500 World Famous Reader Solved Mathematics Problems

500个世界著名数学征解问题

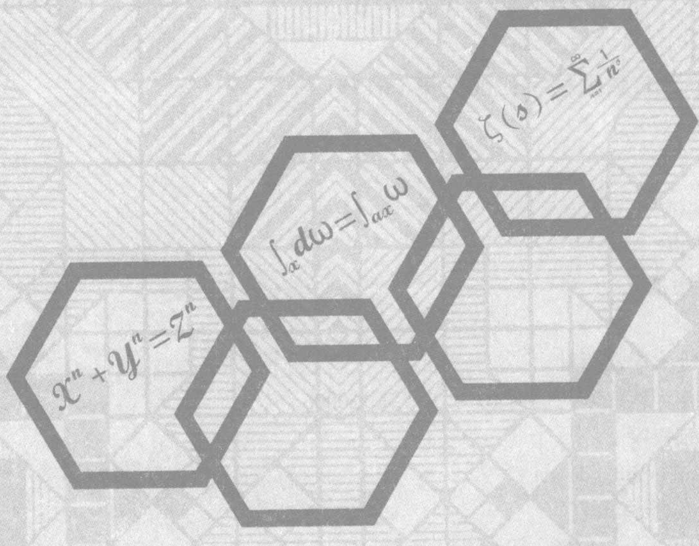
◎ 冯贝叶　编译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

500 WORLD FAMOUS READER SOLVED MATHEMATICS PROBLEMS

500个世界著名数学征解问题

冯贝叶 编译



HITP 哈爾濱工業大學出版社

内容简介

全书共分5章,涵盖了代数问题、几何问题、高等代数问题、初等数论问题、高等数学问题等内容,每章均包含了数例典型征解问题及解答。该书适合数学奥林匹克选手、教练员使用,也适合于大中院校师生及数学爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

500个世界著名数学征解问题/冯贝叶编译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.4

ISBN 978-7-5603-2900-0

Ⅰ.5… Ⅱ.冯… Ⅲ.数学问题 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第061751号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 李广鑫
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张25 字数458千字
版　　次 2009年5月第1版 2009年5月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2900-0
印　　数 1~3 000册
定　　价 48.00元

前言

这是一本献给数学爱好者的课外参考书，其内容包括了代数、几何、高等代数、初等数论和高等数学五方面的500余道各式各样的问题和解答（本来是计划选500题的，然而选到500题时，已看到2000年，于是索性将现有的刊物看完，共得578道题）．这些问题基本上是根据1956—2006《美国数学月刊》、《数学杂志》等刊物中的问题与解答专栏编写的，其中也有一些问题是根据杂志中的文章的内容编写的，个别问题则是编选者自己编写的．在每道题目后面的括弧中都注明了这道题原来在《美国数学月刊》、《数学杂志》（缩写分别为AMM和MM）中的题号或编选者据以改编的文章．《美国数学月刊》和《数学杂志》也刊登历年以来的《普特南数学竞赛题及解答》，这其中也有不少值得收入的好题，但是由于哈尔滨工业大学出版社已另辑单本出版，所以本书未选收其中的题目．

《美国数学月刊》和《数学杂志》都是世界上著名的杂志，目前国内还没有同样性质的刊物．几十年来，它们刊登了大量饶有兴趣、紧跟时代发展的数学文章和问题．这些文章的深度大多可被具有高中至大学程度的读者所理解，且又与当时科学界所关心的热点和前沿问题有关，所以对一般读者起了普及和鸟瞰作用．例如在19世纪30年代，一种俄罗斯十五方块游戏曾经风靡美国，《美国数学月刊》就曾专门刊登文章探讨其数学原理，到了19世纪七八十年代，混沌的研究又在数学物理界掀起了热潮，这时《美国数学月刊》又刊登过李天岩的《周期3蕴含混沌》的著名文章，至今仍是混沌研究中的一篇重要文献．而《数学杂志》也刊登了好几篇有关周期3窗口的发生参数和消失参数方面的文

章.再比如,数学历史上曾有过许多非常著名的结果——代数基本定理、把整数表示为平方和的定理、常微分方程的解对初值和参数的连续性定理等,这些结果当时发表时的证明一般都是比较专业,难以为一般读者所理解的,而《美国数学月刊》和《数学杂志》又不断地发表对这些老的著名结果的简单的、容易理解的新的证明.这就不难理解为什么《美国数学月刊》和《数学杂志》几十年来一直是极受读者欢迎的刊物了.然而由于内容繁多以及语言障碍,因此很有必要针对中国读者的需要,从中精选部分内容结为专辑以飨读者.

本书是给数学爱好者阅读的课外读物,它既不能代替基础训练,也不是专门为了考大学或研究生而编写的.所以对那些带着寻找敲门砖的目的而阅读本书的人来说,这本书肯定是会使他们失望的.但是另一方面,世界上的事情有时就是很奇妙的,所谓"有意种花花不活,无心栽柳柳成荫".如果你认真钻研过本书,那也真说不准在数学竞赛、高考、考研中会得到意想不到的好处.

