教育部高校学生司审定

高等数学(二)

全国各类成人高校统一招生考试辅导教材

2005—2006 专升本

中国成人教育协会
成人高校招生专业委员会组织编写

白山出版社
Bai shan chu ban she

2005—2006年度全国各类成人高校统一招生考试辅导教材(专升本)

高等数学(二)

中国成人教育协会成人高校招生专业委员会组织编写

主　编　杨淑辉　王　娜

白　山　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)/杨淑辉,王娜主编;中国成人教育协会成人高校招生专业委员会组织编写.-沈阳:白山出版社,2005.2
2005-2006年度全国各类成人高校统一招生考试辅导教材.专升本
ISBN 7-80687-243-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①杨… ②王… ③中… Ⅲ.高数(二)-成人教育:高等教育-升学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 012011 号

出版发行	白山出版社
地　　址	沈阳市沈河区二纬路 23 号
邮　　编	110013
电　　话	024-23065667
责任编辑	朱忠义
特聘编辑	王　鹏　王学忠
封面设计	邵　阳
责任校对	李红蕾
印　　刷	沈阳市第二印刷厂
开　　本	787×1092 毫米　1/16
印　　张	13 1/2
字　　数	250 千字
版　　次	2005 年 2 月第 1 版
出版时间	2005 年 2 月第 1 次印刷
印　　数	10000 册
书　　号	ISBN 7-80687-243-4/G·36
定　　价	19.80 元

2005—2006年度
全国各类成人高校统一招生考试辅导教材(专升本)
编　委　会

出 版 前 言

中国成人教育协会成人高校招生专业委员会依据国家教育部最新颁布的《2005—2006年度全国各类成人高校统一招生复习考试大纲》，组织一批具有多年成人高考辅导经验和较高专业水平且在当地考生中颇有声望的教师编写了《全国各类成人高校统一招生考试辅导教材》，由**教育部高校学生司审定**。

这套教材充分考虑了成人考生的特点，力求突出重点，条理清晰，在题型设计上，更加贴近考试实际。为了方便教师辅导和考生自学，每种教材的各章前都列出大纲相关要求，每章后附有自检自测习题。全书最后还附有2004年全国各类成人高校统一招生考试试卷及参考答案和2005—2006年度全国各类成人高校统一招生考试样题及参考答案。为了帮助考生取得优异成绩，编写教师**精心设计了五套模拟试卷及参考答案，随书赠送。**

中国成人教育协会成人高校招生专业委员会

2005年1月25日

2005—2006年度全国各类成人高校统一招生考试

高等数学(二)考试形式及试卷结构

试卷总分:150分

考试时间:150分钟

考试方式:闭卷,笔试

试卷内容比例(%)	
极限和连续	15
一元函数微分学	30
一元函数积分学	32
多元函数微分学	15
概率论初步	8
试卷题型比例(%)	
选择题	27
填空题	27
解答题	46
试题难易比例(%)	
容易题	30
中等难度题	50
较难题	20

目　录

第一章　极限和连续

复习考试内容

一、极限

1. 知识范围

(1)数列极限的概念和性质(数列,数列极限的定义,唯一性,有界性,四则运算法则,夹逼定理,单调有界数列极限存在定理).

(2)函数极限的概念和性质(函数在一点处极限的定义,左、右极限及其与极限的关系,x趋于无穷($x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$)时函数的极限,函数极限的几何意义,唯一性,四则运算法则夹逼定理).

(3)无穷小量与无穷大量(无穷小量与无穷大量的定义,无穷小量与无穷大量的关系,无穷小量的性质,无穷小量的阶).

(4)两个重要极限($\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{1}{n})^{n}=e$,$\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$).

2. 要求

(1)了解极限的概念(对极限定义中"$\varepsilon-N$"、"$\varepsilon-\delta$"、"$\varepsilon-M$"的描述不作要求). 掌握函数在一点处的左极限与右极限,以及函数在一点处极限存在的充分必要条件.

(2)了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则.

(3)理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系. 会运用等价无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价). 会运用等价无穷小量代换求极限.

(4)熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

二、连续

1. 知识范围

(1)函数连续的概念(函数在一点处连续的定义,左连续和右连续,函数在一点处连续的充分必要条件,函数的间断点)

(2)函数在一点处连续的性质(连续函数的四则运算,复合函数的连续性)

(3)闭区间上连续函数的性质(有界性定理,最大值与最小值定理,介值定理,零点定理).

(4)初等函数的连续性.

2. 要求

(1) 理解函数在一点处连续与间断的概念,理解函数在一点处连续与极限存在之间的关系,掌握判断函数(含分段函数)在一点处连续性的方法.

