高等学校教材

线性代数（理工类）

主　编　肖马成
副主编　曲文萍　蔡德祺

高等教育出版社

高等学校教材

线性代数(理工类)

主　编　肖马成
副主编　曲文萍　蔡德祺

高等教育出版社

内容提要

本书是南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院、天津大学仁爱学院、大连理工大学城市学院等十几所院校根据目前独立学院教学现状，结合多年在独立学院的教学经验联合编写而成。本书主要内容有：行列式，矩阵，线性方程组，n 维向量空间，矩阵的特征值与特征向量，二次型。书中每章配有 A、B 两类习题，并附有习题答案。书中带“*”号的内容，可由任课老师视具体情况选讲。

本书体现教学改革及教学内容的优化，针对独立学院的办学特色及教学需求，适当降低理论深度，突出数学知识应用的分析和运算方法，着重基本技能的训练而不过分追求技巧，突出基本训练的题目，兼顾学习知识与能力培养，有利于学生的可持续发展，并体现新的教学理念。

本系列教材可作为独立学院理工类专业的线性代数课程教材，也可供有关人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数．理工类／肖马成主编．—北京：高等教育出版社，2009.1

ISBN 978-7-04-024859-3

Ⅰ.线…　Ⅱ.肖…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 193686 号

策划编辑　宋瑞才　**责任编辑**　李　陶　**封面设计**　于文燕　**责任绘图**　黄建英
版式设计　陆瑞红　**责任校对**　金　辉　**责任印制**　毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2009 年 1 月第 1 版
印　　张	14.75	**印　　次**	2009 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	270 000	**定　　价**	18.90 元

物料号　24859-00

前　言

本书是为培养应用型人才的独立学院编写的教材。

目前我国高等教育中独立学院的发展已具有相当规模。许多独立学院在教学实践的基础上，相继开展了深化教育改革的研究。将独立学院办学定位于培养应用型人才已成为多数院校的共识。确立相应的课程体系、教学内容与教学方法已成为各独立学院的共同任务。

许多独立学院为促进独立学院教学改革、课程建设与教材建设，不仅在校内展开深入讨论，而且广泛进行校与校之间的交流。从教育理念、教学思想到教学内容进行广泛探讨。经高等教育出版社组织、协调，召开了"独立学院数学基础课程教学改革及优质教学资源建设研讨会"，总结教学经验与教训，统一认识。并由南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院、天津大学仁爱学院、大连理工大学城市学院、天津商业大学宝德学院、北京工业大学耿丹学院、北京化工大学北方学院、吉林建筑工程学院城建学院、长春大学光华学院、沈阳理工大学应用技术学院等独立学院的数学教学负责人与教师代表认真讨论，制定了独立学院理工类、经济管理科学类数学课程教学基本要求（包括微积分、线性代数、概率论与数理统计），并决定编写教材。教材以有利于应用型人才的培养为目标，以深化教学改革，提高独立学院教学质量为前提，以独立学院课程教学基本要求为指导性文件，总结独立学院数学教学的经验与教训。从课程特点出发，分析培养研究型人才与培养应用型人才的需求差异，研究解决课程体系、系统性、严密性与应用型人才需求的关系。在教材中体现出教学改革与教学内容的优化，使教材适宜于培养应用型人才，并体现学习知识与能力培养的特点，有利于学生的可持续发展，尽力体现新的教学理念。

本系列教材包括理工类、经济管理科学类两套教材，每套教材都由主、辅两部分组成。主教材分别针对高等数学、线性代数、概率论与数理统计3门课程编写。辅教材为主教材的同步辅导书，是为学生释疑解惑、帮助学生理解概念与性质、归纳总结计算方法，并给出主教材中习题的解答。此外，还为教师配备了电

子教案。辅教材在主教材出版后将陆续出版。在教材编写中，我们有意识地注意了解决系统性与适应性关系，逻辑性与简洁性关系，传统与“潮流”等关系以及课程语言与通俗表述的关系。教材编写中有意地强化了概念实例与几何解释的引入以及解决问题的思路和方法；同时注意弱化技巧、构造性证明及纯数学定义。力求做到基本概念、基本理论表述准确、内容深入浅出，既便于教师教，也便于学生学。

本系列教材中，主教材《高等数学(理工类)》、《微积分(经管类)》两书由南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院教授徐兵主编。《线性代数(理工类)》、《线性代数(经管类)》两书由南开大学滨海学院教授肖马成主编。《概率论与数理统计(理工类)》、《概率论与数理统计(经管类)》两书由南开大学滨海学院教授周概容主编。

参加本书《线性代数(理工类)》编写的有：肖马成、曲文萍、蔡德祺、白晓棠、高桂英、王秀玉、杨恩孝。两年多来，自本书的初步构想到编写始终得到高等教育出版社的热情支持与帮助，提出了许多良好建议，为本书提供了良好的质量保证。作者在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免有欠妥之处，衷心希望读者指正。

作　者

2008年8月

目　　录

第一章　行　列　式

在线性代数中，行列式是一个基本工具，讨论很多问题都要用到它. 本章在简单地复习（初等代数学过的）二、三阶行列式定义的基础上，引入 n 阶行列式定义，并讨论它的性质和计算方法，此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默（Cramer）法则.

