全国注册结构工程师执业资格考试辅导系列

一级注册结构工程师

基础考试过关必做1500题

主编：金圣才
支持：中华工程资格考试网

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

全国注册结构工程师执业资格考试辅导系列

一级注册结构工程师

基础考试过关必做1500题

主编：金圣才
支持：中华工程资格考试网

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是全国注册结构工程师执业资格考试基础考试的一本过关必做习题集。本书遵循最新《全国一级注册结构工程师执业资格考试基础考试大纲》的考试内容编排，共分17章，根据考试内容和相关要求精心编写了约1500道习题。所选习题基本覆盖了考试大纲规定需要掌握的知识内容，侧重于选用常考重难点习题，并对大部分习题的答案进行了详细的分析和说明。

本书特别适用于参加全国一级注册结构工程师执业资格考试基础考试的考生使用。本书配有圣才学习卡，圣才学习网/中华工程资格考试网（www. 100gczg. com）为考生提供注册结构工程师执业资格考试的名师网络课程、历年真题等增值服务（名师网络课程的详细介绍参见本书书后内页）。

图书在版编目（CIP）数据

一级注册结构工程师基础考试过关必做1500题/金圣才主编．—北京：中国石化出版社，2009
（全国注册结构工程师执业资格考试辅导系列）
ISBN 978-7-80229-944-3

Ⅰ．一… Ⅱ．金… Ⅲ．建筑结构-工程师-资格考核-习题 Ⅳ．TU3-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第079750号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街58号
邮编：100011 电话：（010）84271850
读者服务部电话：（010）84289974
http://www. sinopec-press. com
E-mail：press@ sinopec. com. cn
金圣才文化发展（北京）有限公司排版
北京宏伟双华印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 24.75印张 594千字
2009年6月第1版 2009年6月第1次印刷
定价：48.00元

序　言

为了帮助考生顺利通过全国注册结构工程师执业资格考试，我们根据最新《全国注册结构工程师执业资格考试大纲》和相关考试用书编写了全国注册结构工程师执业资格考试辅导系列：

1.《一级注册结构工程师基础考试过关必做1500题》

2.《一级注册结构工程师专业考试过关必做600题(含历年真题)》

3.《二级注册结构工程师专业考试过关必做600题(含历年真题)》

本书是全国注册结构工程师执业资格考试基础考试的一本过关必做习题集。本书遵循最新《全国一级注册结构工程师执业资格考试基础考试大纲》的考试内容编排，共分17章，根据考试内容和相关要求精心编写了约1500道习题。所选习题基本覆盖了考试大纲规定需要掌握的知识内容，侧重于选用常考重难点习题，并对大部分习题的答案进行了详细的分析和说明。

需要特别说明的是：如果相关法律法规、考试大纲以及其他考试资料发生变化，我们会及时根据最新法律法规和考试大纲对本书进行修订和说明，读者可以登陆中华工程资格考试网(www.100gczg.com)查看并下载相关修订部分。本书参考了众多的配套资料和相关参考书，书中错误、遗漏不可避免，敬请指正和提出建议。

圣才学习网(www.100xuexi.com)是一家为全国各类考试和专业课学习提供**名师网络课程**、历年真题详解等各类复习资料的综合性大型网站，包括中华工程资格考试网、中华英语学习网、中华证券学习网、中华管理学习网等48个子网站。

其中，中华工程资格考试网(www.100gczg.com)是一家为各类工程资格考试与学习提供最新全套考试资料的专业型网站。工程资格考试包括建筑师、建造师、结构工程师、土木工程师、造价工程师、监理工程师、公用设备工程师、电气工程师、设备监理师、安全工程师、安全评价师、房地产估价师、房地产经纪人、土地登记代理人、土地估价师、资产评估师、招标师、拍卖师等，每种考试类型都设置有为考生和学习者提供一条龙服务的资源，包括：网络课程辅导、在线测试、历年真题详解、专项练习、笔记讲义、视频课件、学术论文等。

