

Tongbu Zhuanti Tupo
同步专题突破

Chaoji Ketang



超级课堂

丛书主编/王后雄

本册主编/马春华

高中数学
2
(必修)

考点分类例析

方法视窗导引

防错档案预警

专题优化测训

 华中师范大学出版社

Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破

超级课堂

Chaoji Ketang

数学

紧扣课标，直击高考，突破难点，解析疑点，化整为零，各个击破，点线面全方位建构“同步专题”攻略平台。

由“母题”发散“子题”，理顺“一个题”与“多个题”的关系，寻找“一类题”在思维方法和解题技巧上的“共性”，通吃“千张纸，万道题”，实现知识“内化”，促成能力“迁移”。

《超级课堂》同步专题系列

数学（必修1、2、3、4、5）

数学（选修2-1）

数学（选修2-2）

数学（选修2-3）

物理（必修1、2）

物理（选修3-1）

物理（选修3-2）

物理（选修3-3）

物理（选修3-4）

物理（选修3-5）

化学（必修1、2）

化学（物质结构与性质）

化学（化学反应原理）

化学（有机化学基础）

化学（实验、技术与生活）

生物（必修1、2、3）

地理（必修1、2、3）

《重难点手册》同步讲解系列

数学（必修1、2、3、4、5/人教A版）

数学（选修2-1、2-2、2-3/人教A版）

数学（必修1、2、3、4、5/苏教版）

数学（选修2-1、2-2、2-3/苏教版）

物理（必修1、2/粤教版）

物理（必修1、2/人教版）

物理（选修3-1、3-2、3-4、3-5/人教版）

化学（必修1、2/鲁科版）

化学（必修1、2/人教版）

化学（选修3 物质结构与性质/人教版）

化学（选修4 化学反应原理/人教版）

化学（选修5 有机化学基础/人教版）

化学（必修1、2/苏教版）

化学（选修3 物质结构与性质/苏教版）

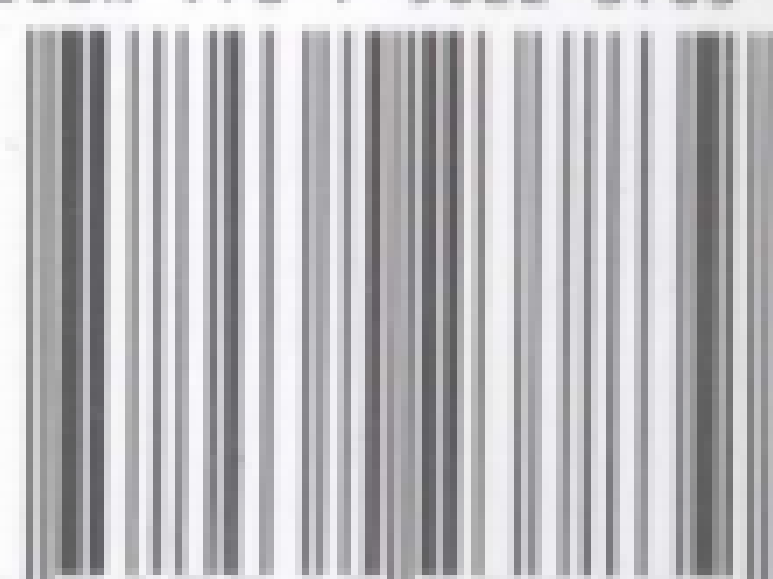
化学（选修4 化学反应原理/苏教版）

化学（选修5 有机化学基础/苏教版）

生物（必修1、2、3/人教版）

责任编辑/邵坤 林静 责任校对/王伟 封面设计/甘英

ISBN 978-7-5622-3783-9



9 787562 237839

定价：18.80元



新课标

Tongbu Zhuanti Tupu

同步专题突破

丛书主编/王后雄 本册主编/马春华

超级课堂

高中数学

2

(必修)



華中師範大學出版社

《同步专题突破超级课堂》使用图解

课标解读

呈现新课程标准内容要素，锁定不同版本教材要求，指明学习和考试的具体目标。

学法导引

注重学法点拨和考试方法指导，揭示学习重点和难点，探讨考试命题规律。

考点例析

考点分类、核心总结，要点重点各个击破，典例创新引导，首创分类解析导解模式。

变式跟踪

案例学习迁移，母题多向发散，预测高考可考变式题型，层层剖析深入变式训练。

板块一 立体几何初步

第1讲 空间几何体的结构

课标解读

1. 认识柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征，并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构。
2. 初步理解柱、锥、台、球的概念，掌握它们的生成规律。

学法导引

1. 本讲关键要通过大量空间实物及模型进行感受，学会描述这些几何体的特征，重点是能概括柱、锥、台、球的结构特征，难点是对空间概念建立的领悟以及用

考点分类例析

考点1 棱柱的结构特征

核心总结

1. 有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体叫做棱柱。
- 它的几何特征：(1)有两个面(底面)互相平行；(2)其余各面(侧面)每相邻两个面的公共边(侧棱)都互相平行。

考题1 设有四个命题：

- (1)底面是矩形的平行六面体是长方体；
- (2)棱长相等的直四棱柱是正方体；
- (3)有两条侧棱都垂直于底面一边的平行六面体是直平行六面体；
- (4)对角线相等的平行六面体是直平行六面体。

以上四个命题中，真命题的个数是()。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【解析】命题(1)不是真命题，因为底面是矩形，若侧棱不垂直于底面，这时四棱柱仍然是斜平行六面体。命题(2)不是真命题，若底面是菱形，底面边长与棱长相等的直四棱柱不是正方体。命题(3)也不是真命题，因为有两侧棱垂直于底面，其余各面不一定是矩形。

【变式1-1】如图1-1，一块棱柱形木料，沿平面BEFC锯开(其中 $EF \parallel A_1D_1$)。

- (1)指出棱柱木料的上、下底面和侧棱、侧面；
- (2)剩下的多面体和截去的多面体是棱柱吗？

方法视窗

解决这类问题需准确理解几何体的定义，把握几何体的结构特征，需要有较强的空间想象能力。当需要否定一个命题时，举一

防错档案

1. 易错点

有两个面互相平行，其余各面都是平行四边形的几何体，易误判为是棱柱。

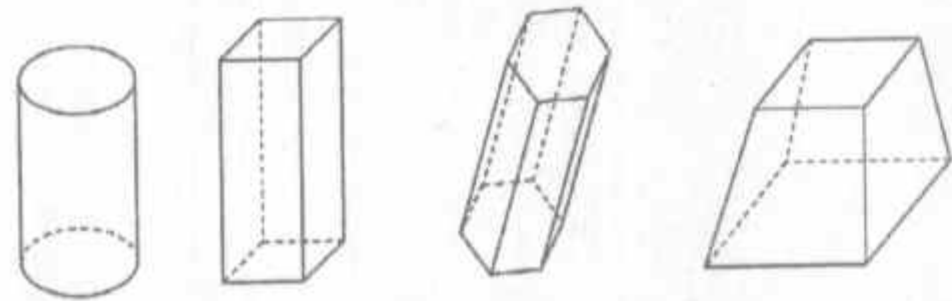
规律清单

1. 判断一个棱锥是否是正棱锥必须满足下面两个条件：
(1)底面为正多边形；

专题优化测试

学业水平测试

1. (考点2)下列命题正确的是()。
A. 由五个平面围成的多面体只能是四棱锥
B. 棱锥的高线可能在几何体之外
C. 仅有一组对面平行的六面体是棱台
D. 有一个面是多边形，其余各面是三角形的几何体是棱锥
2. (考点1,2)下面各图中，棱柱的个数是()。



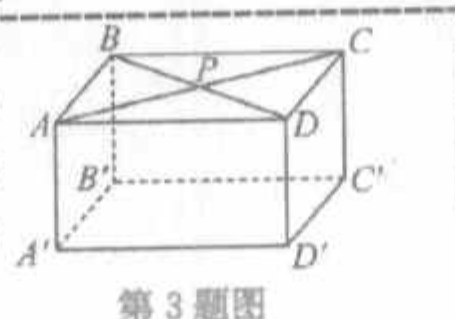
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. (考点4)A, B为球面上相异两点，则通过A, B两点可作球的大圆有()。
A. 一个 B. 无穷多个
C. 零个 D. 一个或无穷多个
4. (考点3)圆台被经过圆台轴的平面截得的图形是_____。
5. (考点3,5)若ABCD为等腰梯形，两底边分别为AB和CD，且 $AB > CD$ ，则绕AB所在的直线旋转一周所得的几何体是由_____、_____、_____构成的组合体。

高考水平测试

一、选择题

1. (考点1)判断下列命题的真假，其中真命题是()。
A. 各侧面都是矩形的棱柱是长方体
B. 侧面都是矩形的直四棱柱是长方体
C. 有两个相邻的侧面互相垂直的棱柱是直棱柱
D. 有两个相邻的侧面是矩形的棱柱是直棱柱
2. (考点3)有下列命题：
(1)在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆柱的母线；
(2)圆锥顶点与底面圆周上任意一点的连线是圆锥的母线；
(3)在圆台上、下底面圆周上各取一点，则这两点的连线是圆台的母线；
(4)圆柱的任意两条母线所在的直线是互相平行的。
其中正确的是()。
A. (1)(2) B. (2)(3)
C. (1)(3) D. (2)(4)
3. (考点2)如图，在长方体ABCD-A'B'C'D'中，P是对角线AC与BD的交点，若P为四棱锥的顶点，则底面为长方体的侧面的棱锥的个数为()。



答案与提示

板块一 立体几何初步 第1讲 空间几何体的结构

【变式训练】

【变式1-1】 [提示：(1)仔细观察棱柱木料，面 ADD_1A_1 和面 BCC_1B_1 平行，若它们为棱柱的上、下底面，则 AB, A_1B_1, D_1C_1, DC 应为侧棱，由棱柱的结构特征知侧棱互相平行，显然 A_1B_1 和 AB 不平行，故棱柱

