总 主 编 王卫华 林 常
本册主编 周 斌 蔡玉书 王卫华

高中数学联赛讲义

代数分册

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学联赛讲义

- 代数分册
- 几何分册
- 组合数学 数论分册

ISBN 978-7-308-06648-8

9 787308 066488 >

定价：38.00元

高中数学联赛讲义

（代数分册）

总主编　王卫华　林　常

本册主编　周　斌　蔡玉书　王卫华

本册编委　舒金根　徐德全　曾祥海

胡光裕　陈兆坚　罗桂颖

赵景生　郭振泉　周丹丹

白宏国　肖　军　刘　洋

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛讲义. 代数分册/周斌,蔡玉书,王卫华主编. —杭州：浙江大学出版社,2009.3
ISBN 978-7-308-06648-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①周…②蔡…③王… Ⅲ. 代数课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 036643 号

高中数学联赛讲义(代数分册)

周 斌 蔡玉书 王卫华 主编

责任编辑 沈国明
文字编辑 吴 慧
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
电话：0571－88925592，88273066(传真)
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 临安市曙光印务有限公司
开 本 787×1092mm 1/16
印 张 25
字 数 608 千
版 印 次 2009 年 3 月第 1 版 2009 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-06648-8
定 价 38.00 元

前　言

“全国高中数学联赛”(始于1981年)是教育部批准,由中国科协主管,中国数学会普及工作委员会主办,国内影响最大的一项中学生学科竞赛。

每年10月中旬的第一个周日,全国有近10万学生参加这项重要的竞赛活动,争夺每个赛区的一等奖。每个赛区前几名的同学,还可以获得进入“中国数学奥林匹克”的资格,更进一步,可以争取代表中国参加国际数学奥林匹克竞赛。

2009年1月,中国数学会普及工作委员会在海南召开会议,对全国高中数学联赛的考查方式及考查要求作了调整,进一步加强联赛第二试的内容,并明确将“代数、几何、组合、数论”四块的考查要求写入考试说明。

许多同学在全国高中数学联赛前夕,都会碰到这样的问题:如何进行联赛的复习,选择什么书来看,找一些什么样的题目来做,哪些知识点是联赛重点考查的,哪些数学思想方法是联赛命题者比较青睐的,等等。

为了更有效地应对新的联赛命题方式,提高读者联赛复习的效果,解决读者的这些疑惑,《数学竞赛之窗》编辑部特别邀请了全国各地在数学竞赛辅导一线的教练员和多次参加各级各类竞赛命题的专家编写了本丛书。本丛书分为三册,分别是:代数分册,几何分册以及组合、数论分册。

代数分册:按照全国高中数学联赛考查的重点内容,本册内容包括“函数、数列、不等式、多项式、复数”等部分,涵盖全国联赛一试和二试对代数问题的要求。

几何分册:本册内容分为三大块——立体几何、解析几何和平面几何,其中立体几何和解析几何是一试中的重点考查内容,平面几何是二试的必考内容。

组合和数论分册:本册既注意了联赛一试对简单排列组合问题和数论小题的覆盖,更注重联赛二试中对数论和组合问题的考查,这些问题往往以联赛压轴题的形式出现,在新的考试模式下,这方面的考查会得到加强,希望引起读者注意。

本书的编写过程中,得到《数学竞赛之窗》编委老师的大力支持,他们提出了很多富有建设性、针对性的建议。同时,《数学竞赛之窗》编辑部决定开设一个热线,解答广大读者关于全国高中数学联赛的问题。热线电话是:0512—68184173,也可通过电子邮件联系我们,信箱是:sxjszcbjb@163.com。

限于作者水平,书中不妥之处请广大读者批评指正。我们将综合大家的建议,再版时做出修订,力求使本书更适合联赛实际。

《数学竞赛之窗》编辑部

2009年3月

目 录

CONTENTS

第一章 集合 …… 1

1. 集合与元素 …… 1
2. 集合运算 …… 7
3. 子集 …… 11
4. 集合综合应用 …… 20

第二章 函数及应用 …… 29

1. 函数概念、图象与性质 …… 29
2. 二次函数 …… 34
3. 函数值域与最值 …… 42
4. 参数问题 …… 53
5. 函数存在与函数构造 …… 60
6. 抽象函数 …… 68
7. 函数迭代与函数方程 …… 74
8. 方程与方程组 …… 82
9. 函数的综合应用 …… 93