本书特别适用于参加全国一级注册结构工程师执业资格考试基础考试的考生使用。本书配有圣才学习卡，圣才学习网/中华工程资格考试网(www.100gczg.com)为考生提供注册结构工程师执业资格考试的名师网络课程、历年真题等增值服务(名师网络课程的详细介绍参见本书书后内页)。详情请登录网站：

圣才学习网 www.100xuexi.com

中华工程资格考试网 www.100gczg.com

金圣才

目　录

第一章　高等数学

单项选择题（下列选项中，只有一项符合题意）

1.1　空间解析几何

1. 设 $\boldsymbol{a}=\{3, 5, -2\}$，$\boldsymbol{b}=\{2, 1, 4\}$，且已知 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 Oz 轴垂直，则必有（　　）。

A. $\lambda=\mu$　　B. $\lambda=-\mu$　　C. $\lambda=2\mu$　　D. $\lambda=3\mu$

【答案】C

【解析】$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\{3\lambda+2\mu, 5\lambda+\mu, -2\lambda+4\mu\}$

已知 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 Oz 轴垂直，则

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(0, 0, 1)=0$$

即

$$(-2\lambda+4\mu)\times 1=0 \quad 得 \quad \lambda=2\mu$$

2. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 均为非零向量，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=$（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】D

【解析】因 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两相互垂直。

且

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$$

同理可得

$$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}| \qquad |\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

故

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1 \qquad |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=3。$$

3. 与向量(1，3，1)和(1，0，2)同时垂直的向量是（　　）。

A. (3, -1, 0)　　B. (6, -1, -3)　　C. (4, 0, -2)　　D. (1, 0, 1)

【答案】B

【解析】同垂直于向量(1，3，1)和(1，0，2)的向量应为(1，3，1)×(1，0，2)，即

$$(1, 3, 1)\times(1, 0, 2)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-1\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}=(6, -1, -3)$$

4. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且满足 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=$（　　）。

A. 0　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}\pi$

【答案】C

【解析】由两向量垂直的充要条件得

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0 \\ (\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0 & (1) \\ 7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0 & (2)\end{cases}$$

(1) - (2)得：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{2}$，

(1) ×8 + (2) ×15 得：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{|\boldsymbol{a}|^2}{2}$，

由上两式得：$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，

从而 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{2}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{2}$，

因此 $\theta=\frac{\pi}{3}$。

5. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=($　　$)$。

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

【答案】A

【解析】由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，得 $\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此有：

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=2\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2$$

6. 设向量 $\boldsymbol{x}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，且与 $\boldsymbol{c}=(2,-1,1)$ 的数量积为 -6，则向量 $\boldsymbol{x}=($　　$)$。

A. $(-3,3,3)$　　B. $(-3,1,1)$　　C. $(0,6,0)$　　D. $(0,3,-3)$

【答案】A

【解析】由题意可得：

$$\boldsymbol{x}/\!/\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(2,3,-1)\times(1,-2,3)=(7,-7,-7)=7(1,-1,-1)$$

所以 $\boldsymbol{x}=(x,-x,-x)$。再由 $-6=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}=(x,-x,-x)\cdot(2,-1,1)=2x$ 得：$x=-3$，所以 $\boldsymbol{x}=(-3,3,3)$。

7. 直线 L 为 $\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，平面 π 为 $4x-2y+z-2=0$，则(　　)。

A. L 平行于 π　　B. L 在 π 上　　C. L 垂直于 π　　D. L 与 π 斜交

【答案】C

【解析】直线 L 的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&3&2\\2&-1&-10\end{vmatrix}=-7(4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，

所以 $\boldsymbol{s}/\!/\boldsymbol{n}$，即直线 L 垂直于平面 π。

8. 已知两直线 $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ 和 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{n}=\frac{z-1}{-2}$ 相互平行，则 $n=($　　$)$。

A. 2　　B. 5　　C. -2　　D. -4

【答案】D

【解析】两直线平行即两直线的方向向量平行，其对应坐标成比例，即

$$\frac{4}{2}=\frac{n}{-2}=\frac{-2}{-1}$$

由此得：$n=-4$。

9. 设有直线 L_1：$x=-1+t$，$y=5-2t$，$z=-8+t$，L_2：$\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$，则两线的夹角为(　　)。