【学业水平测试】

1. B [提示：斜棱锥的高线可能在几何体之外。]
2. C [提示：中间两个图表示棱柱。]

【高考水平测试】

1. D [提示：两个相邻侧面是矩形，可推出一条侧棱垂直于底面，所以是直棱柱。]
2. D [提示：由圆柱、圆锥的定义可判断(2)(4)正确，而(1)(3)均不正确。]
3. C [提示：顶点为P，底面分别为 $A'B'C'D', AA'D'D, D'DCC', CC'B'B, BB'A'A$ ，共5个棱锥。]
4. D [提示：如图，取 D_1C_1 的中点G，连接RG，则 $RG \parallel PQ$ ，取 BB_1 的中点M， DD_1 的中点N，连接GN、NQ、PM、MR，同理可得 $MR \parallel QN, PM \parallel NG$ ，从而PQNGRM为正六边形。]

超级链接

最佳导学模式，学案式名师点津。方法视窗、规律清单、防错档案，革新传统学习模式。

优化测试

学业水平测试、高考水平测试，习题层级清晰，水平测试立足教材、夯实基础，高考真题再现，提升解题能力。

解题依据

首创解题线索助学模式。当你解题失误或解题缺乏思路时，解题依据教你回归考点知识和例题启示。

答案提示

提示解题思路，突破解析模式，规范标准答案，全程帮助你对照思路、比照答案、减少失误、赢得高分。

同步专题突破 **超级课堂** 高中数学2(必修)

编 委 会

丛书主编:王后雄

本册主编:马春华

编 者:马春华

吴海林

秦 俭

马 威

郑晓玲

李 俊

张 营

左建华

田祥高

杨海林

刘国发

章雄钢

马晨冉

林 芳

目 录

CONTENTS

板块一 立体几何初步

第1讲 空间几何体的结构

- 考点1 棱柱的结构特征/1
- 考点2 棱锥、棱台的结构特征/2
- 考点3 圆柱、圆锥、圆台的结构特征/3
- 考点4 球的结构特征/4
- 考点5 简单组合体的结构特征/4
- 考点6 空间几何体中的简单计算问题/5

第2讲 空间几何体的三视图和直观图

- 考点1 简单组合体的三视图/9
- 考点2 简单几何体的直观图/11
- 考点3 简单几何体的直观图与三视图的联系/12
- 考点4 平行投影与中心投影/13
- 考点5 组合体的直观图画法/14

第3讲 空间几何体的表面积和体积

- 考点1 棱柱、棱锥、棱台的侧面积与表面积/17
- 考点2 圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图及表面积/18
- 考点3 柱体、锥体、台体的体积/19
- 考点4 球的表面积和体积/20
- 考点5 体积计算的常用方法与技巧/22

第4讲 空间点、直线、平面之间的位置关系

- 考点1 平面的基本性质/26
- 考点2 点共线、线共点、点线共面问题/27
- 考点3 空间中直线与直线的位置关系/28
- 考点4 异面直线的判定和异面直线所成的角/29
- 考点5 直线与平面、平面与平面的位置关系/31

第5讲 直线、平面平行的判定及其性质

- 考点1 直线与平面平行的判定/34

- 考点2 平面与平面平行的判定/35

- 考点3 直线与平面平行的性质/36

- 考点4 平面与平面平行的性质/37

- 考点5 平行的综合问题/38

第6讲 直线、平面垂直的判定及其性质

- 考点1 直线与平面垂直的判定/41

- 考点2 二面角/42

- 考点3 面面垂直的判定/43

- 考点4 直线与平面垂直的性质/44

- 考点5 面面垂直的性质/45

- 考点6 线线、线面、面面垂直关系的转化/46

第7讲 平行、垂直问题的证明

- 考点1 线线平行的证明/51

- 考点2 线面平行的证明/52

- 考点3 面面平行的证明/53

- 考点4 线线垂直的证明/55

- 考点5 线面垂直的证明/55

- 考点6 面面垂直的证明/57

第8讲 立体几何中几类典型问题的常用方法与技巧

- 考点1 特殊几何体在立体几何中的巧妙运用/61

- 考点2 立体几何中关于范围问题的求解策略/63

- 考点3 立体几何中类比问题的常见模式/63

- 考点4 立体几何中翻折问题的处理方法/64

- 考点5 两类空间角求法的比较探究/65

立体几何初步部分综合检测/67

板块二 解析几何初步

第9讲 直线的倾斜角和斜率

- 考点1 直线倾斜角和斜率的概念辨析/70

考点2 直线的倾斜角和斜率的范围问题/71

考点3 直线的两点式斜率公式及应用/72

考点4 两条直线平行与垂直的判定/73

第10讲 直线的方程

考点1 直线的点斜式和斜截式/75

考点2 直线方程的两点式和截距式/77

考点3 直线方程的一般式/79

第11讲 两条直线的位置关系

考点1 平行垂直关系的判定/83

考点2 平行垂直条件的应用/83

考点3 直线一般方程形式的平行与垂直/84

考点4 平行、垂直直线系/85

第12讲 直线的交点坐标与距离公式

考点1 两条直线的交点/88

考点2 点到直线的距离/89

考点3 平行线间的距离/90

考点4 点线距离的创新运用/91

第13讲 圆的方程

考点1 圆的定义及其标准方程/94

考点2 圆的一般方程/96

考点3 圆与坐标轴的截切问题/96

第14讲 直线与圆、圆与圆的位置关系

考点1 直线与圆的位置关系的判断/99

考点2 直线与圆相交的弦长/100

考点3 圆的切线/101

考点4 圆与圆的位置关系/103

第15讲 空间直角坐标系

考点1 空间直角坐标系/106

考点2 空间直角坐标系中的对称点/108

考点3 空间两点间的距离/109

第16讲 直线和圆中几类典型问题的处理方法与技巧

考点1 直线方程形式的合理铺设与选择/112

考点2 对称问题/114

考点3 直线与圆中的数形结合思想运用/116

解析几何初步部分综合检测/117

模块4 综合水平测试/120

答案与提示(单独成册)

板块一 立体几何初步

第1讲 空间几何体的结构

课标解读

1. 认识柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征,并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.
2. 初步理解柱、锥、台、球的概念,掌握它们的生成规律.
3. 了解柱、锥、台、球中一些常用名称的含义.
4. 通过对日常生活中柱、锥、台、球的实物模型的观察,初步体会从感性到理性认识事物的过程.

学法导引

1. 本讲关键要通过对大量空间实物及模型进行感受,学会描述这些几何体的特征,重点是能概括柱、锥、台、球的结构特征,难点是对空间概念建立的领悟以及用运动变化的观点去考察多面体或旋转体.
2. 熟悉多面体(棱柱、棱锥、棱台)与旋转体(圆柱、圆锥、圆台)的几何特征,比较各几何体之间的差异与相同之处.

考点分类例析

考点1 棱柱的结构特征

核心总结

1. 有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行.由这些面所围成的几何体叫做棱柱.

它的几何特征:(1)有两个面(底面)互相平行;(2)其余各面(侧面)每相邻两个面的公共边(侧棱)都互相平行.

因此,棱柱有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形.但是要注意“有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形的几何体”不一定是棱柱.

2. 棱柱是由一个平面多边形沿某一方向平移形成的空间几何体;平移起止的两个面叫做底面,多边形的边平移形成的面叫做侧面,两相邻侧面的公共边叫做侧棱.

按底面多边形的边数,棱柱可分为三棱柱、四棱柱、五棱柱……棱柱可以用表示底面各顶点的字母表示,如三棱柱 $ABC-A'B'C'$,四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 等.

3. 棱柱的底面和侧面实际上都是指平面的局部,是平面多边形及内部的平面部分,多面体的面亦如此.

● 考题1 设有四个命题:

- (1)底面是矩形的平行六面体是长方体;
- (2)棱长相等的直四棱柱是正方体;
- (3)有两条侧棱都垂直于底面一边的平行六面体是直平行六面体;
- (4)对角线相等的平行六面体是直平行六面体.

以上四个命题中,真命题的个数是().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【解析】 命题(1)不是真命题,因为底面是矩形,若侧棱不垂直于底面,这时四棱柱仍然是斜平行六面体.命题(2)不是真命题,若底面是菱形,底面边长与棱长相等的直四棱柱不是正方体.命题(3)也不是真命题,因为有两侧棱垂直于底面一边,这时两个相对的侧面是矩形,但是不能推出侧棱与底面垂直.命题(4)是真命题,由对角线相等,可得出平行六面体的对角面是矩形,从而推得侧棱与底面垂直,这个平行六面体是直平行六面体.

● 方法视窗

解决这类问题需准确理解几何体的定义,把握几何体的结构特征,需要有较强的空间想象能力.当需要否定一个命题时,举一个反例即可.作为选择题,利用四选一的特点,排除三个,可确定第四个为正确答案.

● 防错档案

1. 易错点

有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形的几何体,易误判为是棱柱.

故选 A.

【变式 1-1】 如图 1-1, 一块棱柱形木料, 沿平面 $BEFC$ 锯开(其中 $EF \parallel A_1D_1$).

- (1) 指出棱柱木料的上、下底面和侧棱、侧面;
- (2) 剩下的多面体和截去的多面体是棱柱吗?