第三章 三角函数 …… 104

1. 三角函数基本概念 …… 104
2. 三角函数的求值 …… 107
3. 三角恒等式的证明 …… 112
4. 解三角形、三角形中的恒等式 …… 116
5. 三角不等式三角函数的最值 …… 124
6. 三角的综合应用 …… 138

第四章　向量 …… 143

第五章　等差数列与等比数列 …… 150

1. 等差、等比数列性质 …… 150
2. 递推数列与递推法 …… 157
3. 数列的通项与求和 …… 165
4. 数列的性质 …… 177
5. 数列不等式 …… 184
6. 数列的应用 …… 198
7. 数列的综合问题 …… 209

第六章　不等式 …… 226

1. 不等式证明基本方法技巧 …… 226
2. 几个重要不等式应用 …… 242
3. 柯西不等式应用 …… 257
4. 不等式综合证明 …… 276
5. 几何不等式 …… 323

第七章　复数 …… 336

1. 复数基本概念 …… 336
2. 复数的综合应用 …… 341
3. 复数域上的方程 …… 348
4. 复数与平面几何 …… 356

第八章　多项式 …… 362

1. 多项式一 …… 362
2. 多项式二 …… 375
3. 多项式综合应用 …… 384

第一章 集 合

1 集合与元素

1. 直角坐标平面上点集 $A=\{(x,y)\mid$ 存在 $1\leqslant a\leqslant 2$，使得 $(x-a)^2+(y-\sqrt{3}a)^2\leqslant a^2\}$，则集合 A 对应的点形成的图形的面积为 $\underline{3(\sqrt{3}+\pi)}$.

解 对 $a\in[1,2]$ 点集 $B_a=\{(x,y)\mid(x-a)^2+(y-\sqrt{3}a)^2\leqslant a^2\}$ 形成的图形为一个圆盘，此圆盘的圆心在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上且半径长等于圆心横坐标 a，故此圆盘以 y 轴及直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 为切线. 当 a 在 $[1,2]$ 上取值时，动圆盘的圆心沿直线 $y=\sqrt{3}x$ 移动且两终端圆盘圆心分别为 $(1,\sqrt{3})$，$(2,2\sqrt{3})$，故集 A 形成的图形是由直线 $x=0$，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 以及部分圆周 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$ 和 $(x-2)^2+(y-2\sqrt{3})^2=4$ 所围成的图形，由对称性易求得其面积为 $S=2\times\frac{1+2}{2}\times\sqrt{3}+\frac{1}{3}\pi\times1^2+\frac{2}{3}\pi\times2^2=3(\sqrt{3}+\pi)$.

2. 已知集合 $A=\{a\mid a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+2^n}{2^n+t^n}$，$t$ 为实常数，且 $t\neq-2\}$，则集合 A 的真子集的个数为 $\underline{7}$ 个.

解析 对 $a\in A$，有 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+2^n}{2^n+t^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n+t^n}$.

当 $|t|>2$ 时，

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n+t^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{2}{t}\right)^n-\left(\frac{1}{t}\right)^n}{\left(\frac{2}{t}\right)^n+1}=0.$$

当 $t=2$ 时，

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n+t^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}=1.$$

当 $|t|<2$ 时，

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n+t^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{2^n}}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^n}=2.$$

所以 A 中元素的个数 $|A|=3$，其真子集的个数为 $2^3-1=7$.

3. 集合 $X=\left\{n\,\middle|\,\frac{3^n+4^n}{5}\in\mathbf{N}_+,n\in\mathbf{N}_+\right\}$，$Y=\{y\mid y=(2k-1)^2+1,k\in\mathbf{N}_+\}$，则 $\underline{Y\subset X}$.

解 $n\in\mathbf{N}_+$，3^n 个位数字为 3，9，7，1，3，9，7，1，…；4^n 个位数字为 4，6，4，6，4，6，4，6，….

$\therefore X=\{n\mid n=4k-2,k\in\mathbf{N}_+\}$，而 $Y=\{y\mid y=4(k^2-k+1)-2,k\in\mathbf{N}_+\}$. $\therefore Y\subset X$.

4. 集合 $\{1000,1001,\cdots,2007\}$ 中两相邻自然数，它们相加时不出现进位的对数为 $\underline{161}$.

解 设 $n=\overline{1abc}$，若 a,b,c 中任意一个为 5，6，7 或 8 时，$n+(n+1)$ 将出现进位.