那么什么人可以算是适合阅读本书的数学爱好者呢?这使我想到《一千零一夜》中的一个故事.其内容大意是说古代埃及有一个王子,生活过得十分优越,但是他又感到十分无聊,就决定四处游访,见识一下外面的世界.有一次,他来到一个寺院,发现寺院里的僧人的左眼都是瞎的,但是对他十分友好,拿出好吃的水果和吃食招待他,并邀请他在寺院里多住几日,与他们一起欣赏寺院的风景并互相讲各人的见闻,一起讨论问题.结果这个王子在寺院里住了一段时间后就发现,每月有一天,院里的僧人就用锅灰把脸抹黑,不吃不喝,号啕大哭,过了这一天,又一切正常.他就感到很奇怪,但是他问了好几次,那些僧人都不告诉他,并且劝他不要再问,否则这美好的日子就要过到头了.但是这样一来,越发增加了王子的好奇心,在他的一再追问下,那些僧人生气了,对他说,既然你不听我们的劝告,你就等着倒霉吧.到了第二天,这些僧人用一张牛皮把他裹起来,并交给他一把刀,又在牛皮上涂了一些羊血.然后就把他扔到一个峡谷中.过了一会儿,就听见一阵呼呼的声音,他从缝隙中看见一只大鹏飞来,叼着他飞到了一个极高的悬崖之上.这时他用尖刀将牛皮割开,从牛皮中钻了出来,并挥刀把大鹏吓跑.等他放眼四看,就发现不远处有一座金碧辉煌的宫殿,就在他不知所措之时,从宫殿中跑出来30个月儿般美丽的姑娘,她们头上都戴着漂亮的花环,一齐对他说:"欢迎你,尊贵的客人."这30个姑娘把他拥进宫中,陪着他嬉戏玩乐,过了一段美好的日子.然而忽然有一天,为首的姑娘含着眼泪对他说:"现在我们必须要分别一个月,这个宫殿里一共有31个门,这前30个门,你都可以打开,每个门打开后,里面的陈列、景物都够你玩赏一整天的,只是最后一道门,你不能打开.你如果能按照我们的话去做,等我们回来,我们将永远陪着你,过着幸福愉快的日子,否则我们将再也不能相见."王子郑重地向她们保证他会照做,她们才满眼泪水、依依不舍地走了.等姑娘们走后,王子按照她们的话,每天打开一道门,果然每天的日子不知不觉就过去了.到了最后一天,王子起先恪守诺言,没有去开那个门,但是最后,却实在克制不住好奇心,终于还是把那个门打开了,打开后,却发现,这是一个很小的房间,里面只有一匹木马和一盆水,王子仔细检查了木马后,又骑到马上,发现马头上有一个开关,他又好奇地扭动了那个开关,结果这一下坏事了,他发现木马动起来了,并且会说话,只见马尾巴沾了一下盆里的水,向他脸上一挥,就把他的左眼打瞎了,然后马就飞起来,飞到一个地方,对着他说,下去吧,倒霉的家伙,他就掉了下去,下来后,他发现,自己正好又落到那个寺院里,从此,他也加入了那些僧人的行列,成了他们之中的一员.

我讲这个故事的意思就是要告诉你,科学家就是那种宁愿瞎掉一只眼睛,也想知道那个

门后面是什么的人.同样也只有具有这样强烈的好奇心,你才有钻研数学的动力.因此我认为一个真正的数学爱好者需要具备三个条件.首先的条件是你对数学要有强烈的兴趣,这表现在喜好数学题材的读物,看见一个数学问题就摩拳擦掌,想试试看会不会做,如果做不出来,又十分想知道答案,甚至达到废寝忘食的程度,而且在经过自己的努力,解决了一个数学问题后,会感到十分愉快和兴奋.如果你有这种劲头,这第一个条件就具备了.古代迦太基大数学家阿基米得对国王交给他甄别金王冠中是否掺假的问题曾思考了很长时间都未能解决,有一次他正洗澡时,由于感受到水的浮力而想到可以利用浮力原理来解决这一问题,就兴奋得光着身子跑到大街上大喊"我想出来了,我想出来了".这就叫做和数学有缘分.并不是每个人都是和数学有缘分的.有一次我曾偶然经过附近的小学校,当时操场上上体育课的男生分成两队,其中一队有一个队员突然起脚,球应声进门,结果这一队的队员都兴奋得大喊"踢进去了,踢进去了".我也很为他们高兴.然而这时我又听到另一种声音,才注意到,操场边上还有几个女生也在说话,但是她们说的却是"踢进去就踢进去呗,那又怎么了",我想这几个女生是天生与足球运动无缘的.如果你在一道数学题做不出来后感到"做不出来就做不出来,那又怎么样",那我想你也恐怕是与数学无缘的.