(2)会求函数的间断点.

(3)掌握在闭区间上连续函数的性质,会用它们证明一些简单命题.

(4)理解初等函数在其闭区间上的连续性,会利用函数连续性求极限.

第一节 极 限

极限概念是微积分的基础.导数和定积分的概念都是借助极限定义的.极限概念产生于微分学和积分学的基本问题:求面积、体积、弧长、瞬时速度以及曲线上一点的切线问题等.

一、数列的极限

1.数列的概念

定义1 以自然数为自变量的函数$y=f(n)$,当n依次取1,2,3,…时所得到的一列函数值

$$a_1=f(1),a_2=f(2),a_3=f(3),\cdots,a_n=f(n),\cdots$$

称为**无穷数列**,简称**数列**.数列中的各个数称为数列的项,$a_n=f(n)$称为数列的**通项**.该数列通常简记为$\{a_n\}$.

下面是几个数列的例子:

(1)$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$;

(2)$0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\cdots,1+\frac{(-1)^n}{n},\cdots$;

(3)$1,1,1,\cdots,1,\cdots$;

(4)$-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$;

(5)$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$.

2.数列极限的概念

定义2 如果n无限增大时,数列$\{a_n\}$的通项a_n无限趋近于常数a,则称该数列以a为**极限**,记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\text{或}a_n\to a(n\to\infty).$$

其中$n\to\infty$表示n无限增大,lim是limit(极限)的缩写,此时也称该数列**收敛**.

如果$n\to\infty$时,a_n不以任何常数为极限,则称数列$\{a_n\}$**发散**.

数列的收敛或发散的性质统称为数列的**敛散性**.

数列极限的几何意义是:将常数A和数列的每一项$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$依次用数轴上的点表示,若数列$\{a_n\}$以$A$为极限,就表示当$n$趋于无穷大时,点$a_n$可以无限靠近点$A$,即点$a_n$与点$A$之间的距离$|a_n-A|$趋于零.

例如,$a_n=\frac{n+(-1)^n}{n}$当$n\to\infty$时,$a_n\to1$,

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1$.

例1 数列$a_0,a_0q,a_0q^2,\cdots,a_0q^n,\cdots$称为等比数列,$q$是其公比.

若$a_0\neq0$,则有

$$\lim_{n\to\infty} a_0 q^n=\begin{cases}0, & |q|<1,\\ a_0, & q=1,\\ \text{不存在}, & |q|>1.\end{cases}$$

例2 数列$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$（　　）.

A. 发散　　B. 收敛于0　　C. 收敛于1　　D. 无法判断

答案 C

分析 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$所以该数列收敛于1. 因此应选C.

例3 数列$1,\frac{1}{2},-1,\frac{1}{3},1,\frac{1}{4},-1,\frac{1}{5},\cdots$（　　）.

A. 收敛于1　　B. 收敛于0　　C. 无法判断　　D. 发散

答案 D

分析 因为n无限增大时，该数列通项的极限不存在. 所以应选D.

3. 数列极限的性质

定理1（唯一性） 若数列$\{a_n\}$收敛，则其极限值必定唯一.

定理2（有界性） 若数列$\{a_n\}$收敛，则它必定有界.

注意这个定理反过来不一定成立. 也就是说，有界数列不一定收敛.

例如，$a_n=(-1)^{n+1}$是有界的，但a_n无极限. 当$n=2k+1(k=0,1,2,\cdots)$时，$a_n=1$. 当$n=2k(k=0,1,2,\cdots)$时，$a_n=-1$. 所以当$n\to\infty$时，a_n不趋于一个确定的常数，即$\{a_n\}$发散.

4. 数列极限的四则运算定理

定理3 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}[x_n\pm y_n]=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}[x_n\cdot y_n]=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty}y_n)=A\cdot B$;

(3)当$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B\neq0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{A}{B}$.

5. 数列极限存在准则

准则Ⅰ（夹逼定理） 如果数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

(1)$y_n\leq x_n\leq z_n(n=1,2,3,\cdots)$,

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$,

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

如果对于正数$M>0$，数列$\{a_n\}$满足$|a_n|<M(n\in N)$，则$\{a_n\}$称为**有界数列**. 如果一个数列既是单调的又是有界的，则称该函数为单调有界数列. 如数列$\{\frac{1}{n}\}$就是单调递减有界数列.

准则Ⅱ 单调有界数列必有极限.