若 $a,b,c\in\{0,1,2,3,4\}$，均不会出现进位，而 a,b,c 中有 9 时，分析可知：

1999，$\overline{1a99}$，$\overline{1ab9}$ $(a,b\in\{0,1,2,3,4\})$ 形式的数，$n+(n+1)$ 不会进位.

又 2000＋2001，2001＋2002，2002＋2003，2003＋2004，2004＋2005 均不进位，因而所求为：$5^3+1+5+5^2+5=161$.

5. 在复平面上，Rt$\triangle ABC$ 的三个顶点 A，B，C 分别对应于复数 $z+1$，$2z+1$，$(z+1)^2$，A 为直角顶点，且 $|z|=2$. 设集合 $M=\{m\mid z^m\in\mathbf{R},m\in\mathbf{N}\}$，$P=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{1}{2^m},m\in M\right\}$，

则集合 P 中所有元素之和等于 $\underline{\frac{8}{7}}$.

解 $\overrightarrow{AB}=2z+1-(z+1)=z$,

$\overrightarrow{AC}=(z+1)^2-(z+1)=z^2+z$

由 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\frac{z^2+z}{z}=z+1$ 为纯虚数,由 $|z|=2$ 得 $z=-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$.

① 当 $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3})$ 时,

$$z^m=2^m(\cos\frac{2m\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2m\pi}{3})\in\mathbf{R},$$

则 $\sin\frac{2m\pi}{3}=0$.

$\therefore\ \frac{2m\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{N})\Rightarrow m=\frac{3}{2}k$,

令 $k=2k',m=3k'$.

② 当 $z=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3})$ 时,

$$z^m=2^m(\cos\frac{4m\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4m\pi}{3})\in\mathbf{R},$$

则 $\sin\frac{4m\pi}{3}=0$.

$\therefore\ \frac{4m\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{N})\Rightarrow m=\frac{3}{4}k$,

令 $k=4k',m=3k'$.

故集合 $M=\{m\mid m=3k,k\in\mathbf{N}\}$

$$\therefore\ \sum_{i\in P}i=\sum_{m\in M}\frac{1}{2^m}=\sum_{k=0}\frac{1}{2^{3k}}=\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}.$$

6. 用 $\sigma(S)$ 表示非空的整数集合 S 的所有元素的和.设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{11}\}$ 是正整数的集合,且 $a_1<a_2<\cdots<a_{11}$;又设对每个正整数 $n\leqslant1500$,都存在 A 的子集 S,使得 $\sigma(S)=n$.则 a_{10} 的最小可能值是 $\underline{248}$.

分析 要求 a_{10} 的最小值,显然应使 $\sigma(A)=1500$.由题设,应使 a_{11} 尽可能大,且前 10 个数之和不小于 750,故取 $a_{11}=750$.考虑整数的二进制表示,由 $1+2+\cdots+2^7=255$ 知,前 8 个数应依次为 1,2,4,8,16,32,64,128.这时 $a_9+a_{10}=495$,从而有 $a_{10}=248$.

解 取 $A_0=\{1,2,4,8,16,32,64,128,247,248,750\}$,易知 A_0 满足题目要求,且 $a_{10}=248$.故 a_{10} 的最小可能值不超过 248.

另一方面,a_{10} 不可能比 248 更小.这是因为前 10 个数之和不能小于 750,否则设 $\sum_{i=1}^{10}a_i=m,m<750$,则 $a_{11}=1500-m$,对 $n\in(m,1500-m)$,显然不存在 A 的子集 S,使 $\sigma(S)=n$.因 $1+2+\cdots+2^7=255$,由整数的二进制表示知,其前 8 个数之和最大为 255.故 a_9+a_{10} 的最小可能值为 495,从而 a_{10} 至少为 248.

综上知,a_{10} 的最小可能值为 248.

说明 本题采用了构造法.直接构造一个符合题设的 A_0,然后证明 A_0 具有所要求的性质.这种方法在解有关集合和组合的问题中经常用到.

7. 记集合 $T=\{0,1,2,3,4,5,6\}$,$M=\left\{\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4}\middle|a_i\in T,i=1,2,3,4\right\}$,将 M 中的元素按从大到小顺序排列,则第 2005 个数是 $\underline{\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}}$.

解 用 $(a_1a_2\cdots a_k)_p$ 表示 k 位 p 进制数,将集合 M 中的元素都乘以 7^4,得:

$M'=\{a_1\cdot7^3+a_2\cdot7^2+a_3\cdot7+a_4\mid a_i\in T,i=1,2,3,4\}=\{(a_1a_2a_3a_4)_7\mid a_i\in T,i=1,2,3,4\}$.