其次是当你看到一个陌生或抽象的数学符号或表达式时,是否会感到头晕,从心里产生一种害怕的感觉?比如平常你解的方程都是关于 x 的一元一次方程或一元二次方程,结果在一次数学竞赛选拔考试中突然要你解方程

$$x^3 - [x] = 3$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,比如$[2.5] = 2$,$[-3] = -3$,$[-3.4] = -4$.你是感到害怕还是觉得这个问题有点意思啊,再比如说,你平常见到的都是等号、大于号、小于号这些符号,结果有一天你去新华书店翻书,发现一本书里有许多有意思的问题,但是又同时有很多地方有 $a \equiv 2 \pmod 3$ 这种符号,你是马上感觉这本书看不懂,还是觉得这个"$\equiv$"到底是什么意思,很想知道一下?还有,你平常见惯了$1 + 4 + \cdots + n^2$这种写法,如果有一天,你发现有的书上把这个式子写成$\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$的样子,或者还有像$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} f(i,j) = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} f(i,j)$这种式子,你是感到嗓子眼发干,实在不想看下去,还是想继续看下去,搞清楚这是什么意思,并且等你看懂后觉得这种写法挺省事,以后也想这样写.如果你对陌生、抽象的数学符号和表达式,不晕,不怕,敢于弄懂,并且见到一个数学问题后,不管是否能把它做出来,就先愿意在纸上划拉两道,摆弄摆弄,那么可以说你对数学有点感觉,已具备了数学爱好者的第二个条件.

最后,尽管你对数学很感兴趣,也有感觉,你还需思考一下,你是否在数学上确实有落在实处的记录以证明你确实有这方面的才能.再具体点来说,就是你在学校中数学作业和考试的成绩如何,是否在某种级别的数学竞赛中得过名次或至少参加过这种竞赛.如果你只是在口头上说或者自认为对数学很感兴趣,但是在学校里数学成绩却很糟糕,这个恐怕你应该承认,自己实际上还没能表现出这方面的能力.如果课本中的数学题目都不会做,或做起来很费劲,那恐怕这本书中的题目就更难看得懂了.也就是说,至少你已很熟练地掌握了数学课本中的内容(倒不一定表现在每次数学考试都能得100分),在学校里数学成绩还不错,课本里的题目做起来很轻松,那才可以考虑钻研一下这本书中的题目.

如果你对数学有兴趣,有感觉也有能力,那么我认为你是可以看这本书的,并且一辈子都会感到这是一本有价值的书.

现在我从这本书中抽出十个问题(题目后面第一个括弧中的号码是这道题在本书中的章号和题号,第二个括弧中注明了理解这道题目的解答所需要的文化程度),如果你对这些问题没有一点兴趣,那就不要看了.如果发现自己至少对一两个问题感兴趣,并且有想知道答案的欲望,那我建议你赶紧把这本书买下,只要能看懂一部分就可买下,其余不懂的部分买回去后慢慢看,我说过这本书是够你琢磨一辈子的,是可以终身陪伴你的一本书.老实说,如果一本书中的东西你都知道,都看得懂,那就没必要再看了,就是要有一些你一开始看不懂,看了后才懂,这本书才对你有价值.

1.用一个简单的法则来描述数列

$$1221121221221121122121121221121121221211\cdots$$

的构成规律,它的第 n 项是什么,这个数列是否是周期的?(1.3)(初中)

2.证明:$\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$.(1.26)(初中)

3.在等腰 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$.顶角 $\angle A=20°$,在 AB 边上取一点 D,使 $AD=BC$.求 $\angle BDC$ 的度数.(2.1)(初中)

4.(1)证明:不可能存在一个连续的保距映射 f,把球面上所有的点都映射到平面中去(即不可能把球面整体地展开成平面的一部分).(2.44(1))(初中)

5.设 $x_1,x_2,\cdots,x_{48}$ 是 $x^{49}=1$ 的不等于1的根,且

$$N=(1+x_1+x_1^4)(1+x_2+x_2^4)\cdots(1+x_{48}+x_{48}^4)$$

问是否可能成立 $N=83^3$?(3.42)(高中)

6.由计算可知 $\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{29}-\operatorname{cosec}\frac{10\pi}{29}=1.999\,989\,433\cdots$,证明:不可能存在正整数 j,k 和正奇数 n,使得 $\operatorname{cosec}\frac{j\pi}{n}-\operatorname{cosec}\frac{k\pi}{n}=2$.(3.43)(高中或大学)

7.证明:对所有 $n\geqslant 0$,成立

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]$$

(4.35)(高中)

8.设 $a_0=4,a_1=a_2=0,a_3=3,a_{n+4}=a_{n+1}+a_n$.证明:如果 p 是一个素数,则 $p\mid a_p$.(4.67)(高中或大学)

9.设 $0<x_0<\pi,x_{n+1}=\sin x_n$,证明:当 $n\to\infty$ 时,$\sqrt{n}x_n\to\sqrt{3}$.(5.66)(大学)

10.(1)设 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots$ 是严格递增的正整数.证明:如果存在整数 $r\geqslant 0$ 使得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^r}{a_k}$$

发散,则 $\xi=0.(a_1)(a_2)(a_3)\cdots$ 是一个无理数.

(2)设2,3,5,7,…是所有的素数组成的数列,证明:$\xi=0.235\,7\cdots$ 是无理数.