二、函数的极限

1. 当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限

定义3 如果当x无限地趋近于x_0时，函数$f(x)$无限地趋近于一个确定的常数A，则称当$x\to$

x_0时，函数$f(x)$的**极限为A**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0)$$

如果当x从x_0的左边（或右边）无限地趋近于x_0时，函数$f(x)$无限地趋近于一个确定的常数A，则称当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的**左（或右）极限为A**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0-0)=A\ (\text{或}\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0+0)=A\ ).$$

关于函数的极限与左、右极限的关系有：

定理4　函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是左极限和右极限存在且相等.

由定理4可知，如果左极限和右极限至少有一个不存在，或者存在但不相等，则函数的极限不存在. 该定理常用于证明函数在一点处的极限不存在.

例4　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>1, \end{cases}$$

当$x\to 0$时的极限.

解　$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$.

由于$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+}$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

例5　求符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$$

当$x\to 0$时的左极限和右极限，并证明当$x\to 0$时$f(x)$的极限不存在.

解　当$x<0$时，$f(x)=-1$，左极限

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1,$$

同理，当$x>0$时，右极限为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}1=1.$$

因为左、右极限存在但不相等，所以符号函数$f(x)=\operatorname{sgn} x$当$x\to 0$时的极限不存在.

$x\to x_0$时$f(x)$以A为极限的几何意义是：对任意给定的正数ε，不论ε多么小，即不论$y=A-\varepsilon$与$y=A+\varepsilon$间的带形区域多么狭窄，总可以找到$\delta>0$，当点$(x,f(x))$的横坐标x进入$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$时，纵坐标$f(x)$全都落入区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$之内. 此时，$y=f(x)$的图形处于带形区域之内. ε越小，带形区域越狭窄（如图1-1）.

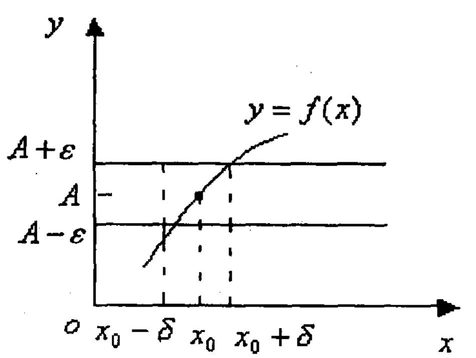

图 1-1

2. 当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限

定义4 设函数$f(x)$对任意大的x有定义，如果当x的绝对值无限增大，即$x\to\infty$时，函数$f(x)$无限地趋近于一个确定的常数A，那么常数A就叫做函数$f(x)$**当$x\to\infty$时的极限**，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，或当$x\to\infty$时，$f(x)\to A$.

定义中，自变量x的绝对值无限增大指的是x既取正值无限增大（记作$x\to+\infty$），同时也取负值而绝对值无限增大（记作$x\to-\infty$）. 但有时x的变化趋势只能或只需取两种变化中的一种，那么,如果只考虑$x\to+\infty$的情形就记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\text{，或}x\to+\infty\text{时，}f(x)\to A\text{；}$$

如果只考虑$x\to-\infty$的情形就记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\text{，或当}x\to-\infty\text{时，}f(x)\to A.$$

显然$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

例如$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

由于$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=\lim\limits_{x\to+\infty}2^x$，故$\lim\limits_{x\to\infty}2^x$存在. 而$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，故$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

$x\to\infty$时$f(x)$以A为极限的几何意义是：对给定的任意小正数ε，在坐标平面上作二平行直线$y=A-\varepsilon$与$y=A+\varepsilon$，二直线之间形成一个带形区域. 不论ε多么小，即不论带形区域多么狭窄，总可以找到$M>0$，当点$(x,f(x))$的横坐标x进入区间$(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$时，纵坐标$f(x)$全都落入区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$之内. 此时$y=f(x)$的图形处于带形区域之内. ε越小，带形区域越狭窄（如图1-2）.

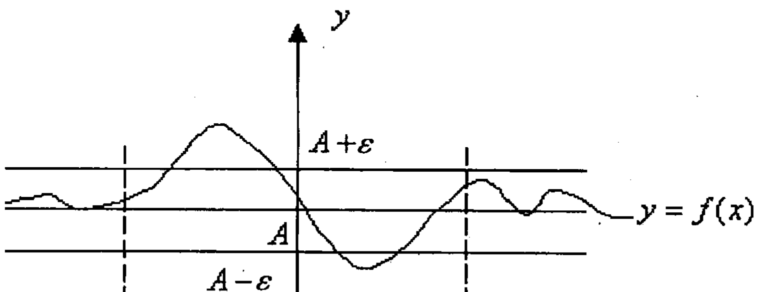

图 1-2

例6 设函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$（如图1-3所示），证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