M' 中,最大的数是 $(6666)_7=(2400)_{10}$,

在十进制中,从 2400 起按从大到小的顺序排列的第 2005 个数是 $2400-2004=396$,

而 $(396)_{10}=(1104)_7$,因而所求的数为 $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}$.

也可直接用排列组合求解:

a_1 取 6,5,4,3,2,1 对应的 M 中的元素分别均有 $7^3=343$ 个,共有 $343\times6=2058$ 个.

其中,$a_1=1,a_2=0$ 时有 $7\times7=49$ 个,$2058-49=2009$,因而第 2005 个数对应 $a_1=1$,$a_2=1,a_3=0,a_4=4$,即所求的数为 $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+$

$\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}$.

8. 设 $A=\{x \mid x^2-4x+3<0, x\in \mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid 2^{1-x}+a\leqslant 0, x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0, x\in \mathbf{R}\}$.

若 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是 <u>$-4\leqslant a\leqslant -1$</u>.

解　由已知可得 $A=\{x \mid 1<x<3\}$.

设 $f(x)=2^{1-x}+a$,

$g(x)=x^2-2(a+7)x+5$

要使 $A\subseteq B$,只需 $f(x)$,$g(x)$ 在 $(1,3)$ 上的图象均在 x 轴的下方,则:

$f(1)\leqslant 0, f(3)\leqslant 0, g(1)\leqslant 0, g(3)\leqslant 0$,

由此可解得 $-4\leqslant a\leqslant -1$.

9. 将集合 $\{1,2,\cdots,10\}$ 中的数分成两组,使得第一组数的乘积 P_1 能被第二组数的乘积 P_2 整除,则 $\frac{P_1}{P_2}$ 的最小值为 <u>7</u>.

解　因为 7 是质数,且不能被约掉,所以,它一定在第一组中,且有 $\frac{P_1}{P_2}\geqslant 7$.

当 $P_1=3\times5\times6\times7\times8$, $P_2=1\times2\times4\times9\times10$ 时,最小值 7 可以取得.

10. 已知 m,n 都是非零实数,且满足两集合 $A=\{z \mid |z+ni|+|z-mi|=n, z\in\mathbf{C}\}$ 和 $B=\{z \mid |z+ni|-|z-mi|=-m, z\in\mathbf{C}\}$ 都是非空集合,则 $\frac{n}{m}$ 的取值范围是 <u>$(-\infty,-2]$</u>.

解　由条件,$n=|z+ni|+|z-mi|\geqslant |(z+ni)-(z-mi)|=|m+n|$,

故 $n>0>m$;

又 $-m=|z+ni|-|z-mi|\leqslant|(z+ni)-(z-mi)|=|m+n|$,从而 $m+n>0$.

于是 $-m\leqslant m+n$,即 $-2m\leqslant n$,从而 $\frac{n}{m}\leqslant -2$.

11. 对有限集合 A,存在函数 $f:\mathbf{N}_+\to A$,具有性质:若 $|i-j|$ 是素数,则 $f(i)\neq f(j)$.则 A 的元素个数的最小值为 <u>4</u>.

解　1,3,6,8 中任两数之差的绝对值为素数,$\therefore$ $f(1)$,$f(3)$,$f(6)$,$f(8)$ 两两不同,$\therefore$ $|A|\geqslant 4$.

又 $f(4k+1)=f(1)$, $f(4k+2)=f(6)$, $f(4k+3)=f(3)$, $f(4k+4)=f(8)$, $(k=0,1,2,\cdots)$ 是满足要求的函数.$\therefore$ $|A|=4$.

12. 以 $\left[\frac{1^2}{2007}\right]$, $\left[\frac{2^2}{2007}\right]$, $\cdots$, $\left[\frac{2007^2}{2007}\right]$ 的值为元素组成的集合中,元素个数为 <u>1506</u>.

解　当 $\frac{(n+1)^2}{2007}-\frac{n^2}{2007}\geqslant 1$,即 $n\geqslant 1003$ 时,$\left[\frac{n^2}{2007}\right]$, $\left[\frac{(n+1)^2}{2007}\right]$ 的值相异,因而 $n\geqslant 1003$ 的元素有 1005 个;

当 $\frac{(n+1)^2}{2007}-\frac{n^2}{2007}<1$,即 $n\leqslant 1002$ 时,$\left[\frac{n^2}{2007}\right]$, $\left[\frac{(n+1)^2}{2007}\right]$ 的差为 1 或 0,故这样的元素个数为 $\left[\frac{1002^2}{2007}\right]+1=501$.