§1.1　二阶、三阶行列式

为了更好地理解 n 阶行列式的概念和性质，我们先介绍二阶与三阶行列式的一些知识.

一、二元线性方程组与二阶行列式

线性方程组的理论在数学中是基本的也是重要的内容. 在初等数学里，二元一次线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法解方程组，为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,求得方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\tag{1.2}$$

(1.2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得. 其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$是由方程组(1.1)的四个系数确定的,把这四个数按它们在方程组(1.1)中的位置,排成两行两列(横排称行,竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为数表(1.3)所确定的二阶行列式,并记作

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\tag{1.4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式(1.4)的元素. 元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义,可用对角线法则来记忆. 参看图 1.1,把 a_{11}到 a_{22}的实连线称为主对角线,a_{12}到 a_{21}的虚连线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

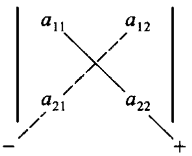

图 1.1

利用二阶行列式的概念,(1.2)式中的 x_1、x_2 分子也可写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则(1.2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \tag{1.5}$$

其中 $D\neq 0$.

上面的(1.5)式是容易记忆的：x_1,x_2 的分母 D 是由方程组(1.1)的系数所构成的二阶行列式(简称系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用方程组(1.1)的常数项 b_1,b_2 替代 D 中的第 1 列 a_{11},a_{21}所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用方程组(1.1)的常数项 b_1,b_2 替代 D 中的第 2 列 a_{12},a_{22}所得的二阶行列式.

例 1 求解方程组

$$\begin{cases} 4x_1+x_2=11, \\ 2x_1+3x_2=13. \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=12-2=10\neq 0,D_1=\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}=33-13=20,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}=30,$$

所以
$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{20}{10}=2,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{30}{10}=3.$$

二、三阶行列式

我们用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为三阶行列式,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1.6)$$

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则;图 1.2 中有三条实线看作是平行于主对角线的连线,三条虚对角线看作是平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积冠以正号,虚线上三元素的乘积冠以负号.

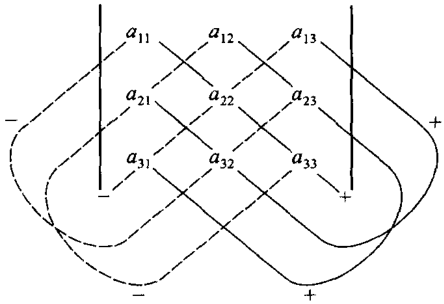

图 1.2

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$D=1\times0\times5+(-4)\times(-3)\times(-2)+2\times3\times4-2\times0\times(-2)-(-4)\times3\times5-1\times(-3)\times4=72.$$

例 3 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

解 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-1$,故 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 当且仅当 $a^2-1>0$,即 $|a|>1$,因此可得,$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是 $|a|>1$.

§1.2 n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，我们需要先引进排列和逆序数的概念.

一、排列和逆序

定义 1.1 由 n 个不同自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，称为一个 **n 级排列**.

例如，2431 和 45213 分别为 4 级排列和 5 级排列. 显然，由 1,2,3 这 3 个数字所构成的不同的 3 级排列共有 $3!=6$ 个，它们分别为 123,132,213,231,312,321.

不难看出，n 级排列共有 $n!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)n$ 种.

定义 1.2 在一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面 $(i_t>i_s)$，则称 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**；一个 n 级排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如，在 4 级排列 1324 中，只构成 1 个逆序，即 32，故 $\tau(1324)=1$；5 级排列 31542 中，共构成 5 个逆序，即 31,32,54, 52 和 42，故 $\tau(31542)=5$.

我们称 n 级排列 $12\cdots n$ 为**自然顺序排列**（简称**自然排列**），容易看出自然顺序排列的逆序数为 0.

例 1 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

解 $\tau(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 1.3 在一个排列中，若它的逆序数为奇数，则称这个排列为**奇排列**；若它的逆序数为偶数，则称这个排列为**偶排列**. 我们规定，当逆序数为 0 时，它是偶排列.

例如，$\tau(31542)=5$，故 31542 为奇排列；$\tau(12345)=0$，故 12345 为偶排列.

在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果仅将它的两个数字 i_s 与 i_t 对调位置，得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这一变换称为一个对换. 如排列 1423 经过对换(4,3)后得到排列 1324. 不难发现，每经一次对换排列的奇偶性就会改变.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后排列的奇偶性改变. 即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证 先证对换相邻两个数的情形.

设排列为

$$a_1a_2\cdots a_jabb_1b_2\cdots b_k,$$

经过对换(a,b)后变为排列

$$a_1a_2\cdots a_jbab_1b_2\cdots b_k,$$

比较上面两个排列中的逆序,因只改变了 a 与 b 的次序,当 $a<b$ 时新排列比原排列增加一个逆序,当 $a>b$ 时新排列比原排列减少一个逆序.因此,对换前后它们的奇偶性相反.

再证一般情形.