(3)设1,4,9,16,25,…是所有的完全平方数组成的数列,证明:$\xi=0.149\,162\,5\cdots$ 是无理数.(5.167)

有意思的题目还有很多,但限于篇幅,有些就只好割爱了.上面这些题目,很多都和一些历史上著名的问题或数学中重要的问题有联系.比如第2题是一个很著名的等式,称为山克斯(Thanks)等式,《美国数学月刊》曾刊登过一篇书评,在此书评中,评论者特意介绍了这一

等式,并且说明,这一等式可以从伽罗华理论得出.再比如第 4 题,来源于历史上的地图理论,现在很多数学爱好者都知道无论你怎么制图,都不可能把球面完全不失真地画在平面上,更确切一点说,不管你用什么方法在平面上制成一幅球面的地图,都不可能使地图上任意两点之间的距离恰好等于这两点所对应的球面上的两点之间的原来的真实距离.第 6 题完全是由研究工作中真实的计算所引出的一个问题.第 8 题也是和数论中很有名的课题素性判断有关联的问题,所谓素性判断就是给出一个法则以决定一个给定的数字是否是一个素数.这也是一个很有新闻价值的问题.报纸杂志上每隔一段时间就会出现又发现至今以来最大的素数的报导.这些数一般都是一种称为莫森尼素数的数.判断这种数是否是一个素数,就要用到一个叫做卢卡斯 – 莱赫默(Lucas-Lehmer)判据的定理以及依靠计算机强大的计算能力.第 9 题也是数学分析中一个很基础,也很重要的问题,那就是弄清一个无穷小量的阶,数学历史上很多有名的结果其实就是给出了一个无穷小量的阶或阶的估计.这道题如果改成求数列 $\{x_n\}$ 的极限那就容易多了,是大学数学分析课中常见的一道习题.恐怕中学生也可以做,但是可能要难一些,需要知道极限存在的魏尔斯特拉斯判据.不难得知这个极限就是零.但是第9题的形式就更难一些了.它实际上等价于要证明 $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$,也就是 x_n 和 $\sqrt{\frac{3}{n}}$ 等价的无穷小,这一结果当然蕴含 $\{x_n\}$ 的极限是零,所以是比后者更强的结果,那肯定也应该是难度更大的结果.如果粗略一点来说,也可以说成是 x_n 是$\sqrt{\frac{1}{n}}$ 级的无穷小,或者写成 $x_n = o\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$,也就是不管其中的常数了.关键是你一精确化,就会出来个$\sqrt{3}$ 的常数,这个常数是怎么和 $\sin x_n$ 这个东西联系起来的,好像一开始根本看不出来,这就有点意思了,你要解释为什么这个常数恰好是$\sqrt{3}$,恐怕就要知道 $\sin x$ 的泰勒(Taylor)展开式,所以就这么一个简单的大学生的数学分析习题,你一深入研究,就可以挖掘出一些越来越深入的问题.最后一个问题就是第 10 题也是和数学中很重要的一个问题有关的结果,这个问题就是要判断一个给定的实数是否是无理数,这个问题也不是那么容易的,现在还仍有人不断给出这方面的结果,另外有些著名的常数例如欧拉常数至今仍不能得知是否是无理数.这道题本身就是这方面的一个结果,虽然它很初等,但是又很有用,其中的(2),(3) 部分就是应用,这两个结果你要不用这个结果得出来,恐怕也不是很容易.

这些题目虽然大多和一些历史上著名的问题或数学中重要的问题有联系,但是选他们的着眼点却并不仅在此,如果只追求有名,那也有不少问题,例如黎曼假设、哥德巴赫问题、四色定理等.但是讲这些问题,恐怕就只能比较虚,要是实打实地讲,一是没有多少人能看得懂,二是即使讲了一大堆难而又难的东西,最后仍只能是一个未知数.而这里选的问题让人感兴趣之处就在于它是可以雅俗共赏的,而且有的问题之解答,给人以出奇制胜之感,绝对是你根本想不到的.下面举几个例子:

第 1 个例子是第 2 题,也就是我上面提到过的那个山克斯等式,按照刚才说过的那个书评,说是要用伽罗华理论才能得出来,这就有点吓人,这个伽罗华理论也是很有一点名气的,它可以用来解决一个代数方程的根是否可用根式表出,不少人可能也从科普书中听说过,但是具体如何实行和真正进行计算,恐怕懂得的人就不多了.但是这么一个初等的等式居然要用这么高深的理论才能得出,我总有点不太相信.后来和几个朋友研究了一下,发现只要你

有足够的耐心,细心计算一下也是可以得出来的.下面是一种证明方法,这个证法虽然不是最简单,但却是正常思维可以自然想到的.其路线是设

$$\alpha=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$$

$$\beta=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$$

然后

(1) 通过估计首先得出 α 和 β 的范围,具体一点就是说明 $\alpha>7,\beta>7$.

(2) 证明:α 和 β 满足一个同样的代数方程 $f(x)=0$.

(3) 证明:$f(x)=0$ 只有唯一的一个根符合 $x>7$ 的条件.

