、二 、三、四章由吴传生编写，第五、六、七章由王卫华编写，全书由吴传生负责统稿定稿。

本书在编写过程中，参考了众多的国内外教材；高等教育出版社的领导和编辑们对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助，尤其是李艳馥老师和胡乃冏老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血；武汉理工大学教务处、理学院、数学系、统计学系对本书的出版也给予了大力支持，在此一并致谢！

由于编者水平有限，加之时间也比较仓促，教材中一定存在不妥之处，希望专家、同行、读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编者

2003.8

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第1章 线性方程组的消元法和矩阵的初等变换

许多自然现象和经济现象,变量之间的依赖关系,本质上是非线性的,但如果忽略若干次要因素,线性依赖的法则不同程度上会较好地符合实际情况,于是线性方程和线性方程组就可以在一定程度上作为描述一些客观事物的数学模型.科学技术和经济管理中的许多问题,往往可以归结为建立和求解线性方程组的问题.

本章主要介绍线性方程组的基本概念以及求解线性方程组的消元法,并由此引出矩阵及其初等变换的有关概念.这些概念和方法既与中学数学紧密相连,又贯穿于线性代数这门课程的始终,所以我们从第1章就开始对它们的讨论,并将在以后各章不断进行深入研究.希望大家予以高度重视.

第一节 线性方程组的消元法

一、线性方程组的基本概念

1.线性方程组的定义

先看一个实际例子:

引例(物资调运问题) 有三个生产同一产品的工厂 A_1,A_2,A_3,其年产量分别为40 t,20 t和10 t,该产品每年有两个用户 B_1 和 B_2,其用量分别为45 t和25 t,由各产地 A_i 到各用户 B_j 的距离为 C_{ij}(km),如表1-1所示($i=1,2,3;j=1,2$),不妨假设每吨货物每千米的运费为1(元),问各厂的产品如何调配才能使总运费最少?

表1-1

C_{ij}	A_1	A_2	A_3
B_1	45	58	92
B_2	58	72	36

解　为解决这一问题,设各厂运到各用户的产品数量如表 1 - 2 所示.

表 1 - 2

	A_1	A_2	A_3
B_1	x_1	x_2	x_3
B_2	x_4	x_5	x_6

由题目可以看出,3 个厂的总产量与两个用户的总用量刚好相等,所以对产地来讲,产品应全部调出,因而有

$$x_1 + x_4 = 40, \tag{1}$$

$$x_2 + x_5 = 20, \tag{2}$$

$$x_3 + x_6 = 10. \tag{3}$$

同时对用户来说,调出的产品刚好为其所需要的,因而又有

$$x_1 + x_2 + x_3 = 45, \tag{4}$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = 25. \tag{5}$$

再来看如何刻画运费.

显然,把 x_1 t 货物由 A_1运到 B_1的运费为 $45x_1$(元),把 x_4 t 货物由 A_1运到 B_2的运费为 $58x_4$(元)……它们的和即为总运费 S,即

$$S = 45x_1 + 58x_2 + 92x_3 + 58x_4 + 72x_5 + 36x_6. \tag{6}$$

于是,题目要解决的问题是:如何选择非负数 $x_1, x_2, \cdots, x_6$,使之满足(1)～(5),而使总用费 S 最小.此即为物资调运问题的数学模型.

物资调运问题的解决,首先依赖于对方程(1)～(5)的研究.在方程(1)～(5)中,每个方程都是一个线性方程.几个线性方程联立在一起,称之为**线性方程组**.因此方程(1)～(5)构成 6 个未知数 5 个方程的线性方程组.

类似上面的例子还可以举出很多.也就是说,不少实际问题可以化为线性方程组的问题.这样的方程组所包含的未知数的个数不止一两个,而是更多.因此,为了解决这类问题,需要讨论含有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组.若用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 n 个未知量,设方程的个数为 m 个,则线性方程组就可以写成如下形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{7}$$

这里 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$为已知数,它是第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数;$b_i(i=1,2,\cdots,m)$也是已知数,称为第 i 个方程的**常数项**.当

线性方程组(7)的常数项均为零时,我们称它为**齐次线性方程组**,否则,称为**非齐次线性方程组**.

所谓方程组(7)的一个**解**就是指 n 个数 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 组成的有序数组

$$x=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}\quad(\text{也可记为 } x=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}),$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 代入后,(7)中的每个方程都成为恒等式.此种解可能不存在,也可能唯一存在或存在无穷多个.方程组(7)的所有解组成的集合称为它的**解集合**.解方程组实际上是找出它的全部解,或者说,求出它的解集合.如果两个方程组有相同的解集合,它们就称为是**同解的**.

2. 线性方程的线性组合

线性方程的加法:将两个线性方程

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\tag{8}$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\tag{9}$$

的左、右两边相加得到的如下新的线性方程

$$(a_{11}+a_{21})x_1+(a_{12}+a_{22})x_2+\cdots+(a_{1n}+a_{2n})x_n=b_1+b_2\tag{10}$$

称为原来两个线性方程(8)与(9)的和.