综上所述,集合中的元素个数为 $1005+501=1506$.

13. 设 S 是所有有理数 r 组成的集合,其中 $0<r<1$,并且它有循环的十进制表示形式:$0.abcabcabc\cdots=0.\dot{a}b\dot{c}$,这里数字 a,b,c 不必互不相同,把 S 中的元素写成最简分数的形式,那么分子不同的取值共有 <u>660</u> 个.(用数字作答)

解　$\because$ $r=0.\dot{a}b\dot{c}=\frac{\overline{abc}}{999}$, $999=3^3\times37$.

(1) 若 3 不整除 $\overline{abc}$,且 37 也不整除 $\overline{abc}$.则 r 已为最简分数形式,由容斥原理,知一共有:

$$999-\frac{999}{3}-\frac{999}{37}+\frac{999}{3\times37}=648.$$

(2) 若 $37\mid\overline{abc}$ 但 3 不整除 $\overline{abc}$,则 $r=\frac{m}{27}$, $1\leqslant m<27$, $\therefore$ $(m,999)=1$.

这些 m 已包含在情形(1)中的分子中.

(3) 除(1)外的最简分数分子必须形如:$r=\frac{k}{37}$, $3\mid k$ 或 $r=\frac{n}{37\cdot 3^m}$, $m=1,2$, $n<3^m$.因而 $k=1,2,3,\cdots,12$, n 无解.

所求为 $648+12=660$.

另解：1到999中不被3整除的数有666个，其中被37整除的数有$\frac{999}{37}-\frac{999}{3\times37}=18$个．此外，形如$\frac{3m}{37}(m=1,2,3,\cdots,12)$的12个分数也可由$\frac{\overline{abc}}{999}$得到．

因而所求为$666-18+12=660$个．

14. 已知一个4元集合S的所有子集的元素和(空集的元素和认为是零)的总和等于16056，则S的元素之和等于__2007__．

解 在求所有子集元素和总和的时候，集合的每一个元素都被重复求和计算$2^3=8$次，故集合S的元素之和为$\frac{16056}{8}=2007$．

15. 设r,s,t为整数，集合$\{a\mid a=2^r+2^s+2^t,0\leqslant t<s<r\}$中的数由小到大组成数列$\{a_n\}$：7，11，13，14，…，则$a_{36}=$__131__．

解 $\because r,s,t$为整数且$0\leqslant t<s<r$，$\therefore r$最小取2，此时符合条件的数有$C_2^2=1$．

$r=3$，s,t可在0，1，2中取，符合条件的数有$C_3^2=3$．

同理，$r=4$时，符合条件的数有$C_4^2=6$．

$r=5$时，符合条件的数有$C_5^2=10$．

$r=6$时，符合条件的数有$C_6^2=15$．

$r=7$时，符合条件的数有$C_7^2=21$．

因此，a_{36}是$r=7$中的最小值，即$a_{36}=2^0+2^1+2^7=131$．

16. 考虑实数x在三进制中的表达式．K是区间$[0,1]$内所有这样的数x的集合，并且x的每位数字是0或2．如果$S=\{x+y\mid x,y\in K\}$，则化简$S=$__$[0,2]$__．

解 在K内x和y的每位数字是0或2，因此，$\frac{x}{2}$和$\frac{y}{2}$的每位数字是0或1，从而$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$的每位数字在三进制下是0、1或2，并且由$x\in[0,1]$、$y\in[0,1]$可知$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\in[0,1]$．

反过来，对于$[0,1]$上的任何一个数，它在三进制下的每位数字是0、1或2，显然可以写成两个在三进制下每位数字是0或1的数的和．也就是说，都可以写成$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$，$x,y\in K$的形式．

因为有$\left\{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\mid x,y\in K\right\}=[0,1]$，故得$S=\{x+y\mid x,y\in K\}=[0,2]$．

17. 求由正整数组成的集合S，使S中的元素之和等于元素之积．

解 设$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$a_1<a_2<\cdots<a_n$．则$a_1a_2\cdots a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n<na_n$．

$\therefore 1\cdot2\cdots(n-1)\leqslant a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}<n$．

若$n\geqslant4$，则$n>2(n-1)$，得$n<2$，矛盾！所以$n\leqslant3$．

当$n=3$时，$a_1a_2a_3=a_1+a_2+a_3<3a_3$，$\therefore a_1a_2<3$，$\therefore a_1=1,a_2=2$．