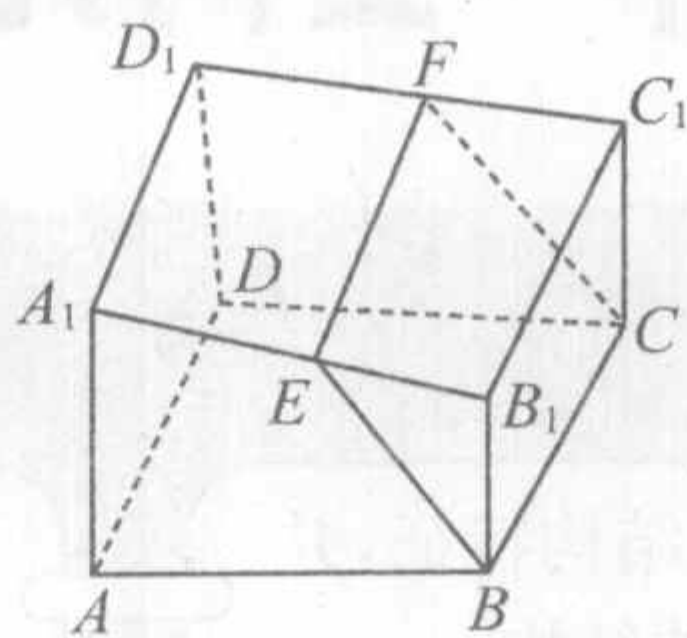


图 1-1

2. 防错良方

- (1) 准确把握棱柱的概念;
- (2) 强化空间想象能力的培养, 通过模型加深理解.

考点 2 棱锥、棱台的结构特征

核 心 总 结

1. 有一个面是多边形, 其余各面都是有一个公共顶点的三角形, 由这些面所围成的几何体叫棱锥. 棱锥是利用棱柱来定义的, 当棱柱的一个底面收缩为一个点时, 得到的几何体叫做棱锥. 一个棱锥至少有四个面, 所以三棱锥也叫四面体.
2. 特殊的棱锥——正棱锥
如果一个棱锥的底面是正多边形, 并且顶点在底面上的射影是底面的中心, 这样的棱锥叫正棱锥.
3. 棱台是利用棱锥来定义的, 用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥, 得到两个几何体, 一个仍然是棱锥, 另一个称之为棱台, 截面叫做上底面, 原棱锥的底面叫做下底面.
4. 由若干个平面多边形围成的几何体叫做多面体, 不要认为多面体只有棱柱、棱锥、棱台, 其实还有其他形形色色的多面体, 但这些形形色色的多面体一般可以看成是棱柱、棱锥、棱台的组合体.

● 考题 2 某同学画了一个多面体(如图 1-2), 它满足两个条件: ①上、下两个面平行; ②其余各面都是梯形. 该同学画的多面体是不是棱台?

【解析】 棱台的定义是: 用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥, 底面与截面之间的部分叫棱台. 由定义知棱台上、下底面互相平行, 各条侧棱延长必相交于一点, 其余各面是梯形. 前两条是本质特征, 后一条是性质.

虽然这位同学画的像是棱台, 但仔细观察得 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 所在直线不交于一点, 所以该几何体不是棱台.

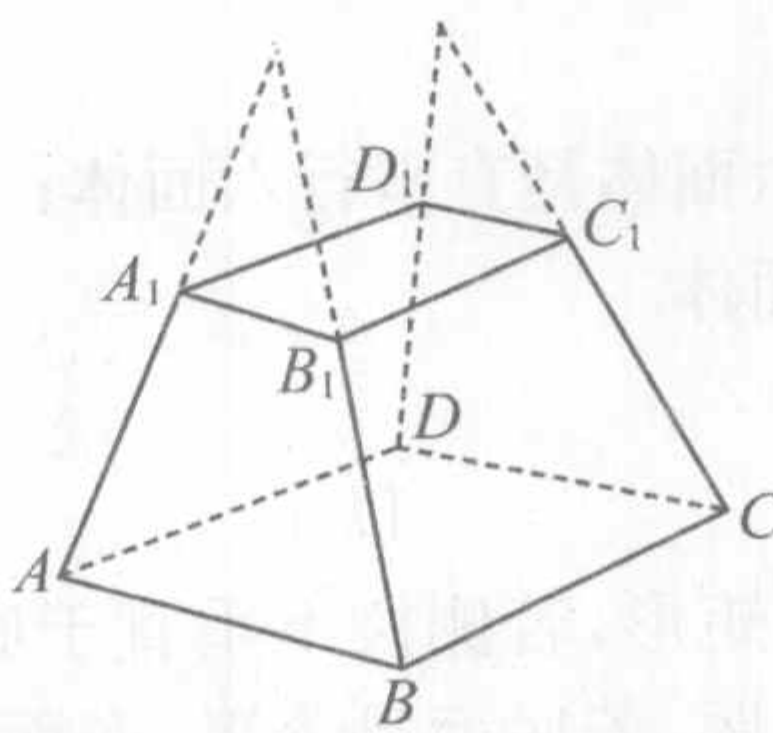


图 1-2

● 规律清单

1. 判断一个棱锥是否是正棱锥必须满足下面两个条件:

- (1) 底面为正多边形;
- (2) 顶点在底面上的射影必是底面正多边形的中心.

这也是掌握正棱锥定义的两个要点.

2. 与正棱锥的两个要点等价的条件:

- (1) 正多边形 $\Leftrightarrow$ 外心与内心重合的多边形.
- (2) 正三角形 $\Leftrightarrow$ 外心、内心、垂心、重心中有任何两个重合的三角形.

●考题3 在四棱锥的四个侧面中,直角三角形最多可有().

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【解析】如图1-3,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中取四棱锥 A_1-ABCD ,则此四棱锥的四个侧面都是直角三角形.

故选D.

【变式2-1】下面给出了三个命题:

- (1)用一个平面去截棱锥,棱锥底面和截面之间的部分是棱台;
- (2)两个底面平行且相似,其余各面都是梯形的多面体是棱台;
- (3)有两个面互相平行,其余四个面都是等腰梯形的六面体是棱台.

其中正确命题的个数是().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

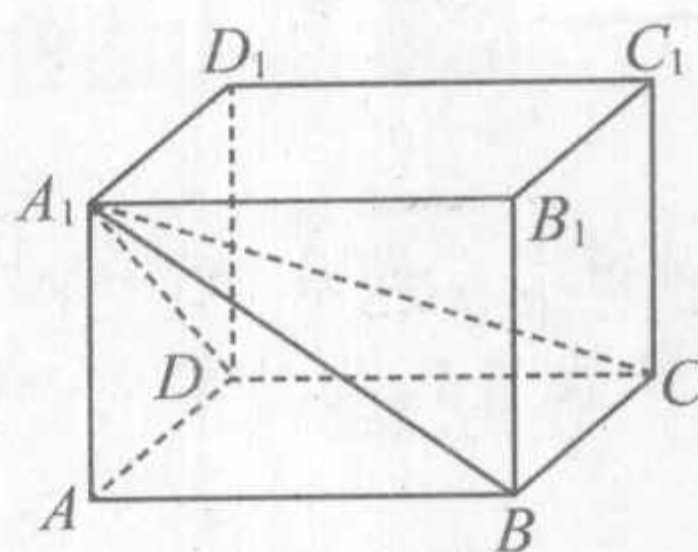


图1-3

●方法视窗

1. 判定棱台的步骤:先看上、下底面是否互相平行,再看各条侧棱延长线是否相交于一点.今后可以证明:若两底面的对应边平行且成比例,那么这个几何体是棱台,只具备其中一条时不是棱台.

2. 考题3中,对给出的四棱锥没有带任何附加条件,只给出了思考、探索的方向,即思考、探索侧面为直角三角形的四棱锥应是怎样的模型,给人充分的想象空间,让人们去思考、探索问题,确实是一道好题,也是今后命题的方向,对培养能力大有裨益.

考点3 圆柱、圆锥、圆台的结构特征

核 心 总 结

1. 将矩形、直角三角形、直角梯形分别绕着它的一边、一直角边、垂直于底边的腰所在的直线旋转一周,形成的几何体分别叫做圆柱、圆锥、圆台,这条直线叫做轴,垂直于轴的边旋转一周而成的圆面叫做底面,不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做侧面,无论旋转到什么位置,这条边都叫做母线.

2. 一般地,一条平面曲线绕它所在平面内的一条直线旋转形成的曲面叫做旋转面,封闭的旋转面围成的几何体称为旋转体,圆柱、圆锥、圆台都是特殊的旋转体.

●考题4 下列命题:

- (1)以直角三角形的一边为轴旋转一周所得的旋转体是圆锥;
- (2)以直角梯形的一腰为轴旋转一周所得的旋转体是圆台;
- (3)圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆;
- (4)一个平面截圆锥,得到一个圆锥和一个圆台.

其中正确命题的个数为().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【解析】根据圆柱、圆锥、圆台的概念不难作出判断.

(1)应以直角三角形的一条直角边为轴旋转才可以得到圆锥;(2)以直角梯形垂直于底边的一腰为轴旋转才可得到圆台;(3)它们的底面为圆面;(4)用平行圆锥底面的平面截圆锥,才可得到一个圆锥和一个圆台.

故选A.

【变式3-1】下列命题中正确的是().

- A. 直角三角形绕一边旋转得到的旋转体是圆锥
- B. 夹在圆柱的两个平行截面间的几何体还是一个旋转体
- C. 圆锥截去一个小圆锥后剩余部分是圆台
- D. 通过圆台侧面上一点,有无数条母线

●方法视窗

考题4 主要根据圆柱、圆锥、圆台的概念来判断,但应仔细体会它们的形成过程.

考点4 球的结构特征

核 心 总 结

1. 球面与球的概念

概念:半圆绕着它的直径所在直线旋转一周而形成的几何体叫做球,半圆弧旋转而成的曲面叫做球面.

球也可以看成是一个圆绕着它的一条直径所在直线旋转半周而形成的几何体.

2. 需要注意的几点:

(1)球面与球是两个不同的概念,球面只是球的表面,是一“空心”的,而球是几何体,是实心的.

(2)半圆可看成是球的母线吗?不能,母线是指直线段,事实上,在球面上是不能画出直线段的.

3. 大圆与小圆的概念

球的任何截面都可以得到一个圆,经过球心的截面叫做大圆,不经过球心的截面叫做小圆.大圆的半径等于球的半径,小圆的半径小于球的半径.

● 考题5 已知球的两个平行截面的面积分别为 5π 和 8π ,它们位于球心的同侧,且距离等于1,求这个球的半径.

【解析】作出球的轴截面,实现空间图形平面化,进而利用圆的性质去解决问题.