类似,可定义若干个线性方程的和.

线性方程乘常数:将线性方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 两边同乘已知常数 λ,得到一个新的线性方程 $(\lambda a_1)x_1+(\lambda a_2)x_2+\cdots+(\lambda a_n)x_n=\lambda b$,称为原来的线性方程的 λ 倍.线性方程与常数相乘,也称为方程的数乘.

注意　方程所乘的常数 λ 可以为 0,这时得到的新方程 $0=0$ 是一个恒等式,任何一组数都是它的解.

线性方程的线性组合:对线性方程(8)和(9),分别乘两个已知常数 λ_1,λ_2,再将所得的两个方程相加,得到的新方程

$$(\lambda_1a_{11}+\lambda_2a_{21})x_1+(\lambda_1a_{12}+\lambda_2a_{22})x_2+\cdots+(\lambda_1a_{1n}+\lambda_2a_{2n})x_n=\lambda_1b_1+\lambda_2b_2\tag{11}$$

称为原来的两个方程(8)和(9)的一个**线性组合**.这里常数 λ_1,λ_2称为这个线性组合的系数.

类似,可定义 m 个含有 n 个未知量的线性方程的线性组合的概念.

将(8)和(9)看作一个线性方程组,根据解的定义,可以得到,该线性方程组的任一组解一定是它们的线性组合(11)的解.这一结果对 m 个含有 n 个未知量

的线性方程组成的线性方程组也成立.

注意 在方程(8)和(9)的线性组合(11)中分别取 $\lambda_1=1,\lambda_2=0$ 和 $\lambda_1=0,\lambda_2=1$ 即可分别得到方程(8)和(9),由此可以看到,一组方程中的每一个方程都是所有这些方程的线性组合.

对于给定的两个线性方程组,分别把它们记作(Ⅰ)和(Ⅱ),如果方程组(Ⅱ)中的每个方程都是方程组(Ⅰ)中的方程的线性组合,就称方程组(Ⅱ)是方程组(Ⅰ)的线性组合.此时方程组(Ⅰ)的每一个解也都是方程组(Ⅱ)的解.

如果方程组(Ⅰ)和方程组(Ⅱ)互为线性组合,就称这两个方程组**等价(可互推)**.等价(可互推)的线性方程组一定同解,将方程组(Ⅰ)变成同解方程组(Ⅱ)的过程称为**同解变换**.

对于线性方程组(7),我们希望寻找适当的同解变换,直到最后所得到的方程组的解可以直接写出来为止.

二、线性方程组的消元法

1. 线性方程组的初等变换

在中学代数中,已经学过用消元法解二元或三元线性方程组,其基本思想是通过消元变形把方程组化成容易求解的同解方程组.不过我们要求消元过程规范而又简便.先看例子.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1,\\4x_1+2x_2+5x_3=4,\\2x_1+2x_3=6.\end{cases}\tag{12}$$

解 第二个方程减去第一个方程的 2 倍,第三个方程减去第一个方程,就变成

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1,\\4x_2-x_3=2,\\x_2-x_3=5;\end{cases}$$

将上面的第二个方程与第三个方程互换,即得

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1,\\x_2-x_3=5,\\4x_2-x_3=2;\end{cases}$$

将第三个方程减去第二个方程的 4 倍,得

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1,\\ \qquad x_2-\ x_3=5,\\ \qquad\qquad 3x_3=-18;\end{cases}$$

将第三个方程两边乘$\frac{1}{3}$,得

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1,\\ \qquad x_2-\ x_3=5,\\ \qquad\qquad x_3=-6;\end{cases}\tag{13}$$

将第一个方程减去第三个方程的 3 倍,第二个方程加上第三个方程,得

$$\begin{cases}2x_1-x_2\qquad=19,\\ \qquad x_2\qquad=-1,\\ \qquad\qquad x_3=-6;\end{cases}$$

将第一个方程加上第二个方程,得

$$\begin{cases}2x_1\qquad\quad=18,\\ \qquad x_2\qquad=-1,\\ \qquad\qquad x_3=-6;\end{cases}$$

将第一个方程两边乘$\frac{1}{2}$得

$$\begin{cases}x_1=9,\\ x_2=-1,\\ x_3=-6,\end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-1\\-6\end{pmatrix}.\tag{14}$$

上面的求解过程就是对方程组反复进行变换直至化为最简的过程.从(12)到(13)的过程称为**消元过程**,形如(13)的方程组称为**阶梯形方程组**.从(13)到(14)的过程称为**回代过程**.

(14)是否一定是线性方程组(12)的解呢?

分析一下消元法,它实际上是对方程组进行了以下 3 种变换:

(i) 交换两个方程的次序;

(ii) 用一个非零的常数乘某个方程;

(iii) 把一个方程的适当倍数加到另一个方程上.

定义 1　上述三种变换均称为线性方程组的**初等变换**.

定理 1　线性方程组的初等变换总是把方程组变成同解方程组.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com