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】C

【解析】两直线的夹角即为两直线的方向向量的夹角，而 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,\ -2,\ 1)$，$L_2$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(1,\ -1,\ 0)\times(0,\ 2,\ 1)=(-1,\ -1,\ 2)$。$\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$ 夹角 α 的余弦为

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1|\ |\boldsymbol{s}_2|}=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$。

10. 过点$(-1,\ 2,\ 3)$垂直于直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线是(　　)。

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$　　B. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$

C. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$　　D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$

【答案】A

【解析】直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(4,\ 5,\ 6)$，平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(7,\ 8,\ 9)$。显然 A、B、C 中的直线均过点$(-1,\ 2,\ 3)$，对于 A 中直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,\ -2,\ 1)$，有 $\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{n}$，可见 A 中直线与已知直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$垂直，与平面 $7x+8y+9z+10=0$ 平行。

11. 设两直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{k}$，$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$相交，则 $k=$(　　)。

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{5}{4}$　　D. $\frac{5}{4}$

【答案】D

【解析】两直线的方向向量可分别取为 $\boldsymbol{l}_1=(1,\ 2,\ k)$，$\boldsymbol{l}_2=(1,\ 1,\ 1)$。因 $P(1,\ -1,\ 1)$、$Q(-1,\ 1,\ 0)$分别为两直线上的点，则由题设知 $\boldsymbol{l}_1$、$\boldsymbol{l}_2$、$\overrightarrow{PQ}=(-2,\ 2,\ -1)$共面，从而$\begin{vmatrix}1&2&k\\1&1&1\\-2&2&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow k=\frac{5}{4}$。

12. 若直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$与$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$相交，则必有(　　)。

A. $\lambda=1$　　B. $\lambda=\frac{3}{2}$　　C. $\lambda=-\frac{4}{5}$　　D. $\lambda=\frac{5}{4}$

【答案】D

【解析】如果两直线相交，则这两条直线的方向向量与这两条直线上两点连线构成的向量应在同一平面上，由此来确定 λ。

点 $A(1,\ -1,\ 1)$，$B(-1,\ 1,\ 0)$ 分别为两条直线上的一点，则 $\overrightarrow{AB}=(-2,\ 2,\ -1)$，两条直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(1,\ 2,\ \lambda)$，$\boldsymbol{s}_2=(1,\ 1,\ 1)$，这三个向量应在同一个平面上，即 $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4\lambda+5=0$，解得 $\lambda=\dfrac{5}{4}$。

13. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是(　　)。

A. $(1,\ -1,\ 2)$　　B. $(-1,\ 1,\ 2)$　　C. $(1,\ 1,\ 2)$　　D. $(-1,\ -1,\ 2)$

【答案】C

【解析】即求曲面 S：$F(x,\ y,\ z)=0$，其中 $F(x,\ y,\ z)=z+x^2+y^2-4$ 上点 P 使 S 在该点处的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与平面 π：$2x+2y+z-1=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_0=(2,\ 2,\ 1)$ 平行。

S 在 $P(x,\ y,\ z)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x},\ \dfrac{\partial F}{\partial y},\ \dfrac{\partial F}{\partial z}\right)=(2x,\ 2y,\ 1)$。$\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{n}_0\Leftrightarrow\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{n}_0$，$\lambda$ 为常数，即 $2x=2\lambda$，$2y=2\lambda$，$1=\lambda$，即 $x=1$，$y=1$，又点 $P(x,\ y,\ z)\in S\Rightarrow z=4-x^2-y^2|_{(x,y)=(1,1)}=2$，求得 $P(1,\ 1,\ 2)$（P 不在给定的平面上）。

14. 设平面 α 平行于两直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-2}=z$ 及 $2x=y=z$，且与曲面 $z=x^2+y^2+1$ 相切，则 α 的方程为(　　)。