如图1-4,设这两个截面的半径分别为 r_1, r_2 ,球心到截面的距离分别为 d_1, d_2 ,球半径为 R ,则

$$\pi r_1^2 = 5\pi, \pi r_2^2 = 8\pi, \therefore r_1^2 = 5, r_2^2 = 8.$$

$$\text{又} \because R^2 = r_1^2 + d_1^2 = r_2^2 + d_2^2, \therefore d_1^2 - d_2^2 = 8 - 5 = 3,$$

$$\text{即} (d_1 - d_2)(d_1 + d_2) = 3. \text{又} d_1 - d_2 = 1,$$

$$\therefore \begin{cases} d_1 + d_2 = 3, \\ d_1 - d_2 = 1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} d_1 = 2, \\ d_2 = 1. \end{cases}$$

$$\therefore R = \sqrt{r_1^2 + d_1^2} = \sqrt{5 + 4} = 3.$$

【变式4-1】在半径为25cm的球内有一个截面,它的面积是 $49\pi\text{cm}^2$,则球心到这个截面的距离为_____.

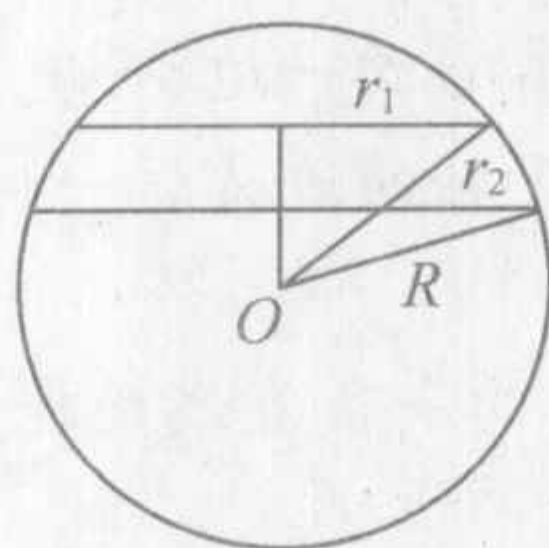


图1-4

方法视窗

考题5体现了空间球的“与截面垂直的直径过截面圆的圆心”到平面圆的“与弦垂直的直径过弦的中点”及“球半径的平方=球心到截面圆的距离的平方+截面圆的半径的平方”到“圆半径的平方=圆心到弦的距离的平方+弦长的一半的平方”等价转化的思想.

考点5 简单组合体的结构特征

核 心 总 结

我们已掌握了柱、锥、台、球等简单几何体的定义及生成规律.若某个几何体是由两个以上简单几何体(柱、锥、台、球)组合而成,则我们称这个几何体为简单组合体.换句话说,当某个几何体的形成不是与柱、锥、台、球生成的规律一样时,则这个几何体可能是简单组合体.如(1)一个直角三角形绕斜边旋转一周时所得的几何体应是由两个共底面的圆锥组成;(2)一个直角梯形绕非直角腰旋转一周时所得的几何体应是由一个圆台内部挖去一个与圆台上底面共底面的圆锥并加上一个与圆台下底面共底面的圆锥所组成的,等等.掌握了简单几何体的结构特征,则简单组合体的结构特征可看成是组成这个几何体的各简单几何体的结构特征的组合.

● 考题6 如图1-5中的燕尾槽工件(中间割去的为四棱台)是由哪些简单几何体构成的?

【解析】图1-5中的几何体可以看作是一个长方体割去一个四棱台所得的几何体,也可以看成是一个长方体与两个四棱台组合而成的几何体(如图1-6).

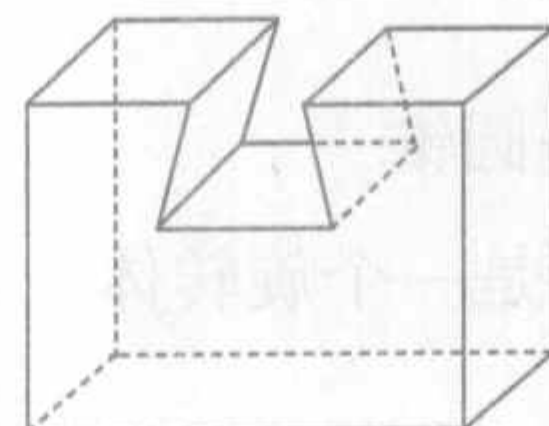


图1-5

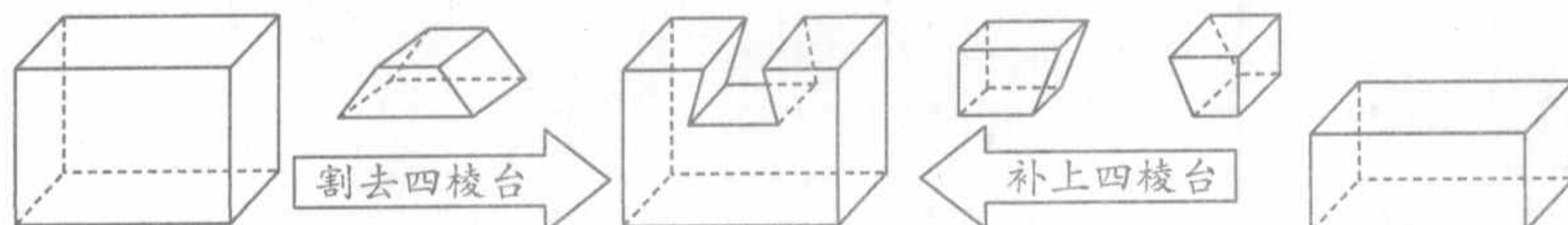


图1-6

方法视窗

一些复杂的几何体是由简单几何体组合而成的,因而解决本题的关键是要熟悉几种简单几何体的结构特征.另外,观察几何体生成的角度不同,得到几何体的构成可能就不一样.一般来说复杂几何体的构成方式有两种:

(1)“割”与“补”,例如考题6中从图1-6可看出从左往右是“割”,而从“右”往“左”则

【变式 5-1】 指出图 1-7 中三个几何体的主要结构特征:

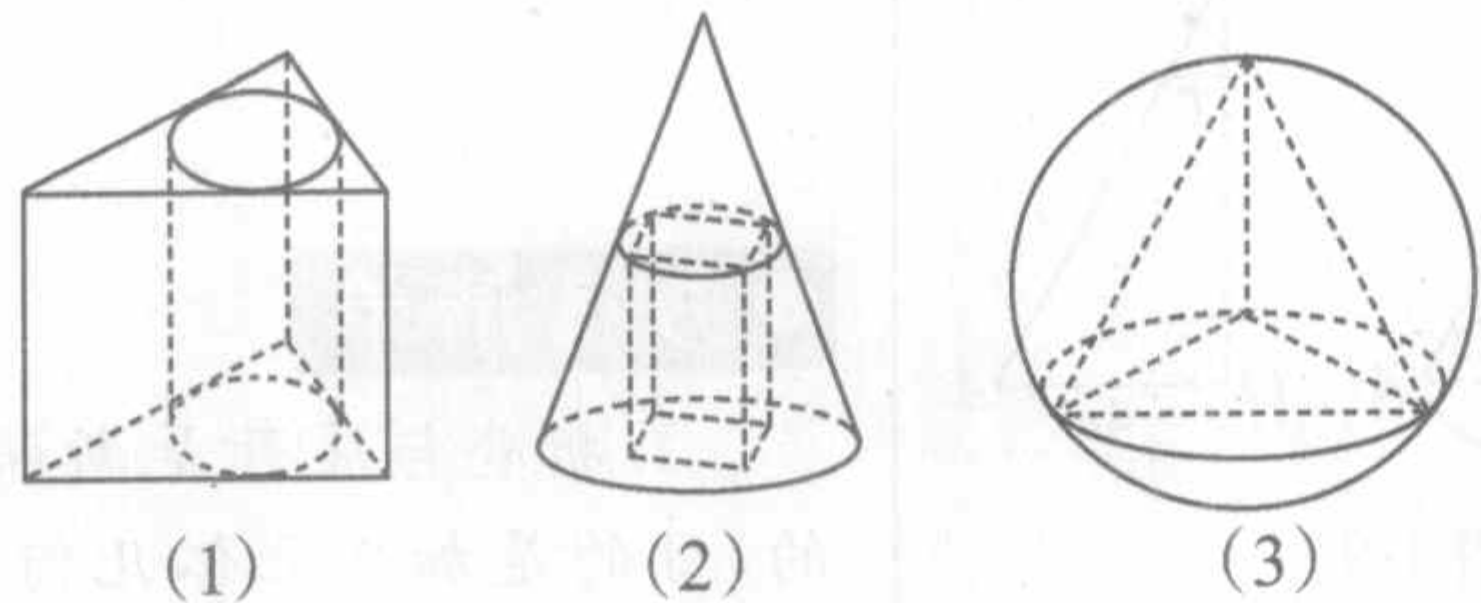


图 1-7

是“补”;

(2)“切”与“接”,例如变式 5-1 中就是几种常见的“切”与“接”的几何体,在后续课程中我们会时常见到它们的身影.

考点 6 空间几何体中的简单计算问题

核 心 总 结

1. 在正棱锥中,要掌握正棱锥的高、侧面,等腰三角形中的斜高及高与侧棱所构成的两个直角三角形,有关证明及计算往往与两者相关.
2. 正四棱台中要掌握对角面与侧面两个等腰梯形中关于上、下底及梯形高的计算,有关问题往往要转化到这两个等腰梯形中.另外要能够将正四棱台、正三棱台中的高与其斜高、侧棱在合适的平面图形中联系起来.
3. 研究圆柱、圆锥、圆台等问题的主要方法是研究它们的轴截面,这是因为在轴截面中,易找到所需有关元素之间的位置、数量关系.
4. 将圆柱、圆锥、圆台的侧面展开是把立体几何问题转化为平面几何问题处理的重要手段之一.
5. 圆台问题有时需要还原为圆锥问题来解决.
6. 关于球的问题中的计算,常选取球的一个大圆,化“球”为“圆”,应用平面几何的有关知识解决;关于球与多面体的切、接问题,要恰当地选取截面,化“空间”为“平面”.
7. 常见的截面有:
中截面:过几何体高的中点且垂直于高的截面.
直截面:垂直于侧棱的截面.
对角截面:过不相邻两侧棱的截面.
轴截面:过圆柱、圆锥、圆台的轴的截面.圆柱的轴截面是矩形,圆锥的轴截面是等腰三角形,圆台的轴截面是等腰梯形.