由此显然即可得出 $\alpha=\beta$ 的结论.这里最困难和吓人的一步是(2),因为为了要得出 α 和 β 所满足的代数方程,尤其是所满足的方程,你必须多次的平方,而搞得不好,那个根号还是去不掉.不过等你真的去算一下,你就会发现其中有两步恰好可以消掉好些东西,所以并没有当初想的那么可怕.下面是详细的证明:

(1) 我们有

$$\alpha=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}>\sqrt{4}+\sqrt{22+3}=2+5=7$$

又从 $2\sqrt{55-10\sqrt{29}}>1$ 以及 $10<2\sqrt{29}<11$,可以得出

$$\beta=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}>$$
$$\sqrt{11+10}+\sqrt{5+1}=\sqrt{21}+\sqrt{6}>7$$

(2)
$$\beta^2=11+2\sqrt{29}+16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}+$$
$$2\sqrt{(11+2\sqrt{29})(16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}})}$$

所以 $\beta^2-27-2\sqrt{55-10\sqrt{27}}=2\sqrt{60+10\sqrt{29}+2(11+2\sqrt{29})\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$

$$(\beta^2-27)^2-4(\beta^2-27)\sqrt{55-10\sqrt{29}}+4(55-10\sqrt{29})=$$
$$4(60+10\sqrt{29}+2(11+2\sqrt{29})\sqrt{55-10\sqrt{29}})$$
$$(\beta^2-27)^2-20-4(\beta^2-27)\sqrt{55-10\sqrt{29}}=$$
$$80\sqrt{29}+8(11+2\sqrt{29})\sqrt{55-10\sqrt{29}}$$
$$(\beta^4-54\beta^2+709)-80\sqrt{29}=4(\beta^2-5+4\sqrt{29})\sqrt{55-10\sqrt{29}}$$
$$(\beta^4-54\beta^2+709)^2-160(\beta^4-54\beta^2+709)\sqrt{29}+185\ 600=$$
$$16(\beta^2-5+4\sqrt{29})^2(55-10\sqrt{29})=$$
$$16(55\beta^4-2\ 870\beta^2+38\ 495)-160(\beta^4-54\beta^2+709)\sqrt{29}$$

算到这,你可以发现,式子里的根号已经可以消去了,因此,原则上,我们已经算是求出了 β 所满足的整系数代数方程,剩下的事只不过是化简一下,其实,我们甚至都不用再化简,只须知道 β 所满足的是一个 8 次方程就够了,但这是后话.第一次算时,还是老老实实算一下.

$$((\beta^4-54\beta^2+269)+440)^2+185\ 600=16(55\beta^4-2\ 870\beta^2+38\ 495)$$
$$(\beta^4-54\beta^2+269)^2+880(\beta^4-54\beta^2+269)+440^2+185\ 600=$$

$$880\beta^4 - 45\,920\beta^2 + 615\,920$$

算到这,你又可以发现,我们现在又可以消去好些东西

$$(\beta^4 - 54\beta^2 + 269)^2 - 1\,600\beta^2 = 0$$

由此就可以得出 β 满足一个整系数代数方程 $f(x) = 0$,其中

$$f(x) = f_1(x)f_2(x)$$

$$f_1(x) = x^4 - 54x^2 - 40x + 269$$

$$f_2(x) = x^4 - 54x^2 + 40x + 269$$

同时易证 α 满足整系数代数方程 $f_1(x) = 0$,当然也是 $f(x) = 0$ 的根.

(3) 由

$$f_1(-7) = 304, f_1(-6) = -139$$

$$f_1(-3) = -16, f_1(-2) = 149$$

$$f_1(1) = 176, f_1(2) = -11$$

$$f_1(7) = -256, f_1(8) = 587$$

可知 $f_1(x)$ 共有 4 个根 $-7 < x_1 < -6$, $-3 < x_2 < -2$, $1 < x_3 < 2$, $7 < x_4 < 8$. 易证 $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$, $-x_4$ 是 $f_2(x)$ 的根,而

$$-8 < -x_4 < -7,\ -2 < -x_3 < -1,\ 2 < -x_2 < 3,\ 6 < -x_1 < 7$$

由于 $f(x)$ 是一个 8 次方程,因此上述这 8 个根就是 $f(x)$ 的所有的根,因而其符合条件 $x > 7$ 的根是唯一的.

由(1),(2),(3)三点就可得出 $\alpha = \beta = x_4$.

因此现在我们已经知道,要证明这个山克斯等式,是根本不需要用到什么伽罗华理论的(但是或许伽罗华理论是发现这一等式的一个来源). 但是你可能根本想不到,后来《美国数学月刊》又发表了一篇文章,内容是要证明这个等式,还有更简单的方法,只须用到最简单的乘法公式和

仅仅四行式子

就可证明. 答案就在这本书中. 当然,答案一经揭穿,也就不稀奇了,但是,在你知道答案并且感到不稀奇之后,是否想过在知道答案之前检验一下自己是否有这个眼力?这是比马后炮似的不稀奇更值得深思的问题.