A. $4x+2y-z=0$　　B. $4x-2y+z+3=0$

C. $16x+8y-16z+11=0$　　D. $16x-8y+8z-1=0$

【答案】C

【解析】由平面 α 平行于两已知直线，知平面 α 的法向量为：

$$\boldsymbol{n}=(2,\ -2,\ 1)\times(1,\ 2,\ 2)=-3(2,\ 1,\ -2)$$

设切点为 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则切点处曲面的法向量为 $(2x_0,\ 2y_0,\ -1)$，故

$$\frac{2}{2x_0}=\frac{1}{2y_0}=\frac{-2}{-1}$$

由此解得

$$x_0=\frac{1}{2},\ y_0=\frac{1}{4}$$

从而

$$z_0=x_0^2+y_0^2+1=\frac{21}{16}$$

因此 α 的方程为

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{4}\right)-2\left(z-\frac{21}{16}\right)=0$$

即

$$16x+8y-16z+11=0$$

15. 三个平面 $x=cy+bz$，$y=az+cx$，$z=bx+ay$ 过同一直线的充要条件是(　　)。

A. $a+b+c+2abc=0$　　B. $a+b+c+2abc=1$

C. $a^2+b^2+c^2+2abc=0$　　D. $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

【答案】D

【解析】由于三个平面过同一直线⇔线性齐次方程组$\begin{cases}x-cy-bz=0\\cx-y+az=0\\bx+ay-z=0\end{cases}$有非零解⇔行列式

$$\begin{vmatrix}1 & -c & -b\\ c & -1 & a\\ b & a & -1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc=1。$$

16. 在平面$x+y+z-2=0$和平面$x+2y-z-1=0$的交线上有一点M，它与平面$x+2y+z+1=0$和$x+2y+z-3=0$等距离，则M点的坐标为(　　)。

A. (2，0，0)　　B. (0，0，-1)　　C. (3，-1，0)　　D. (0，1，1)

【答案】C

【解析】排除A：点(2，0，0)不在平面$x+2y-z-1=0$上；

排除B：点(0，0，-1)不在平面$x+y+z-2=0$上；

排除D：点(0，1，1)与两平面不等距离。

17. 通过直线$\begin{cases}x=2t-1\\y=3t+2\\z=2t-3\end{cases}$和直线$\begin{cases}x=2t+3\\y=3t-1\\z=2t+1\end{cases}$的平面方程为(　　)。

A. $x-z-2=0$　　B. $x+z=0$

C. $x-2y+z=0$　　D. $x+y+z=1$

【答案】A

【解析】因点(-1，2，-3)不在平面$x+z=0$上，故可排除B；因点(3，-1，1)不在$x-2y+z=0$和$x+y+z=1$这两个平面上，故可排除C、D。

18. 母线平行于Ox轴且通过曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$的柱面方程为(　　)。

A. $3x^2+2z^2=16$　　B. $x^2+2y^2=16$

C. $3y^2-z^2=16$　　D. $3y^2-z=16$

【答案】C

【解析】因柱面的母线平行于x轴，故其准线在yOz平面上，且为曲线在yOz平面上的投影，在方程组$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$中消去$x$得$\begin{cases}3y^2-z^2=16\\x=0\end{cases}$，此即为柱面的准线，故柱面的方程为：$3y^2-z^2=16$。

19. 曲线L：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1 & (1)\\x-2z+3=0 & (2)\end{cases}$在$xOy$面上的投影柱面方程是(　　)。

A. $x^2+20y^2-24x-116=0$　　B. $4y^2+4z^2-12z-7=0$

C. $\begin{cases}x^2+20y^2-24x-116=0\\z=0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}4y^2+4z^2-12z-7=0\\x=0\end{cases}$

【答案】A

【解析1】投影柱面方程是一个三元方程，C、D表示的是曲线。而B中的方程中含z，不可能是L在xOy面上的投影柱面方程。

【解析2】由(2)得$z=\frac{x+3}{2}$，代入(1)化简得

$$x^2+20y^2-24x-116=0$$

为L在xOy面上的投影柱面方程。

20. 方程$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}=0$是一旋转曲面方程，它的旋转轴是(　　)。

A. x轴　　B. y轴　　C. z轴　　D. 直线$x=y=z$

【答案】C

【解析】由$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=\frac{z^2}{3}$，所以$z=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}$。故曲面是由直线$z=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}x$或$z=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}y$绕$z$轴旋转而成。