经检验$S=\{1,2,3\}$，符合要求．

当$n=2$时，$a_1a_2=a_1+a_2<2a_2$，$\therefore a_1<2$，$\therefore a_1=1$，代入得$0=1$，矛盾！

当$n=1$时，$S=\{a\}$，$a\in\mathbf{N}_+$，符合要求．

18. 设集合$A=(-3,-2)$．已知$x,y\in\mathbf{N}$，$x>y$，$x^3+19y=y^3+19x$．

试判断$a=\log_{\frac{1}{2}}(x+y)$与集合$A$的关系．

分析 解决本题的关键在于由已知条件确定$x+y$的取值范围，从而利用对数函数的单调性确定$a=\log_{\frac{1}{2}}(x+y)$的范围．

解 因为$x^3-y^3=19(x-y)$且$x,y\in\mathbf{N}$，$x>y$，

所以$x^2+x<x^2+xy+y^2=19<3x^2$，由此及$x\in\mathbf{N}$得$x=3$，从而$y=2$．

所以$-3<a=\log_{\frac{1}{2}}(3+2)=\log_{\frac{1}{2}}5<-2$，即$a\in A$．

19. 以某些整数为元素的集合P具有下列性质：

① P中的元素有正数，有负数；

② P中的元素有奇数，有偶数；

③ $-1\notin P$；

④ 若$x,y\in P$，则$x+y\in P$．

试判断实数0和2与集合P的关系．

解 由④若$x,y\in P$，则$x+y\in P$可知，若$x\in P$，则$kx\in P(k\in\mathbf{N}_+)$．

(1) $0 \in P$.

由 ① 可设 $x, y \in P$，且 $x > 0, y < 0$，则 $-yx = |y| x(|y| \in \mathbf{N}_+)$.

故 $xy, -yx \in P$，由 ④，$0 = (xy) + (-yx) \in P$.

(2) $2 \notin P$.

若 $2 \in P$，则 P 中的负数全为偶数，不然的话，当 $-(2k+1) \in P(k \in \mathbf{N})$ 时，$-1 = -2k-1+2k \in P$，与 ③ 矛盾.

于是，由 ② 知 P 中必有正奇数. 设 $-2m, 2n-1 \in P(m, n \in \mathbf{N}_+)$，取适当正整数 q，使 $q \cdot |-2m| > 2n-1$，则负奇数 $-2qm + (2n-1) \in P$. 前后矛盾.

20. 设 S 为满足下列条件的有理数的集合：

① 若 $a \in S, b \in S$，则 $a+b \in S, ab \in S$；

② 对任一个有理数 r，三个关系 $r \in S, -r \in S, r = 0$ 有且仅有一个成立.

证明：S 是由全体正有理数组成的集合.

证明　设任意的 $r \in \mathbf{Q}, r \neq 0$，由 ② 知 $r \in S$，或 $-r \in S$ 之一成立. 再由 ①，若 $r \in S$，则 $r^2 \in S$；若 $-r \in S$，则 $r^2 = (-r) \cdot (-r) \in S$. 总之，$r^2 \in S$.

取 $r = 1$，则 $1 \in S$. 再由 ① 知 $2 = 1+1 \in S, 3 = 1+2 \in S, \cdots$，故全体正整数都属于 S.

设 $p, q \in \mathbf{N}_+, p, q \in S$，由 ① $pq \in S$，又由前证知 $\frac{1}{q^2} \in S$，所以 $\frac{p}{q} = pq \cdot \frac{1}{q^2} \in S$.

因此，S 含有全体正有理数.

再由 ② 知，0 及全体负有理数不属于 S. 即 S 是由全体正有理数组成的集合.

21. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，f_k 是集合 $\{a_i \mid a_i < a_k, i > k\}$ 元素的个数，而 g_k 是集合 $\{a_i \mid a_i > a_k, i < k\}$ 元素的个数 $(k = 1, 2, \cdots, n)$，证明 $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$.

证明　考虑集合 $S = \{(a_i, a_k) \mid a_i < a_k, i > k\}$ 的元素个数 $|S|$.

一方面，固定 k 先对 i 求和，然后再对 k 求和，得 $|S| = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$；

另一方面，固定 i 先对 k 求和，然后再对 i 求和，又得到 $|S| = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$；

所以得 $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$.