● 考题 7 (1)长方体的一条对角线与一个顶点处的三条棱所成的角分别为 α, β, γ , 则 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ 与 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$ 的值分别为_____和_____.

(2)用一个平行于圆锥底面的平面截这个圆锥,截得圆台上、下底面的面积之比为 $1:16$,截去的圆锥的母线长是 3cm ,则圆台的母线长为_____.

【解析】 (1)如图 1-8,从长方体的一个顶点出发的对角线与三条棱均位于直角三角形中,利用直角三角形中的边角关系“ $\cos \alpha = \frac{\text{邻}}{\text{斜}}$ ”与“ $\sin \alpha = \frac{\text{对}}{\text{斜}}$ ”求解.这样可设长方体的一个顶点出发的长、宽、高分别为 a, b, c , 相应

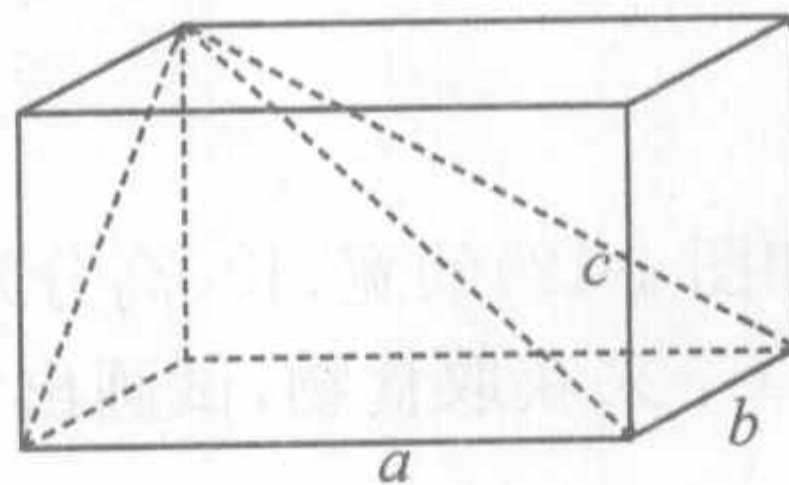


图 1-8

对角线长为 l , 则 $l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \left(\frac{a}{l}\right)^2 + \left(\frac{b}{l}\right)^2 + \left(\frac{c}{l}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{l^2} = 1,$$

$$\therefore \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{b^2 + c^2}{l^2} + \frac{a^2 + c^2}{l^2} + \frac{a^2 + b^2}{l^2} = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{l^2} = 2.$$

$$\therefore \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2.$$

● 方法视窗

1. 考题 7(1)关键在于找准直角三角形中的三边,斜边是长方体的对角线,角的邻边是各棱长,角的对边是相应矩形面的对角线.

2. 考题 7(2)中注意到用平行于底面的平面去截柱、锥、台等几何体,注意抓住截面的性质(与底面全等或相似),同时结合旋转体中的轴截面(经过旋转轴的截面)的几何性质,利用相似三角形中的相似比,构造相关几何变量的方程(组)而解得.

3. 将棱锥去掉底面,沿任意一条侧棱割开,然后放在平面上展平,将空间问题转化为平面问题处理.而利用侧面展开是将此类空间问题转化为平面问题的常用方法.

(2)如图 1-9,抓住轴截面,利用相似比,由上、下两底面面积之比为 $1:16$,设圆台的母线长为 l ,截得圆台的上、下底面半径分别为 $r, 4r$.

根据相似三角形的性质是 $\frac{3}{3+l} = \frac{r}{4r}$,

解得 $l=9(\text{cm})$.

所以,圆台的母线长为 9cm .

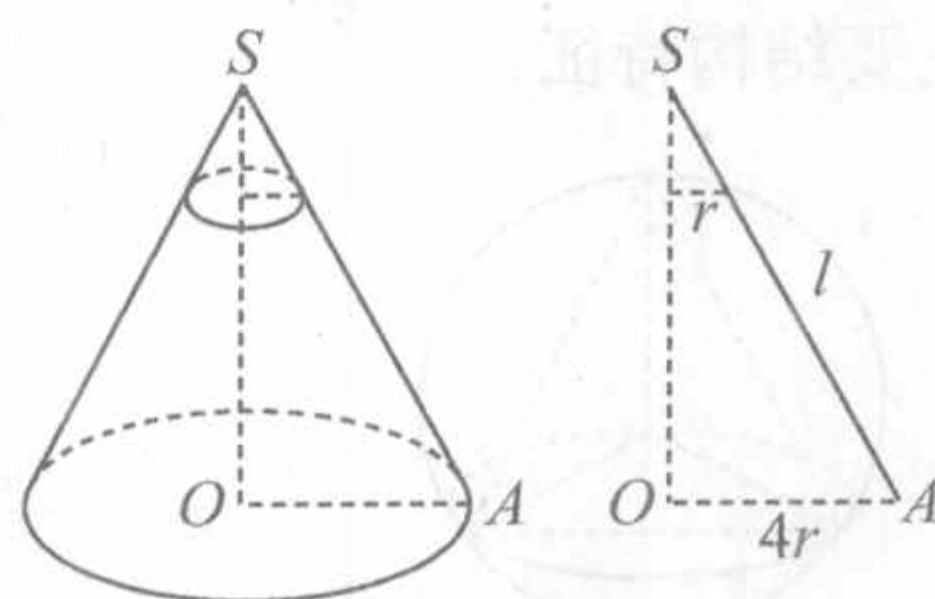


图 1-9

● **考题 8** 如图 1-10,正三棱锥 $A-BCD$ 底面边长为 a ,侧棱长为 $2a$. E, F 分别为 AC, AD 上的动点,求截面 $\triangle BEF$ 周长的最小值和这时 E, F 的位置.

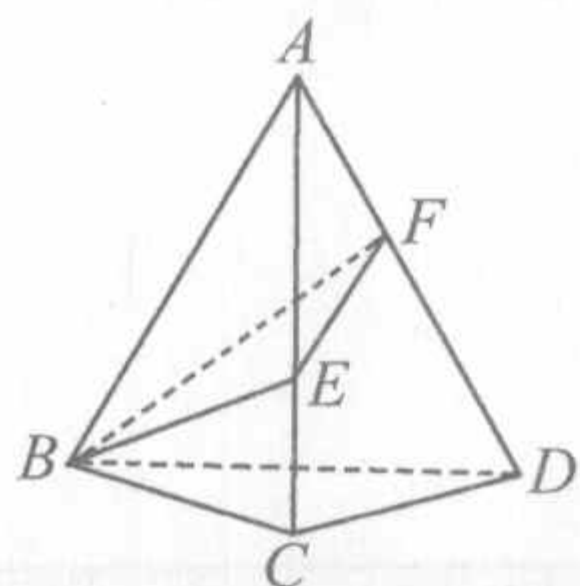


图 1-10

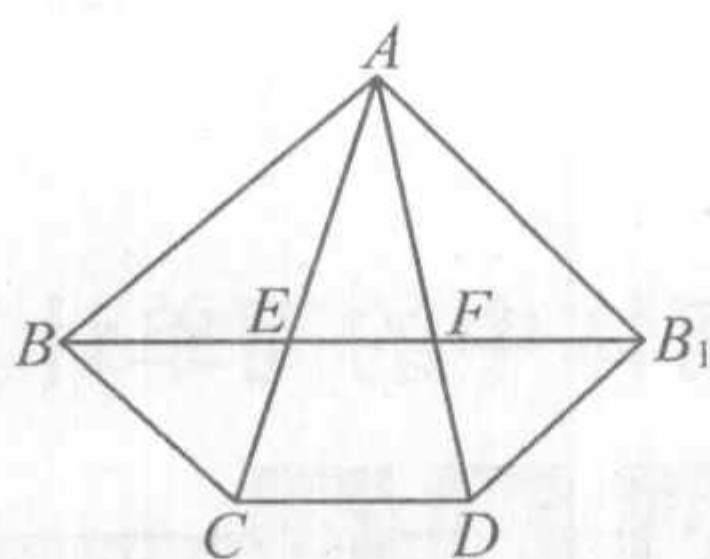


图 1-11

【解析】去掉底面 BCD ,沿侧棱 BA 割开,然后放在平面上展平得到一个由三个全等的等腰三角形拼接而成的五边形(如图 1-11).

利用平面上两点之间线段最短原理知,截面 $\triangle BEF$ 周长的最小值即是图 1-11 中线段 BB_1 的长度.

由对称性知, $BB_1 \parallel CD$, 所以 $B_1F = B_1D = BC = BE = a$.

又 $\triangle B_1FD \sim \triangle ACD$, 所以 $\frac{FD}{CD} = \frac{B_1D}{AD} = \frac{a}{2a}$, 所以 $FD = \frac{1}{2}a$.

又因为 $\frac{EF}{CD} = \frac{AF}{AD}$, 所以 $\frac{EF}{a} = \frac{2a - \frac{1}{2}a}{2a}$, 所以 $EF = \frac{3}{4}a$.

故 $BB_1 = 2a + \frac{3a}{4} = \frac{11a}{4}$, 即截面 $\triangle BEF$ 周长的最小值为 $\frac{11}{4}a$.

这时 $EF \parallel CD$, 且 $\frac{CE}{AC} = \frac{DF}{AD} = \frac{1}{4}$.

【变式 6-1】已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 1 ,上底边长为 2 ,下底边长为 4 ,求它的侧棱长和斜高.