第 2 个例子是上面的第 3 题(这道题并不是从《美国数学月刊》上选出的,是我弟弟问我的一个问题,但是我觉得这道题也很有意思,所以也把它收入了),这绝对不能算是一道难题,凡是学过解三角形的人肯定都能把他鼓捣出来,不信你可以拿这个问题去问理工科大学生或中学的数学老师,以及数学物理方面的科研工作者,都应该能做出来的,而且解法不止一种. 下面是一种解法,当然用这种解法你需要能熟练地记忆和运用各种三角公式,例如倍角公式、积化和差、和差化积公式等.

设 $BC = a$, $AB = AC = b$, $\angle BDC = \theta$,那么在 $\triangle ABC$ 中由正弦公式就有

$$\frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{b}{\sin 80^\circ}$$

因此有

$$b = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}a$$

而
$$BD=b-a=\left(\frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}-1\right)a=\left(\frac{\sin(20^\circ+60^\circ)}{\sin 20^\circ}-1\right)a=$$
$$\frac{\sin(60^\circ-20^\circ)}{\sin 20^\circ}a=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}a=2a\cos 20^\circ$$

在 $\triangle BCD$ 中再由余弦公式可得
$$CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos 80^\circ=(4\cos^2 20^\circ+1-4\cos 20^\circ\cos 80^\circ)a^2=$$
$$(2(1+\cos 40^\circ)+1-2(\cos 100^\circ+\cos 60^\circ))a^2=$$
$$(2+2(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ))a^2=(2+4\cos 20^\circ\cos 60^\circ)a^2=$$
$$2(1+\cos 20^\circ)a^2=4a^2\cos^2 10^\circ=4a^2\sin^2 80^\circ$$

因此
$$CD=2a\sin 80^\circ$$

在 $\triangle BCD$ 中,再由正弦公式可得
$$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{CD}{\sin 80^\circ}=\frac{2a\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}=2a$$

这就得出 $\sin\theta=\frac{1}{2}$,而 $\angle BDC=\theta=30^\circ$.

但是我告诉你,解这道题其实根本不必用到什么正弦公式、余弦公式以及一大堆各种各样的三角公式,而只须用到初中课程中所学到的最基本的三角知识即可.不知你相信不相信,你自己可以先试一试,在本书中有这个答案.不过虽然这个答案的确是非常简单的,但是我认为上面给出的解答仍旧是有价值的,因为它有一般性,可以适用于 $\triangle ABC$ 的顶角不是 20°,而是任意角 α 的一般情况.

说到这,我想插一句题外话.就是一旦你知道了这个答案是 30°,那这个问题就可能变得容易了,因为知道了最终的答案和不知道这个答案是大不一样的,对于知道了答案的人,他的主要精力就不用放在探索最后的解答是什么形式方面了,而是放在往那个答案上凑,而且这个凑不是瞎凑,是有目标的.这就好多了,这也是科研工作和做习题的最重要的差别.有些习题也可以很难,但是再难,它也是一个已经解决了的问题,而科研工作的特点是你事先无法知道这个问题是否能解决,这里的风险是如果你企图解决一个错误的猜想,那可能你耗费了无数心血之后,发现自己是在白干.也正因为这个原因,科研人员在自己的成果正式公布之前,一般是不愿意透漏给同行知道的,因为在得知了你的成果之后,其他的人就也可能做出来而抢先发表这一成果.

第3个例子是第4题,上面已经说过有不少数学爱好者都是知道不可能把球面完全不失真地画在平面上这个事情的,但是大多数人只是限于知道而已,却并不知道如何证明这一点,而且在很多人的心目中,要理解这件事情是需要用到例如微分几何那样比较高深的数学知识的,其实完全不是这样,看了本书之后你就会知道,要理解这件事情,只须用到最简单的初中几何知识就已足矣.这里选的只是书中题目的第一问,第二问是要证明即使是球面上的任意一个小的区域也不可能完全不失真地画在平面上.这就比第一问更难一些,但是要证明这件事情,也仅需要用到大学一年级的微积分学知识.

最后,我想提醒读者注意一下第5题,这道题原来的解答在我看来都是不能令人满意的,不是不够严格就是太过高深,目前的这个解答是我根据原解答中一个未给出证明的命题,请我的好友王国义先生给出的,这个解答我认为既足够巧妙又不难理解,其中最关键的一步是设

$$P(x) = (1 + x + x^4)\cdots(1 + x^{48} + x^{192})$$

然后去证明

$$N \equiv P(1)(\bmod 7)$$

这个证明当然是很巧妙，同时也很有基本技巧．但是更值得思考的问题是你如何会想到要去证明这个命题．这个即使有答案，书上一般都是不会说的，但是其实这正是最关键之处．假使你想不到这一点，那即使你有再高的本事，不知道往哪使劲也没有用．据原解答者称，他是通过计算发现了一批这种关系．所以看一本书，不仅要看到书中的内容，还有很多之外的东西需要你自己去体会．

其他有意思的可圈可点的材料还有很多，限于篇幅，这里无法一一列举．但是仅通过这几个随手摘出的例子，就足可以看出这本书中有趣的题目和巧妙的解法是很多的．我相信每一位数学爱好者都可从中发现自己感兴趣的问题．