解 当$x\to+\infty$时，$\dfrac{1}{x}\to0$，则称当$x\to+\infty$时，$\dfrac{1}{x}$以0为极限，记作$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$；

当$x\to-\infty$时，$\dfrac{1}{x}\to0$，则称当$x\to-\infty$时，$\dfrac{1}{x}$以0为极限，记作$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

由此可知$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

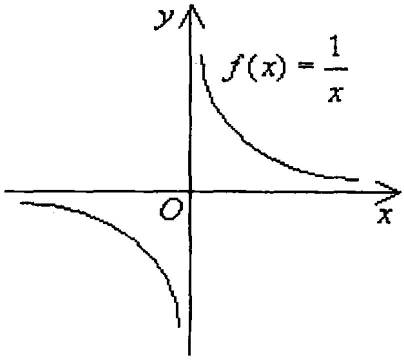

图 1-3

注意 在$x\to\infty$的变化过程中，不是所有的函数都有极限. 比如函数$y=\sin x$和$y=2^x$，当$x\to+\infty$时就不存在极限. 对于极限值变得越来越大的变量虽然不存在极限，但为了叙述方便，我们也说它的极限是无穷大.

3. 函数极限的性质

定理1（唯一性） 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则极限值必唯一.

定理2（夹逼定理） 设函数$f(x)$，$g(x)$，$\varphi(x)$在点x_0的某个邻域内（x_0可除外）有定义且满足条件：

(1)$g(x)\leq f(x)\leq\varphi(x)$，

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注意 上述定理1和定理2当$x\to\infty$时也成立. 另外在下面的性质或定理中，不标明$x\to x_0$还是$x\to\infty$，均表示对$x\to x_0$或$x\to\infty$都成立.

三、极限的四则运算

性质1 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}g(x)=B$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]$必定存在，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}f(x)+\lim_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}g(x)=A\pm B.$$

性质2 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}g(x)=B$，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}f(x)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}g(x)=AB.$$

推论 如果$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}f(x)=A$，$n$为自然数，则有$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}[f(x)]^n=[\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}f(x)]^n=A^n$.

性质3 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}}g(x)=B$，且$B\neq0$，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)}=\frac{A}{B}$$

四、无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量的定义

定义5 如果当$x\to x_0$或$x\to\infty$时,$f(x)\to 0$,那么函数$f(x)$叫做当$x\to x_0$或$x\to\infty$时的**无穷小量**,简称**无穷小**.

如果当$x\to x_0$或$x\to\infty$时,$|f(x)|\to\infty$,那么函数$f(x)$叫做当$x\to x_0$或$x\to\infty$时的**无穷大量**,简称**无穷大**.

注意:

(1)无穷小量是变量,它不是表示量的大小,而是表示变量的变化趋势为零.

(2)一个变量是否为无穷小量是与自变量的变化趋势紧密相关的.在不同的变化过程中,同一个变量可以有不同的变化趋势.例如

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0,\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1.$$

所以,当$x\to 1$时,(x^2-1)是无穷小量;而当$x\to 0$时,(x^2-1)就不是无穷小量,因此称$f(x)$为无穷小量时,必须指出自变量的变化趋势,否则是毫无意义的.

(3)很小很小的数不是无穷小量,越变越小的变量也不一定是无穷小量.例如,当$x\to\infty$时,$1+\frac{1}{x}$就越变越小,但它不是无穷小量.

(4)无穷小量不是一个数,但数“0”是无穷小量中唯一的一个数,这是因为$\lim\limits_{x\to 0}0=0$.

例7 当$n\to\infty$时,下列变量为无穷小量的有(　　).

A. $(-1)^{n-1}(n^2-1)$　　B. $(-1)^n\frac{1}{n^2}$　　C. $\ln n$　　D. $\left(\frac{e}{2}\right)^n$

分析 由无穷小量和无穷大量的定义可知,只需判定是否有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

若$a_n=(-1)^{n-1}(n^2-1)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^{n-1}(n^2-1)|=\infty$,因此当$n\to\infty$时,$(-1)^{n-1}(n^2-1)$为无穷大量.

若$a_n=(-1)^n\frac{1}{n^2}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}=0$,可知应选B.

若$a_n=\ln n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=\infty$,因此当$n\to\infty$时,$\ln n$为无穷大量.

若$a_n=\left(\frac{e}{2}\right)^n$,则由于$e>2$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n=\infty$,因此当$n\to\infty$时,$\left(\frac{e}{2}\right)^n$为无穷大量.