【变式 6-2】长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (如图 1-12) 的宽、长、高分别为 $3, 4, 5$,现有一甲壳虫从 A 出发沿长方体表面爬行到 C_1 来获取食物,试画出它的最短爬行路线,并求其路程的最小值.

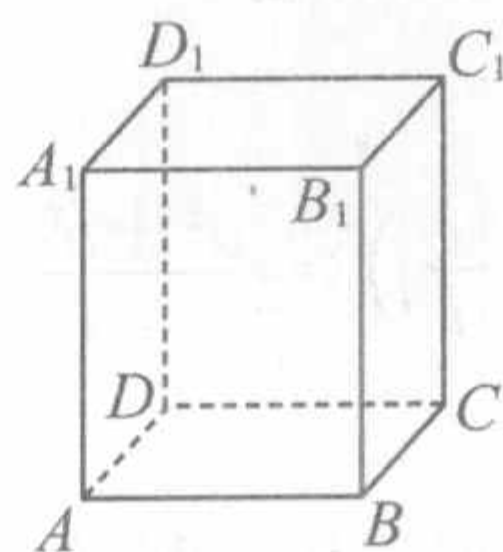


图 1-12

● 规律清单

1. 折叠与展开是新课程教材着重要求的,目的是加强立体几何学习的直观性,提高动手能力和空间想象能力.近几年高考试题及各地考前练兵中类似折叠、展开、实现平面图与空间几何体的图形转换思维训练很热门.解决问题的关键是找准变化中的“变”与“不变”.位于同一面上的诸元素间的位置关系不变,而涉及两个面之间的图形之间则发生量的变化.

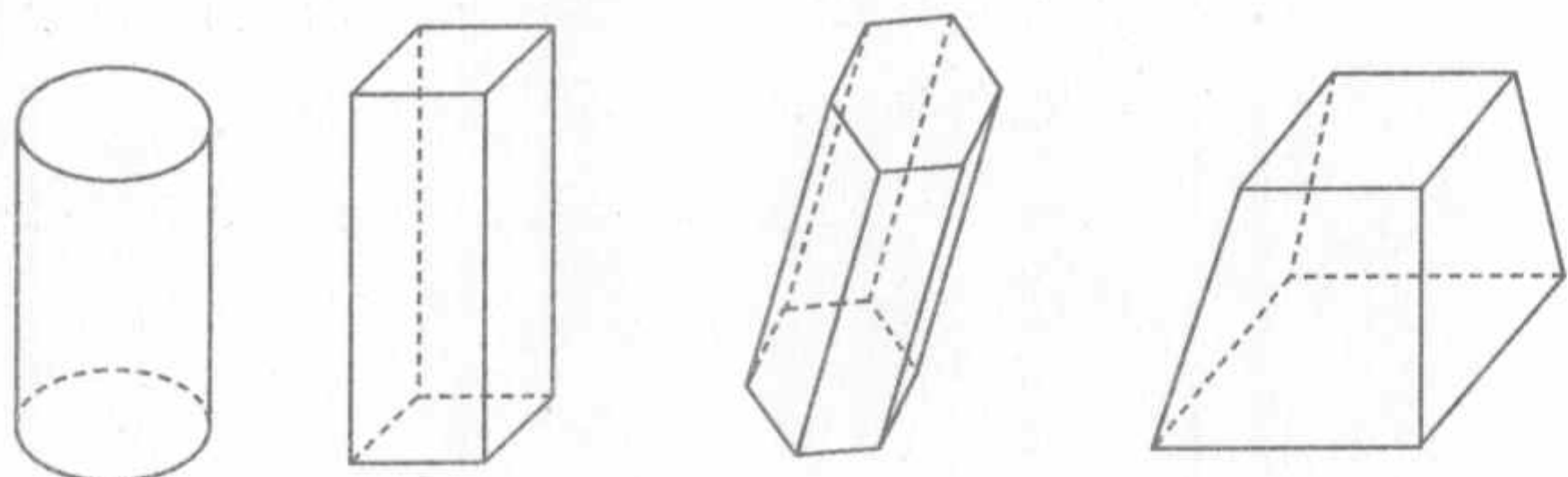
2. 对折叠问题一定要搞清楚对折线、对折后重合的顶点、重合的棱.如何设计方案还是依赖对棱柱、棱锥、棱台几何特征的准确、熟练的把握.该类题是对常见多面体几何特征的知识性考查,同时要考查我们的空间想象能力.故平时学习时应加强对折叠、展开问题的训练,牢固把握立体空间问题向平面转化的方法.

3. 立体图形的展开或平面图形的折叠是培养空间立体感的好方法.

专题优化测试

学业水平测试

1. (考点 2) 下列命题正确的是().
- A. 由五个平面围成的多面体只能是四棱锥
- B. 棱锥的高线可能在几何体之外
- C. 仅有一组对面平行的六面体是棱台
- D. 有一个面是多边形, 其余各面是三角形的几何体是棱锥
2. (考点 1、2) 下面各图中, 棱柱的个数是().



A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. (考点 4) A, B 为球面上相异两点, 则通过 A, B 两点可作球的大圆有().
- A. 一个 B. 无穷多个
- C. 零个 D. 一个或无穷多个
4. (考点 3) 圆台被经过圆台轴的平面截得的图形是_____.
5. (考点 3、5) 若 $ABCD$ 为等腰梯形, 两底边分别为 AB 和 CD , 且 $AB > CD$, 则绕 AB 所在的直线旋转一周所得的几何体是由_____、_____、_____构成的组合体.
6. (考点 6) 圆锥的底面半径为 r , 侧面母线长为 l , 侧面展开图扇形的圆心角为 θ , 求证: $\theta = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$.

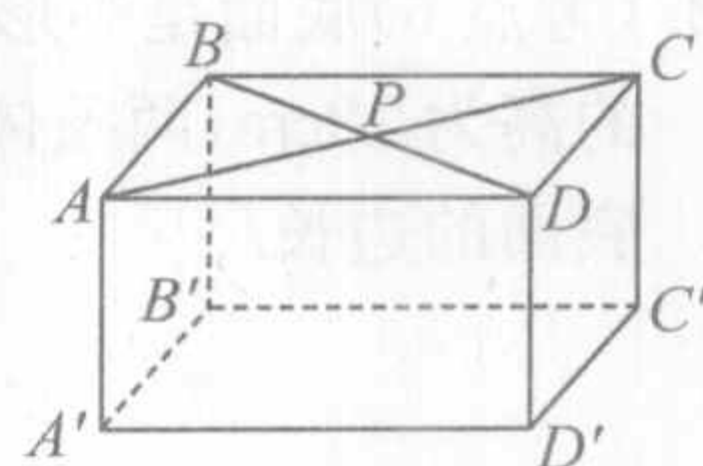
2. (考点 3) 有下列命题:

- (1) 在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点, 则这两点的连线是圆柱的母线;
- (2) 圆锥顶点与底面圆周上任意一点的连线是圆锥的母线;
- (3) 在圆台上、下底面圆周上各取一点, 则这两点的连线是圆台的母线;
- (4) 圆柱的任意两条母线所在的直线是互相平行的.
- 其中正确的是().

A. (1)(2) B. (2)(3)

C. (1)(3) D. (2)(4)

3. (考点 2) 如图, 在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, P 是对角线 AC 与 BD 的交点. 若 P 为四棱锥的顶点, 则底面为长方体的侧面的棱锥的个数为().



第3题图

A. 3 B. 4

C. 5 D. 6

4. (考点 1, 2005, 全国) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P, Q, R 分别是 AB, AD, B_1C_1 的中点. 那么, 正方体的过 P, Q, R 的截面图形是().

A. 三角形 B. 四边形

C. 五边形 D. 六边形

5. (考点 6) 长方体的表面积为 11, 12 条棱长度之和为 24, 则长方体的一条对角线长为().

A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{14}$ C. 5 D. 6

6. (考点 6) 长方体中共点的三条棱长分别为 a, b, c ($a < b < c$), 分别过这三条棱中的一条及其对棱的对角面的面积分别记为 S_a, S_b, S_c , 则().

A. $S_a > S_b > S_c$ B. $S_a > S_c > S_b$

C. $S_b > S_c > S_a$ D. $S_c > S_b > S_a$

7. (考点 6) 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, $\angle AB_1C = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BAB_1 = \theta$, 则().

A. $\sin \alpha = \sin \beta \cdot \cos \theta$ B. $\sin \beta = \sin \alpha \cdot \cos \theta$

C. $\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \theta$ D. $\cos \beta = \cos \alpha \cdot \cos \theta$

8. (考点 4, 2008, 江西) 连结球面上两点的线段称为球的弦. 半径为 4 的球的两条弦 AB, CD 的长度分别等于 $2\sqrt{7}, 4\sqrt{3}$, M, N 分别为 AB, CD 的中点, 每条弦的两端都在球面上运动, 有下列四个命题:

- ①弦 AB, CD 可能相交于点 M ; ②弦 AB, CD 可能相交于点 N ; ③ MN 的最大值为 5; ④ MN 的最小值为 1.

其中真命题的个数为().

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题

9. (考点 6) 已知正六棱台的上、下底面的边长和侧棱的长分别是 a, b, c , 则它的高和斜高分别为_____.
10. (考点 3、6) 圆台侧面的母线长为 $2a$, 母线与轴的夹角为 30° , 一个底面半径是另一个底面半径的 2 倍, 则两底面的

高考水平测试

一、选择题

1. (考点 1) 判断下列命题的真假, 其中真命题是().
- A. 各侧面都是矩形的棱柱是长方体
- B. 侧面都是矩形的直四棱柱是长方体
- C. 有两个相邻的侧面互相垂直的棱柱是直棱柱
- D. 有两个相邻的侧面是矩形的棱柱是直棱柱

半径为_____.

11. (考点 4) 半圆 O 绕垂直于直径 AB 且过 O 的直线旋转一周所得几何体是_____.