21. 在过点(0，0)和$A(\pi,0)$的曲线族$y=a\sin x(a>0)$中存在一条曲线L，且$\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$的值在该曲线族中最小，则$a$等于(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】A

【解析】$I(a)=\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=\int_0^\pi[1+a^3\sin^3x+(2x+a\sin x)a\cos x]dx$

$$=\pi-4a+\frac{4}{3}a^3$$

$I'(a)=4(a^2-1)=0$　　$\therefore$　$a=1(a=-1$舍去)

$I''(a)=8a>0(a>0$时)

$\therefore$　$I(a)$在$a=1$处取最小值。

1.2　微分学

1. 下列各式中正确的是(　　)。

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=-e$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=e$

【答案】A

【解析】分别求四个极限即可。注意它们所属的未定式极限类型。

因为

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1$$

【评注】

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}，\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}=e^{-1}$$

2. 设$f(x)=2^x+3^x-2$，则当$x\to 0$时(　　)。

A. $f(x)$与x是等价无穷小量　　B. $f(x)$与x是同阶但非等价无穷小量

C. $f(x)$是比x较高阶的无穷小量　　D. $f(x)$是比x较低阶的无穷小量

【答案】B

【解析】因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x\ln2+3^x\ln3}{1}=\ln2+\ln3\neq1$$

所以$f(x)$与x是同阶但非等价无穷小量。

3. 已知$x\to0$时，$\arctan3x$与$\frac{ax}{\cos x}$是等价无穷小，则$a=($　　$)$。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】C

【解析】$\because \lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan3x}{\frac{ax}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arctan3x}{3x}\cdot\frac{3x}{ax}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{3}{a}=1$，

$\therefore\ a=3$。

4. 下列极限存在的是(　　)。

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$

B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$

D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$

【答案】D

【解析】对于A，令$y=kx$(即(x,y)沿不同直线趋于$(0,0)$)，则

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1+k^2)x^2}{[(1+k^2)+(1-k)^2]x^2}=\frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2}$$

可见极限随k的变化而变化，故该极限不存在。

对于B，令$y=kx$，虽然$\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to0}}\frac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k)x}=0\quad(k\neq-1)$，

但这不足以判断该极限存在。事实上，再取曲线$y+x=x^2$，

则 $\lim\limits_{\substack{y=-x+x^2\\x\to0}}\frac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(-x+x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3-x^2}{x^2}=-1\neq0$，

故该极限也不存在。

对于C，令$y=kx$，则

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

可见极限值随k的变化而改变故极限不存在。

所以选D，下面证明D的极限确实存在。

因为 $$0\leqslant\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\leqslant\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\quad(x>0,\ y>0)$$

又 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\xlongequal{令t=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-t}=0$$

由夹逼定理，易知：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=0$。

5. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的（　　）。

A. 连续点　　B. 第一类间断点

C. 第二类间断点　　D. 连续点或间断点不能由此确定

【答案】B

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\neq f(0)$，而 $F(0)=f(0)$，即 $x=0$ 是 $F(x)$ 的第一类间断点。

6. 设 $f(x)=\ln 4$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 等于（　　）。

A. $\ln 4$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. ∞　　D. 0

【答案】D

【解析】易知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$，

又因为 $f(x)=\ln 4$，所以 $f'(x)=(\ln 4)'=0$。

7. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界？（　　）

A. $(-1, 0)$　　B. $(0, 1)$　　C. $(1, 2)$　　D. $(2, 3)$

【答案】A

【解析】如 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界。

当 $x\neq 0, 1, 2$ 时，$f(x)$ 连续，而

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=-\frac{\sin 3}{18},\lim_{x\to 0^-}f(x)=-\frac{\sin 2}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\sin 2}{4},\lim_{x\to 1}f(x)=\infty,\lim_{x\to 2}f(x)=\infty$$

所以，函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界。

【评注】一般地，如函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界；如函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有界。

8. $f(x)=xe^{-x^2}\sin x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是（　　）。