下面，我想谈一下如何去读这本书．概括地说，我认为可以用

知，懂，熟，用，赏

五个阶段来形容．现在有很多“唐宋诗赏析”一类的书出版．其实不仅诗可以赏析，精彩有趣的数学问题也是可以赏析的，然而不管你赏的是唐诗也好，数学问题也好，都是首先要知道，赏的是些什么东西，连对象都不清楚，那就根本无从赏起了．所以看这本书的第一阶段是先把书中所有的问题起码看三遍．第一遍是浏览，先知道书中大概有些什么问题，心中有个印象；第二遍是细读和筛选，这一遍读时，可以把自己感兴趣的问题圈出来，把这些问题的条件和结论弄清楚，尤其是有些条件的细微差别就可能导致解答的难度大不相同；第三遍再读就是要一边读，一边手里拿着纸和笔不时地要动一动手，只有通过你自己动手，才能体会到这个题目是否困难，是否有趣．这个阶段最好长一些，甚至弄个一年半载的也可以，因为这本书不是供你速成的敲门砖，而是供你细细琢磨的艺术品．而且有些问题就是这样，当你想不出来时，不妨先放一下，过一段时间再想，可能就会“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”了．你能不能反复地去思考一个数学问题，其实也是检验你是否真的对数学感兴趣的一个试金石．在有些文艺作品中，经常把数学家描写成十分冷漠的人，我认为这完全是一种误解．一个真正对数学感兴趣的人，当他投入到对问题的思考中时，会产生极大的热情和调动自身极大的能量，乃至茶饭无味，夜不能寐．而且在没有解决之前，会反复思考这一问题．

第二阶段就是“懂”，也就是把你感兴趣的问题彻底弄懂，有些问题经过你反复想，如果仍无所获，而你又实在想知道怎么做，那这时便不妨参考一下解答．本书虽然提供了解答，但不要以为，一看解答即可解决．这个解答也是要根据你自己的程度来用的．有些知识，解答者认为是众所周知的或很基本的，但是你可能还不知道或熟悉，这时，就需要你自己先找一些有关的教材、参考书来补一补课，这本书也只有这样读才有价值．也就是说，如果你读这本书只是孤立地自以为弄懂了几道题，那就价值不大，只有通过读这本书，带动你把以前不知道或不熟悉的基本知识系统地学会弄懂，你才有了真正的收获．另外，即使解答中所用到的知识你都知道，有些解答的思路、逻辑可能也不是一次就能弄懂的，需要你多看几次才能理清．

第三阶段就是“熟”，就是在弄懂的基础上把问题及其解答弄得熟而又熟．要检验你是否弄熟了，不妨找一两个同道，给他们讲一下这个问题如何解答，让他们给你提问题，告诉你哪听不懂．经过这么一弄，你才会发现自己是否真正弄懂了弄熟了这个问题．这就像研究生准

备答辩一样,只有通过答辩之前的在讨论班上的预先报告和听讲人的质疑,才会发现自己的不清楚之处.据我所知,有的导师在让他的研究生正式答辩之前,曾让他的研究生预先报告了多达三十多次.为什么一定要弄熟呢,因为只有把一个问题弄熟了,这个解题的思路、方法及有关的知识才真正是你自己的.俗话说"熟能生巧",又有"熟读唐诗三百首,不会做诗也会吟"之说,是有一定道理的.从心理学角度和认知过程方面来说,也可对此作出解释.因为当你把一个问题想得熟而又熟,清而又清之时,你的思维焦点以及注意力便不会被那些初级的技巧和手段所干扰,而会集中到问题的实质方面.这样,你的思考便是高质量的,这也可以解释为什么有的人会"顿悟"或突然间"茅塞顿开",甚至在睡梦中突然醒悟.原因就在于在此之前,他已思考了很久,把一切次要问题都想清了,而只剩下一个最后的突破口还未找到,此时,一旦找到了这个突破口,问题便会迎刃而解.相反,假如一个人连所要用到的概念和公式都尚未弄清时,你怎么能指望他去研究那些更高级更根本的问题和方法呢?所以,一定要熟,只有熟了,才能谈其他,才能往下走.

第四阶段便是"用"了,学以致用,熟以致用.经过前三个阶段,如果你能用你所学,独立解决新的问题甚至发表一两个成果,那便是你的学习已开始开花结果了.如能达此境界,我愿衷心对你表示祝贺,同时由衷地感到欣慰.但是这是比较高的要求了,一般读者能过前三关也就算是到此一游了,不必对自己苛求.

最后当你过五关,斩六将,看完这本书后,即可进入"赏"的阶段,或将你认为最有体会,最得意的题目不时拿出来揣摩回味一番,或提出一两个问题与朋友同道互相切磋,都会体会到赏析的愉快.美酒佳肴、艺术珍品、巧题妙题、好句佳联都是需要反复琢磨、反复体味才能越加觉出其美、其佳、其妙、其巧的,仅尝一次不足以品其真味,所以需要反复品尝,才能感受到新的体会带来的舒爽之感.而正因为最后你能进入"品"和"赏"的阶段,所以这本书也才有值得你收藏一辈子的价值.