2. 极限与无穷小量的关系

函数$f(x)$在某个极限过程中(即$x\to x_0$或$x\to\infty$)以常数A为极限的充分必要条件是函数$f(x)$能表示为常数A与无穷小量α之和,即$f(x)=A+\alpha$.

3. 无穷小量的性质

性质1 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量;

性质2 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量;

性质3 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量;

性质4 常数与无穷小量的乘积是无穷小量;

注意 这些性质不能推广到无穷大量之中.

性质5 无穷小量(0除外)的倒数是无穷大量;无穷大量的倒数是无穷小量.

例8 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=$__________.

答案 0.

分析 $x\to 0$时,x是无穷小量,$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$是有界函数. 根据性质2,有界函数与无穷小量的乘积仍是无穷小量. 因此$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

例9 下列变量在给定的变化过程中为无穷小量的是( ).

A. $\sin\frac{1}{x}(x\to 0)$ B. $e^{\frac{1}{x}}(x\to 0)$ C. $\ln(1+x^2)(x\to 0)$ D. $\frac{x-3}{x^2-9}(x\to 3)$

答案 C.

分析 当$x\to 0$时,$\sin\frac{1}{x}$为振荡无极限,当$x\to 0^-$时,$e^{\frac{1}{x}}\to 0$;

当 $x\to 0^+$时,$e^{\frac{1}{x}}\to +\infty$. 所以排除$A$,$B$.

而当 $x\to 0$时,$\ln(1+x^2)\to \ln 1=0$,所以应选C.

选项D不是无穷小量. 事实上,当$x\to 3$时,$\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{x+3}\to\frac{1}{6}\neq 0$.

4. 无穷小量阶的比较

定义6 设α和β是在同一极限过程中的无穷小,又$\lim\frac{\beta}{\alpha}$也是这个变化过程中的极限.

(1)如果$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$,则称$\beta$是比$\alpha$较高阶的无穷小,记作$\beta=o(\alpha)$;

(2)如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称$\beta$是比$\alpha$较低阶的无穷小;

(3)如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C$($C$为非零常数),则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小;

(4)如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小,记作$\alpha\sim\beta$.

性质 若在某个极限过程中,$\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且$\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$存在,则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质常称为等价无穷小代换. 这个性质常常使用在极限运算中,起到简化运算的作用,但必须注意,只能在乘除中使用,不能在加减运算中使用.

常用的等价无穷小代换有:当$x\to 0$时,

$$\sin x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad e^x-1\sim x.$$

例10 当$x\to 0$时,$\sin(x+x^2)$与x比较是( ).

A. 较高阶的无穷小量 B. 较低阶的无穷小量

C. 等价无穷小量 D. 同阶的无穷小量

答案 C.

分析 两个无穷小量阶的比较是求它们比值的极限.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x+x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2}{x}=1$(等价无穷小量代换),所以应选C.

例11 当$x\to0$时,x^2与$\sin x$比较是(　　).

A. 较高阶的无穷小量　　B. 较低阶的无穷小量

C. 等价无穷小量　　D. 同阶的无穷小量

答案 A.

分析 用等价无穷小量代换$\sin x\sim x$,所以应选A.

例12 下列等式成立的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$　　C. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^2}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

答案 B.

分析 用等价无穷小量代换,所以应选B.

需要注意的是:在选项D中,由于$x\to\infty$时,$\sin x$不是无穷小量,所以应该用无穷小量的性质2计算,则有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$.

五、两个重要极限公式

利用上述极限存在的两个准则,可以得到两个重要极限.

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

推论 若$\lim\varphi(x)=0$,则(1)$\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$;(2)$\lim\dfrac{\varphi(x)}{\sin\varphi(x)}=1$

说明 重要极限公式1一般为“$\dfrac{0}{0}$”型极限,且极限式中含有三角函数.

解题步骤:

(1)检验$\sin\varphi(x)$中的$\varphi(x)$,看是否$\lim\varphi(x)=0$. 若是,进行下一步,若不是,选用其它方法求解.

(2)检查分母(或分子)是否为$\varphi(x)$. 若是,进行下一步,若不是,恒等变形,使分母(或分子)中出现$\varphi(x)$.

(3)代公式,求极限.

例如,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}=1$

例13 求下列各极限:

(1)$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{2(x-3)}$;　　(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^3}{\sin^3x}$;　　(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{2(x-3)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{x-3}=\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}$.

(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^3}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^3}{x^3}\cdot\dfrac{x^3}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^3}{x^3}\cdot(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x})^3=1\times1^3=1$.

(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=1\times0=0$.