22. 从数集 $\{3, 4, 12\}$ 开始，每一次从其中任选两个数 a, b，用 $\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b$ 和 $\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b$ 代替它们. 能否通过有限多次代替得到数集 $\{4, 6, 12\}$.

解　对于数集 $\{a, b, c\}$，经过一次替代后，得出 $\left\{\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b, \frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b, c\right\}$，

有 $\left(\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b\right)^2 + \left(\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b\right)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$，

即每一次替代后，保持 3 个元素的平方和不变(不变量).

由 $3^2 + 4^2 + 12^2 \neq 4^2 + 6^2 + 12^2$ 知，不能由 $\{3, 4, 12\}$ 替换为 $\{4, 6, 12\}$.

23. 如果存在 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得 $k + a_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 都是完全平方数，则称 n 为"好数". 问：在集合 $\{11, 13, 15, 17, 19\}$ 中，哪些是"好数"，哪些不是"好数"?说明理由.

解　除了 11 之外都是"好数".

(1) 易知 11 只能与 5 相加得到 4^2，而 4 也只能与 5 相加得到 3^2. 因此，不存在满足条件的排列，所以 11 不是"好数".

(2) 13 是"好数"，因为如下的排列中，$k + a_k (k = 1, 2, \cdots, 13)$ 都是完全平方数：

k：1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12　13

a_k：8　2　13　12　11　10　9　1　7　6　5　4　3

(3) 15 是"好数"，因为如下的排列中，$k + a_k (k = 1, 2, \cdots, 15)$ 都是完全平方数：

k：1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12　13　14　15

a_k：15　14　13　12　11　10　9　8　7　6　5　4　3　2　1

(4) 17 是"好数"，因为如下的排列中，$k + a_k (k = 1, 2, \cdots, 17)$ 都是完全平方数：

k：1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

a_k：3 7 6 5 4 10 2 17 16 15 14 13 12 11 1 9 8

其中用到了轮换(1,3,6,10,15).

(5) 19 是"好数",因为如下的排列中,$k+a_k(k=1,2,\cdots,19)$ 都是完全平方数：

k：1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

a_k：8 7 6 5 4 3 2 1 16 15 14 13 12 11 10 9 19 18 17

24. 设 S 是一个由正整数组成的集合,具有如下性质：对任意 $x\in S$,在 S 中去掉 x 后,剩下的数的算术平均数都是正整数,并且 $1\in S$,1001 是 S 中的最大元.

求 $|S|$ 的最大值.

解 设 S 中的元素为：$1=x_1<x_2<\cdots<x_n=1001$,设 S 所有元素之和为 A.

则对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 有：$y_i=\dfrac{A-x_i}{n-1}\in\mathbf{N}_+$,$y_j=\dfrac{A-x_j}{n-1}\in\mathbf{N}_+$,且 $y_i>y_j$,

$\therefore\ y_i-y_j=\dfrac{x_j-x_i}{n-1}\in\mathbf{N}_+$.

$\therefore\ (n-1)\mid(x_j-x_i)$,$n-1\leqslant x_j-x_i$.

特别地,取 $i=1$,$j=n$,则可得：

$$(\text{Ⅰ})\ 1001-1=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_3-x_2)+(x_2-x_1)\geqslant(n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1)=(n-1)^2,$$

$\because\ 961=31^2<1000<32^2=1024$,

$\therefore\ n\leqslant 32$,

$(\text{Ⅱ})\ \because\ \dfrac{1001-1}{n-1}\in\mathbf{N}^+$,

$\therefore\ (n-1)\mid 1000$.

$\because\ 1000=2^3\times 5^3$.

由(Ⅰ)、(Ⅱ)可得 n 的最大值为 26.

又当 $n=26$ 时,取 $S=\{1,25i_1+1,25i_2+1,\cdots,25i_{24}+1,1001\}$ 均满足题意,其中：

$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{24}\leqslant 39$.

$\therefore\ |S|$ 的最大值为 26.

25. 设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是整数集,其中 $n>1$,对于 S 的非空子集 A,定义 $P(A)$ 为 A 的一切整数的乘积,设 $m(S)$ 表示 $P(A)$ 的算术平均数,这里 A 遍历 S 的一切非空子集,若 $m(S)=13$,且有一正整数 a_{n+1} 使得 $m(S\cup\{a_{n+1}\})=49$,试确定 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 a_{n+1} 的值.