最后,我祝你身心健康愉快,开卷有益.愿此书能伴你终生,成为你的良师益友,那便也是作者最大的愉快了,也热盼读者有任何意见和建议告知作者,可发电子邮件至 fby@amss.ac.cn.

作　者

2008年底于北京大学燕园6公寓

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007－09	38.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007－09	48.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007－09	42.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007－09	38.00
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008－01	28.00
新编平面解析几何解题方法全书	即将出版	28.00
数学眼光透视	2008－01	38.00
数学思想领悟	2008－01	38.00
数学应用展观	2008－01	38.00
数学建模导引	2008－01	28.00
数学方法溯源	2008－01	38.00
数学史话览胜	2008－01	28.00
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007－10	48.00
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008－01	48.00
从哥德巴赫到陈景润	2008－05	98.00
从庞加莱到佩雷尔曼	即将出版	88.00
天庭的秩序——三体问题的历史	即将出版	88.00
空间想象力的发展	即将出版	48.00
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)	2006－12	68.00
平面几何证明方法全书	2007－08	35.00
平面几何证明方法全书习题解答	2006－12	18.00
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007－09	38.00
初等数学复习及研究(平面几何)	2008－09	58.00
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009－01	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009－06	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2009－08	48.00
几何变换与几何证题	即将出版	68.00
500 个世界著名几何名题及 1000 个著名几何定理	即将出版	78.00
三角形的五心	即将出版	28.00
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006－05	58.00
历届 CMO 试题集	2008－09	28.00
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007－03	28.00

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录

书　名	出版时间	定　价
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009－03	88.00
历届俄罗斯大学生数学竞赛试题及解答	即将出版	68.00
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006－05	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008－01	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008－07	58.00
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	即将出版	58.00
500个最新世界著名数学智力趣题	2008－05	48.00
400个最新世界著名数学最值问题	2008－09	48.00
500个世界著名数学征解问题	2009－05	48.00
400个最佳数学征解老问题	即将出版	48.00
初等数论难题集(第一卷)	2009－05	68.00
初等数论难题集(第二卷)	即将出版	98.00
组合数学难题集	即将出版	38.00
数学 我爱你	2008－01	28.00
博弈论精粹	2008－03	58.00
精神的圣徒　别样的人生——60位中国数学家成长的历程	2008－09	48.00
数学史概论	即将出版	78.00
多项式和无理数	2008－01	68.00
模糊数据统计学	2008－03	48.00
解析不等式新论	即将出版	68.00
数学奥林匹克不等式研究	即将出版	68.00
初等数学研究(Ⅰ)	2008－09	68.00
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009－05	118.00
中国初等数学研究	2009－05	20.00
数学奥林匹克超级题库(初中卷)	即将出版	88.00
中等数学英语阅读文选	2006－12	38.00
统计学专业英语	2007－03	28.00
中考数学专题总复习	2007－04	28.00

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
邮　　编:150006
联系电话:0451－86281378　　13904613167
E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

⊙目录

第1章　代数问题

(AMM E1461)[①]

1. 根据下面的加法算式确定式中各个字母的值：

$$
\begin{array}{r}
FIFTY \\
FOUR \\
FOUR \\
+\quad TWO \\
\hline
SIXTY
\end{array}
$$

此外别忘了 $FOUR+12$ 是一个完全平方数.

解法1　用 θ 代替字母 O. 由于 $S>F\neq 9$，因此 F 是4或5，同时 $S=F+1$. 由于 $2R+\theta=10$ 或 20，因而 $F\theta UR(=n^2-12)$ 只可能是4 612. 那样 $S=5$ 并且 $W=10-2U-1=7$. 现在 $F+2\theta+T+1=X+20$，$T=X+3$，并且有 $X=0$，$T=3$. 最后 $(I,Y)=(8,9)$ 或 $(9,8)$. 因此最后有两组都是对的加法式，即

$$48\ 439+4\ 612+4\ 612+376=58\ 039$$

$$49\ 438+4\ 612+4\ 612+376=59\ 038$$

解法2　我们有以下(模为10)的同余式

$$F+R+O\equiv \text{zero} \tag{①}$$

$$U+U+W+(1,2,\text{or }3)\equiv \text{zero} \tag{②}$$

$$F+O+O+T+(1,2,\text{or }3)\equiv X \tag{③}$$

$$F+F+(1,2,\text{or }3)\equiv \text{zero} \tag{④}$$

方程

$$F+(1\text{ or }2)=S \tag{⑤}$$

和

$$FOUR+12\text{ 是一个完全平方数} \tag{⑥}$$

现在④说明 $F=4$ 或9；⑤说明 $F=4$，$S=5$；⑥给出(通过完全平方检验) $FOUR$ 是4 612；②现在给出 $W=7$；③导出 $T=3$，$X=\text{zero}$，最后 I 和 Y 不是唯一确定的，它们中每一个既可能是8也可能是9.

① AMM是《美国数学月刊》的缩写，AMM E1461代表此题在《美国数学月刊》中原来的编号.