12. (考点 1、2, 2007, 安徽) 在正方体上任意选择 4 个顶点, 它们可能是如下各种几何形体的 4 个顶点, 这些几何形体是_____ (写出所有正确结论的编号).

- ①矩形;
- ②不是矩形的平行四边形;
- ③有三个面为等腰直角三角形, 有一个面为等边三角形的四面体;
- ④每个面都是等边三角形的四面体;
- ⑤每个面都是直角三角形的四面体.

三、解答题

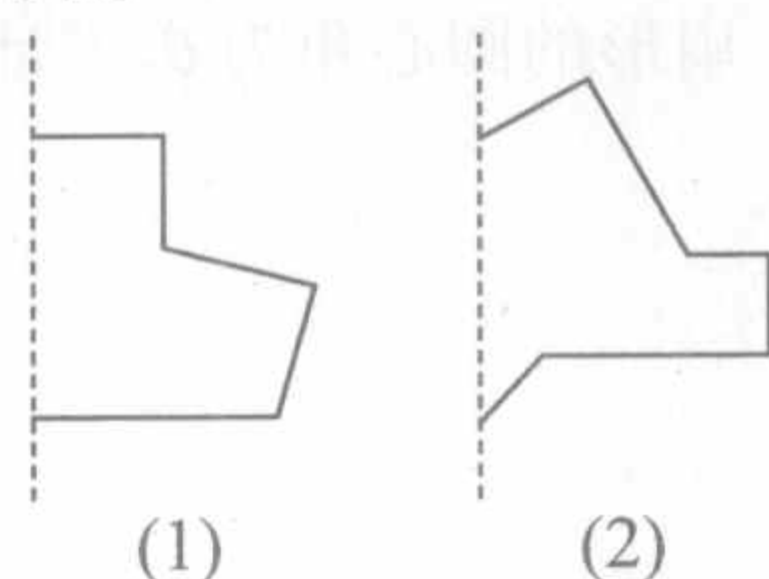
13. (考点 6) 底面是菱形的四棱柱, 侧棱与底面垂直. 已知棱柱的高为 12cm, 两条体对角线的长分别为 15cm 和 20cm, 求底面的边长.

14. (考点 5、6) 已知球的半径为 14cm, 内有一个长方体, 若长方体的八个顶点都在球面上, 这个长方体叫做球的内接长方体. 若此球的内接长方体的高、宽、长的比为 1:2:3, 求此长方体的高、宽、长的长度.

15. (考点 4) 过球 O 的表面上一点 A 引三条长度相等的弦 AB , AC , AD , 且两两夹角都是 2α , 若球的半径为 R , 求弦 AB 的长.



16. (考点 5) 如图所示的平面图形绕虚线旋转一周后形成新的几何体, 试分析几何体的各自结构特征.



第 16 题图

第2讲 空间几何体的三视图和直观图

课标解读

1. 能画出简单空间图形(长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合)的三视图,能识别上述的三视图所表示的立体模型,会用斜二测法画出它们的直观图.

2. 会用平行投影与中心投影两种方法,画出简单空间图形的三视图与直观图,了解空间图形的不同表示形式.

3. 会画某些建筑物的三视图与直观图(在不影响图形特征的基础上,尺寸、线条等不作严格要求).

4. 了解平行投影具有的性质和斜二测画法原理;掌握用斜二测画法画水平放置的平面图形的方

5. 了解正投影和三视图的概念;会画简单组合体的三视图,并能根据三视图识别其所表示的空间几何体.

学法导引

1. 学习三视图应注意如下四点:

(1) 三视图是观察者从三个不同方向观察同一空间几何体,利用正投影而获得的.

(2) 画三视图是立体几何中的一种基本技能,不但要会画简单空间图形如柱、锥、台、球的三视图,而且还要会画一些简单组合体的三视图.

(3) 画三视图时,要确定主视图、左视图与俯视图的方向,同时注意:主、俯视图长对正;主、左视图高平齐;俯、左视图宽相等.

(4) 由三视图还原成实物图是难点,要充分发挥空间想象力.

2. 学习直观图时应注意两点:

(1) 斜二测画法是一种特殊的平行投影画法,用斜二测画法画直观图,关键是掌握水平放置的平面图的直观图的画法,这是画空间几何体的基础.

(2) 斜二测画法可保持两平行线的平行关系不变,但不能保证线段的长度关系不变,在两条线段平行的情况下,它们可保持长度的比例关系不变.

考点分类例析

考点1 简单组合体的三视图

核 心 总 结

1. 三视图的概念

光线自物体的前面向后投射所得正投影称为主视图或正视图,自上向下的正投影称为俯视图,自左向右的正投影称为左视图,用这三种视图刻画空间物体的结构,三种视图合称为三视图,例如根据图 2-1 中物体的直观图画出它的三视图.

主视图是由前向后的正投影,如图 2-2(1).

左视图是由左向右的正投影,如图 2-2(2).

俯视图是由上向下的正投影,如图 2-2(3).

2. 常见的柱、锥、台、球等简单几何体的三视图的规律

(1) 球的三视图都是圆,并且三个圆全等.

(2) 长方体的三视图都是矩形.

(3) 圆柱的正视图、左视图是矩形,俯视图是圆.

(4) 圆锥的正视图、左视图是等腰三角形,俯视图是圆及圆心点.

(5) 圆台的正视图、左视图是等腰梯形,俯视图是共圆心的两个圆.

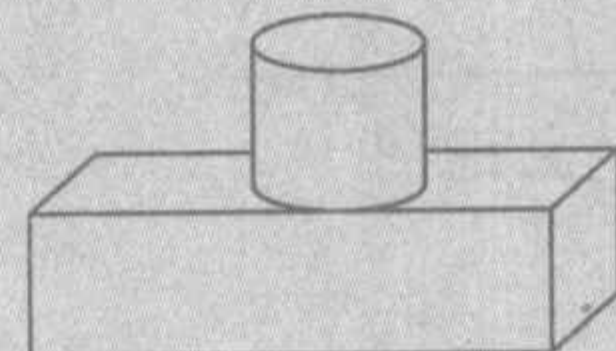


图 2-1

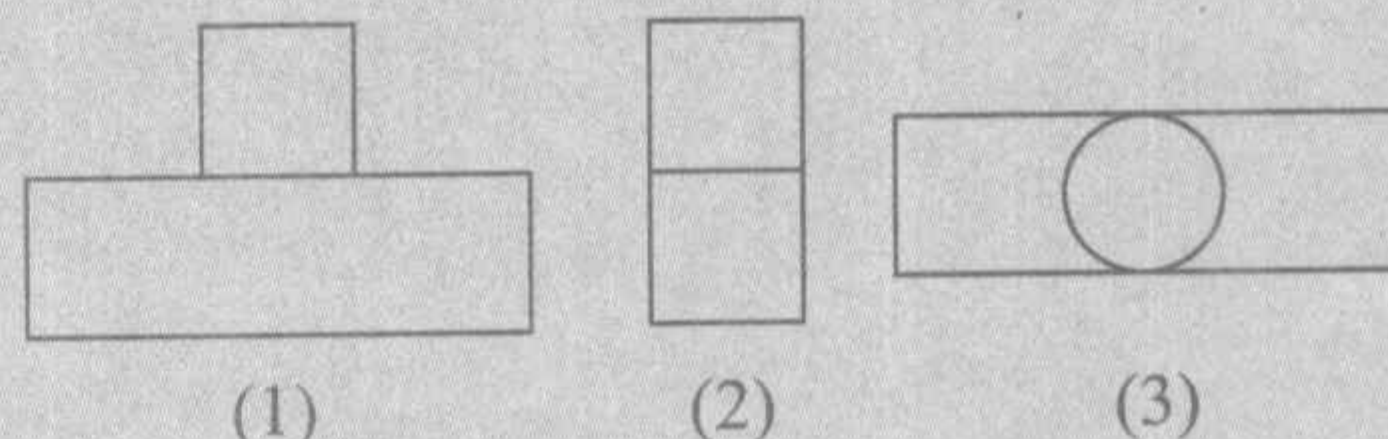


图 2-2

● 考题 1 画出下列各几何体的三视图.

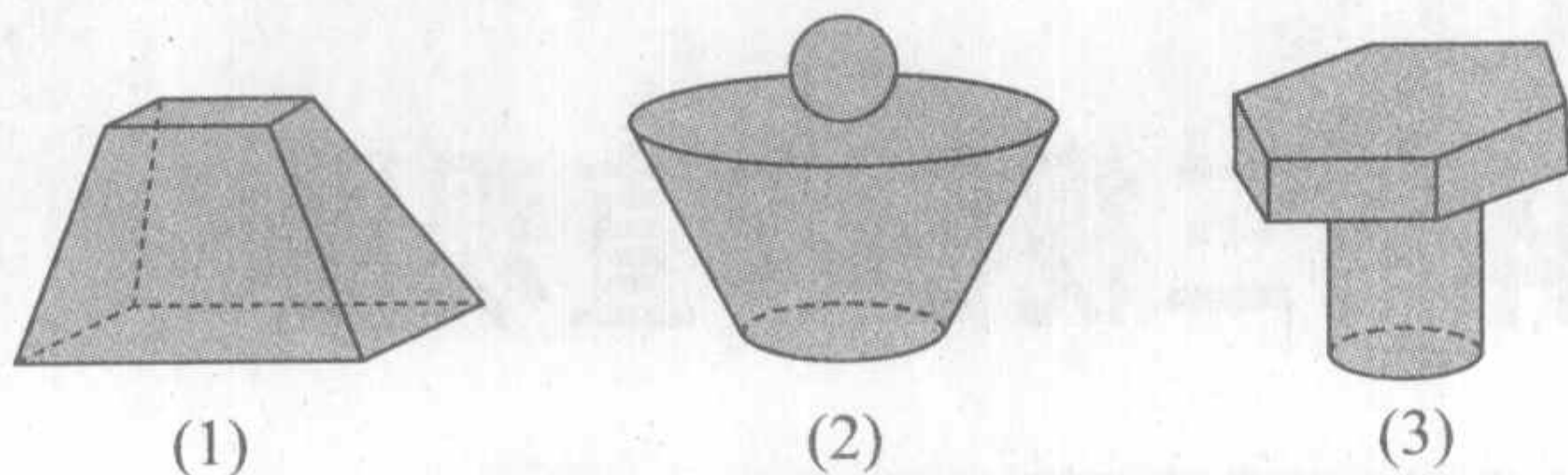


图 2-3

【解析】 图 2-3(1)是正四棱台;图 2-3(2)为圆台和球的组合体;图 2-3(3)为圆柱和正六棱柱的组合体.