设排列为

$$a_1a_2\cdots a_jai_1i_2\cdots i_sbb_1b_2\cdots b_k,$$

经过对换(a,b)后变为排列

$$a_1a_2\cdots a_jbi_1i_2\cdots i_sab_1b_2\cdots b_k,$$

新排列可以由原排列中将 a 依次与 $i_1i_2\cdots i_s$ 和 b 共作 $s+1$ 次相邻对换得到排列

$$a_1a_2\cdots a_ji_1i_2\cdots i_sbab_1b_2\cdots b_k.$$

再将 b 依次与 $i_1i_2\cdots i_s$ 共作 s 次相邻对换得到.也就是说,新排列可以由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到,而 $2s+1$ 是奇数,再由前面的结论可知,新排列与原排列的奇偶性相反.

推论 全部 n 级排列中,奇、偶排列各半,均为$\frac{n!}{2}$个.

定理 1.2 任意一个 n 级排列都可以经过有限次对换变成自然排列 $123\cdots n$,并且所作对换的次数与这个 n 级排列的奇偶性相同.

证明从略.

二、n 阶行列式的定义

为了作出 n 阶行列式的定义,我们先来研究三阶行列式的结构.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

由三阶行列式的展开式,可归纳出如下规律.

(1) 三阶行列式的每一项都是三个元素的乘积,它们分别位于不同的行和不同的列. 如果不考虑各项前面的符号,每一项中各元素都可以写成第一个下标是自然顺序排列,第二个下标是任意排列. 如,三阶行列式的每一项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,由于 $j_1\ j_2\ j_3$ 是三级排列,因此,三阶行列式共有3! 项.

(2) 行列式的展开式中每一项前面都有符号, 其中正号项和负号项各半. 当每项中各元素的第一个下标按自然顺序排列,而第二个下标是偶排列时,该项取正号,是奇排列时该项取负号.

根据以上分析,三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有的三级排列求和.

对三阶行列式的这些分析, 我们很容易将上述规律推广到 n 阶行列式情形, 得出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**. 并规定它等于 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,即 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1},a_{1j_1}\cdots a_{1j_1},$$

其中 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 为 n 级排列, $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

规定一阶行列式 $|a|=a$. 上述行列式有时简记为 $\det(a_{ij})$,或记为 D.

例如,四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{1j_2}a_{1j_3}a_{1j_4}$$

所表示的代数和中共有4! 项.如其中 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$行标排列为1234,元素取自不同的行,列标排列为1234,元素取自不同的列,并且逆序数 $\tau(1234)=0$,即乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$前面应冠以正号,又如 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$行标排列为1234,元素取自不同的行;列标为4312,元素取自不同的列,且逆序数 $\tau(4312)=5$,即4312为奇排列,所以乘积 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$前面应冠以负号.

例2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=1\times2\times3\times4=24.$

例3 证明 n 阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}=d_1d_2\cdots d_n;$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}d_1d_2\cdots d_n.$ (1.7)

证 (1)是显然的,下面只证(2).

若记 $d_i=a_{i,n-i+1}$,则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1 d_2 \cdots d_n.$$

形如(1.7)式(1)左端的行列式称为**对角形行列式**(或简称**对角行列式**),对角形行列式可简记为

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix}.$$

主对角线以下的元素都为0的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**上三角形行列式**;主对角线以上的元素都为0的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**下三角形行列式**.

例4　计算三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

解　n 阶行列式共有 $n!$ 项,由于下三角形行列式 D 中有很多元素为零,所以 D 的这 $n!$ 项中,必有很多项为零,因此我们仅考查有哪些项不为零即可.

记一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

一般项中第一个元素取自第一行，但第一行中只有 a_{11} 可能不为零，因而 $j_1=1$，即 D 中只有含 a_{11} 的那些项可能不为零，其他项均为零；一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行，第二行中仅有 a_{21} 和 a_{22} 可能不为零，因第一个元素已取自第一列，因此，第二个元素不能再取自第一列，即不能取 a_{21}，所以第二个元素只能取 a_{22}，从而 $j_2=2$，即 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的那些项可能不为零，其他各项均为零；依此类推，可得 $j_3=3, j_4=4, \cdots, j_n=n$. 因此，$D$ 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项可能不为零，其他项均为零. 由于 $\tau(1\quad 2\quad \cdots\quad n)=0$. 因此，这一项应取正号，于是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即下三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积.

用类似的方法可以证明，上三角形行列式的值也等于主对角线上各元素的乘积.

例 5 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求 x^3 的系数.

解 由 n 阶行列式定义，$f(x)$ 是一个 x 的多项式函数，且最高次幂为 x^3. 显然含 x^3 的项有两项：$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 与 $(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$，即 x^3 与 $-2x^3$.

所以，$f(x)$ 中 x^3 的系数为 -1.

定理 1.3 n 阶行列式的一般项可以写为

$$(-1)^{m+l}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列，m 和 l 分别为排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

***证** 在乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中，交换任意两个元素的位置，那么两个下标所对应的 n 级排列也同时作变换，行标所对应的排列和列标所对应的排列将同时改变奇偶性，于是和 $m+l$ 的奇偶性不变. 我们总可以经过有限次对换两个元素