A. 有界的偶函数　　B. 有界的奇函数

C. 无界的偶函数　　D. 无界的奇函数

【答案】B

【解析】从 $f(x)$ 的结构看，它是 x（奇函数）与 $e^{-x^2}\sin(x^2)$（偶函数）的乘积，因而是奇函数。

因为 $\sin x^2$ 有界，从而 $f(x)$ 是否有界取决于 xe^{-x^2} 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是否有界，由洛必达法则得：

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$

再由 xe^{-x^2} 的连续性即知 xe^{-x^2} 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，故正确答案是 B。

9. 若 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 3x, & 0\leqslant x<1 \\ e^{2ax}-e^{ax}+1, & x\geqslant 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则 a 的值是（　　）。

A. 2　　B. ln2　　C. e^2　　D. 1

【答案】 B

【解析】 由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以 $f(1-0)=f(1+0)$。

而
$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 3x = 3$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (e^{2ax}-e^{ax}+1) = e^{2a}-e^{a}+1$$

故由 $e^{2a}-e^{a}+1=3$ 解得 $e^{a}=2$，故 $a=\ln 2$。

10. 下列函数在其定义域内连续的是（　　）。

A. $f(x)=\frac{1}{x}$　　B. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\leqslant 0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

【答案】 A

【解析】 A 中 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，根据初等函数在其定义区间上的连续性可知 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在其定义域内连续。

B 中，$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ 而 $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0$，故 B 中的 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不连续，同理 C、D 中 $f(x)$ 在 $x=0$ 点也都不连续，故选 A。

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 3x+a, & x\leqslant 0 \\ x^2+1, & 0<x<1 \\ \frac{b}{x}, & x\geqslant 1 \end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，则 a，b 的值为（　　）。

A. $a=-\frac{1}{3}$；$b=1$　　B. $a=2$；$b=1$

C. $a=1$；$b=2$　　D. $a=1$；$b=1$

【答案】 C

【解析】 在 $x=0$ 处，$\lim_{x\to 0^-} (3x+a)=a$，$\lim_{x\to 0^+} (x^2+1)=1$，

且 $f(0)=a$，故 $a=1$。

又因为 $\lim_{x\to 1^-} (x^2+1)=2$，$\lim_{x\to 1^+} \frac{b}{x}=b$，且 $f(1)=b$，

故 $b=2$。

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）。

A. 极限不存在　　　　B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导　　　　D. 可导

【答案】C

【解析】利用函数在一点连续和可导的定义来判定。

由$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}=0$（无穷小量乘有界变量仍为无穷小量）且$f(0)=0$，可知$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，即$f(x)$在$x=0$处连续。

又由$\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}=\begin{cases}\sqrt{-x}\sin\frac{1}{x^2}, & x<0\\ \sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}, & x>0\end{cases}$，

可知$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{-x}}\sin\frac{1}{x^2}$不存在，即$f(x)$在$x=0$处不可导，故选C。

【评注】函数表达式中含有绝对值，应作为分段函数处理，利用左、右极限讨论。

13. 设$f(x)$为可导函数，且满足条件$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在点$[1, f(1)]$处的切线斜率为(　　)。

A. 2　　B. -1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. -2

【答案】D

【解析】利用导数定义计算即可。

本题实际上要求$f'(1)$，由题设

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1)=-1$$

得　$f'(1)=-2$。

14. 设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上有定义，在开区间(a, b)内可导，则(　　)。

A. 当$f(a)f(b)<0$时，存在$\xi\in(a, b)$，使$f(\xi)=0$

B. 当任何$\xi\in(a, b)$，有$\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$

C. 当$f(a)=f(b)$时，存在$\xi\in(a, b)$，使$f'(\xi)=0$

D. 存在$\xi\in(a, b)$，使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

【答案】B

【解析】由于题设条件中并未给出$f(x)$在$[a, b]$上连续，因此，零点定理、罗尔定理以及拉格朗日中值定理均不能保证成立。

由题设，$f(x)$在$\xi(\xi\in(a, b))$处可导，于是连续，故有$\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$，故B为正确选项。