这三个几何体的三视图如图 2-4 所示.

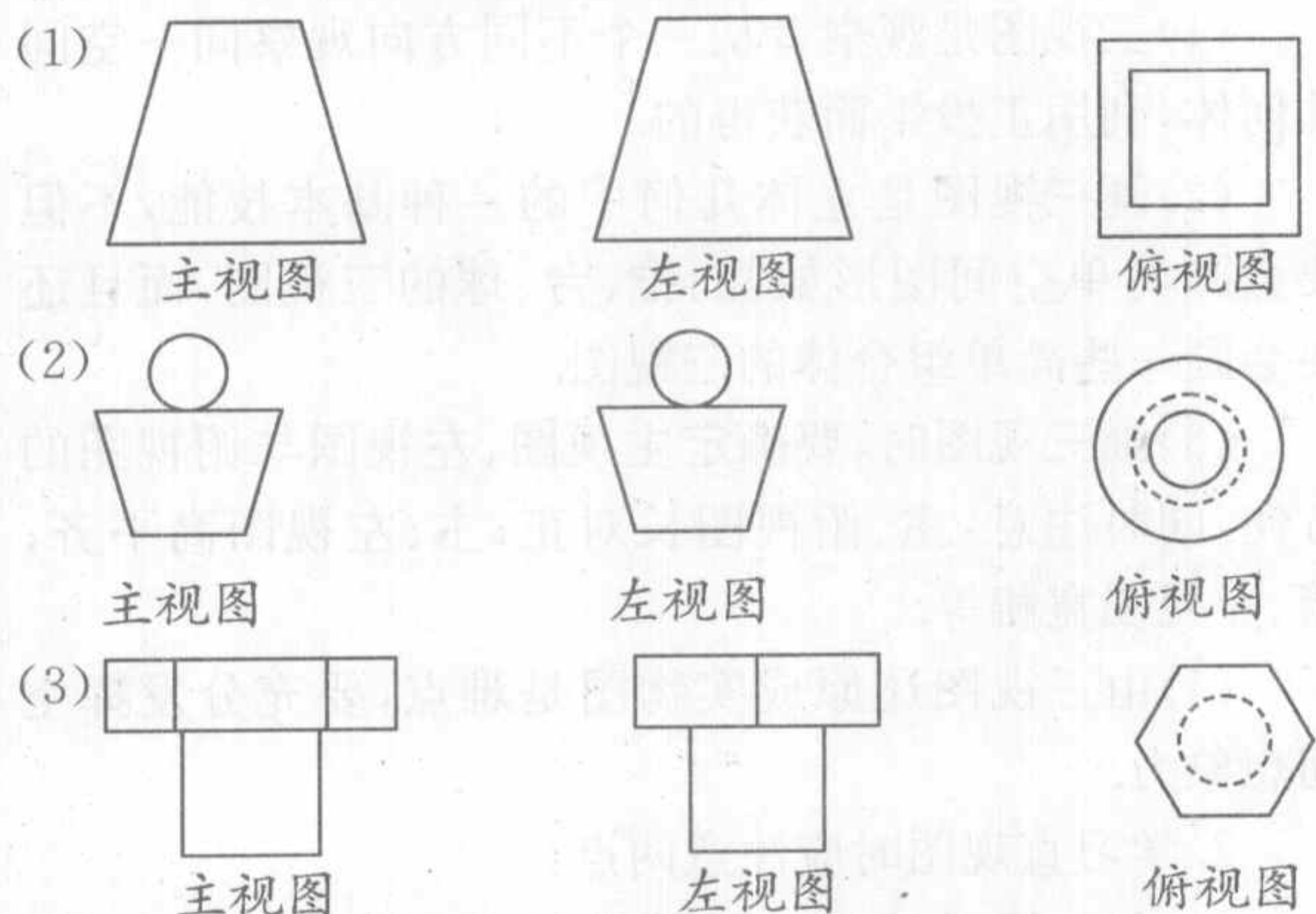


图 2-4

【变式 1-1】 (1)画出图 2-5 所示组合体的三视图 (不考虑尺寸).

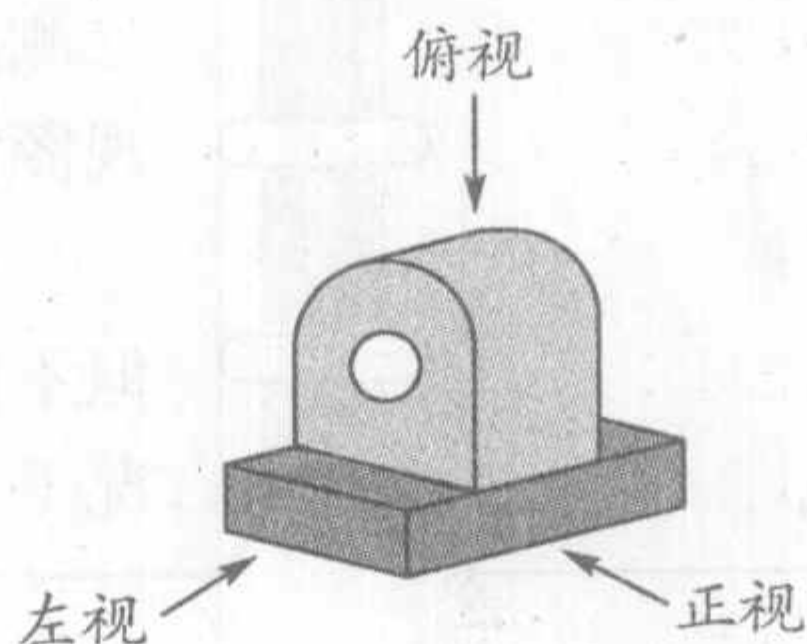


图 2-5

(2)图 2-6 是一个空间图形的三视图,它表示的空间图形可能是什么几何体?

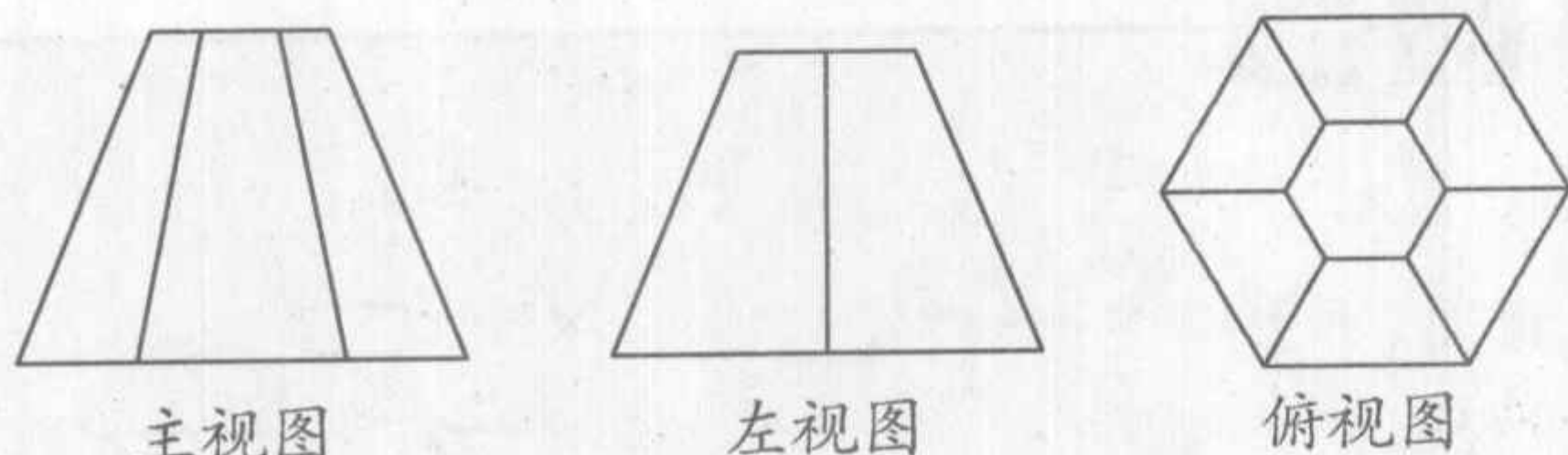


图 2-6

● 规律清单

三视图的画法:

(1)三视图的主视图、左视图、俯视图分别是从几何体的正前方、正左方、正上方观察几何体画出的轮廓线.画几何体的三视图的要求是主视图、俯视图长对正,主视图、左视图高平齐,俯视图、左视图宽相等,前后对应.画出的三视图要检验是否符合“长对正、宽相等、高平齐”的基本特征.

(2)由三视图想象几何体时也要根据“长对正、宽相等、高平齐”的基本特征,想象视图中每部分对应的实物部分的形状,特别注意几何体中与投影面垂直或平行的线及面的位置.

(3)对于简单几何体的组合体,首先要分清它是由哪些简单几何体组成的,然后再画出它的三视图.

● 方法视窗

1.画简单组合体的三视图应注意两方面:

(1)要确定主视、左视与俯视的方向;
(2)确定简单组合体是由哪几个基本几何体生成,注意它们的生成方式,特别是它们的交线,哪些是可见轮廓线,哪些是不可见轮廓线.

2.由三视图想象还原成实物的基础是:熟悉柱、锥、台、球的三视图的特点,并能熟练地由它们的三视图还原成柱、锥、台、球.