15. 设$\frac{d}{dx}f(x)=g(x)$，$h(x)=x^2$，则$\frac{d}{dx}f[h(x)]$为(　　)。

A. $g(x^2)$　　B. $2xg(x)$　　C. $x^2g(x^2)$　　D. $2xg(x^2)$

【答案】D

【解析】$\frac{d}{dx}f[h(x)]=f'[h(x)]\cdot h'(x)=g[h(x)]\cdot(x^2)'=g(x^2)\cdot 2x=2xg(x^2)$。

16. 设函数$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$，则$f'_-(1)$等于(　　)。

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. -2

【答案】D

【解析】
$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1-(1+\Delta x)^2-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-2\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x}$$
$$=-2$$

17. 设$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}=1$，则(　　)。

A. $x=0$是$f(x)$的极小值点

B. $x=0$是$f(x)$的极大值点

C. $y=f(x)$在点$[0, f(0)]$处的切线平行于x轴

D. $y=f(x)$在点$x=0$处的导数非零

【答案】D

【解析】由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}=1$知$f(0)=0$，

故$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}=1$，

故过$[0, f(0)]$处的切线不平行于x轴，故正确答案为D。

18. 设函数$y=f(x)$在点x可微，在点x自变量的改变量是Δx，函数相应的改变量是Δy，微分是dy，当$\Delta x\to 0$时，不正确的是(　　)。

A. dy是比Δx较高阶的无穷小量

B. 差$\Delta y-dy$是比Δx较高阶的无穷小量

C. 差$\Delta y-dy$是比Δy较高阶的无穷小量

D. 当$f'(x)\neq 0$时，Δy与dy是等价无穷小量

【答案】A

【解析】由题设知，$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$，且$dy=f'(x)\Delta x$。

对A，有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x}=f'(x)$；

对B，有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$；

对C，有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{f'(x)\Delta x+o(\Delta x)}=0$；

对D，有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)}{f'(x)\cdot\Delta x}=1$。

19. 若函数$y=f(x)$在x_0处的导数不为零，则当$\Delta x\to 0$时，该函数在$x=x_0$处的微分dy是

(　　)。

A. 与 Δx 等价无穷小　　B. 与 Δx 同阶无穷小

C. 与 Δx 低价无穷小　　D. 与 Δx 高阶无穷小

【答案】B

【解析】因 $dy|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{dy|_{x=x_0}}{\Delta x}=f'(x_0)\neq 0$。

所以当 $\Delta x\to 0$ 时，$dy|_{x=x_0}$与 Δx 是同阶无穷小，故选 B。

【评注】$dy=f'(x)\Delta x$ 或 $dy=f'(x)dx$，容易犯的错误是：$dy=f'(x)$。

20. 设可微函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)取得极小值，则下列结论正确的是(　　)。

A. $f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处的导数等于零

B. $f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处的导数大于零

C. $f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处的导数小于零

D. $f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处的导数不存在

【答案】A

【解析】可微函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)取得极小值，根据取极值的必要条件知$f'_y(x_0,y_0)=0$，即$f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处的导数等于零，故应选 A。

【评注】(1) 本题考查了偏导数的定义，$f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处的导数即$f'_y(x_0,y_0)$；而$f(x,y_0)$在 $x=x_0$ 处的导数即$f'_x(x_0,y_0)$。

(2) 本题也可用排除法分析，取$f(x,y)=x^2+y^2$，在点$(0,0)$处可微且取得极小值，并且有$f(0,y)=y^2$，可排除 B，C，D，故正确选项为 A。

21. 设 $z=x^y$，则$\dfrac{\partial z}{\partial y}$等于(　　)。

A. yx^{y-1}　　B. $x^y\ln x$　　C. $\dfrac{x^{y+1}}{y+1}$　　D. $\dfrac{x^y}{\ln x}$

【答案】B

【解析】根据偏导数的定义有

$$\ln z=y\ln x$$

于是

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\ln x$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z\ln x=x^y\ln x$$

22. 若 $u=u(x,y)$为可微函数，有满足 $u(x,y)|_{y=x^2}=1$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=x^2}=x$，则必有$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x^2}$的值为(　　)。

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. -1

【答案】C

【解析】等式$\begin{cases}u(x,y)=1\\ y=x^2\end{cases}$两边对 x 求导，得：