解
$$\because\ \sum_{A\subseteq S}P(A)=a_1+a_2+\cdots+a_n+a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-1.$$

又 S 的非空子集个数为 2^n-1,

$\therefore\ m(S)=\dfrac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-1}{2^n-1}$,

即 $(2^n-1)\cdot m(S)+1=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$.

$\therefore\ (2^{n+1}-1)\cdot m(S\cup\{a_{n+1}\})+1=[(2^n-1)\cdot m(S)+1](1+a_{n+1})$.

$\because\ m(S)=13$,$m(S\cup\{a_{n+1}\})=49$,

$\therefore\ (2^{n+1}-1)\cdot 49+1=[(2^n-1)\cdot 13+1](1+a_{n+1})$.

$\therefore\ 2^n=\dfrac{13a_{n+1}-36}{13a_{n+1}-85}>2$,解得 $a_{n+1}=7,8$ 或 9.

经验证：$a_{n+1}=7$,$n=3$.

此时,$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)=(2^3-1)m(S)+1=7\times 13+1=92=2\times 2\times 23$.

$\because\ 1+a_1,1+a_2,1+a_3$ 两两不相等,

$\therefore$ 它们可以分别取：$1,-1,-92$；$-2,2,-23$；$1,2,46$；$1,4,23$；$-1,-2,46$；$-1,2,-46$；$1,-2,-46$；$-1,-4,23$；$-1,4,-23$；$1,-4,-23$.

$\therefore\ S=\{0,1,45\},\{0,3,22\},\{-2,-3,45\},\{-2,1,-47\},\{0,-3,-47\},\{-2,-5,22\},\{-2,3,-24\},\{0,-5,-24\},\{0,-2,-93\},\{-3,1,-24\}$.

即 $n=3$,$a_{n+1}=a_4=7$,a_1,a_2,a_3 的值共有 $10\times A_3^3=60$ 组解.

2　集合运算

26. 设集合 $A=\{x\mid x^2-x-2<0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2-1\geqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$ $\underline{\{x\mid 1\leqslant x<2\}}$.

解　$x^2-x-2<0\Rightarrow(x-2)(x+1)<0\Rightarrow -1<x<2$，

$x^2-1\geqslant 0\Rightarrow |x|\geqslant 1\Rightarrow x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$.

从而可得 $A\cap B=\{x\mid 1\leqslant x<2\}$.

27. 设集合 $A=\{x\mid 5x-a\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 6x-b>0\}$，$a,b\in\mathbf{N}$，且 $A\cap B\cap\mathbf{N}=\{2,3,4\}$. 则整数对$(a,b)$ 的个数为 $\underline{\ 30\ }$ 个.

解　$5x-a\leqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant\dfrac{a}{5}$；

$6x-b>0\Leftrightarrow x>\dfrac{b}{6}$.

要使 $A\cap B\cap\mathbf{N}=\{2,3,4\}$，

则 $\begin{cases}1\leqslant\dfrac{b}{6}<2\\ 4\leqslant\dfrac{a}{5}<5\end{cases}$，即 $\begin{cases}6\leqslant b<12\\ 20\leqslant a<25.\end{cases}$

所以数对(a,b) 共有 $C_6^1C_5^1=30$ 个.

28. 设 a 是实数，$A=\{x\mid x\in\mathbf{R},x^2+2ax+3\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid x\in\mathbf{R},x^2-ax-4\leqslant 0\}$，若有$[-1,1]\subseteq A\cap B$，则实数 a 的取值范围是 $\underline{[-2,2]}$.

解　$[-1,1]\subseteq A\cap B\Leftrightarrow[-1,1]\subseteq A$，且 $[-1,1]\subseteq B$.

记 $f(x)=x^2+2ax+3=(x+a)^2-a^2+3$，$g(x)=x^2-ax-4=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-4$.

$[-1,1]\subseteq A\Leftrightarrow\begin{cases}-a\geqslant 1\\ f(1)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-a\leqslant -1\\ f(-1)>0\end{cases}$ 或 $\Delta<0\Leftrightarrow -2\leqslant a\leqslant 2$，

$[-1,1]\subseteq B\Leftrightarrow\begin{cases}g(-1)\leqslant 0\\ g(1)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\leqslant a\leqslant 3$.

综上所述，所求实数 a 的取值范围是$[-3,3]\cap[-2,2]=[-2,2]$.

29. 记$[x]$为不大于 x 的最大整数，设有集合 $A=\{x\mid x^2-[x]=2\}$，$B=\{x\mid |x|<2\}$，则 $A\cap B=$ $\underline{\{\sqrt{3},-1\}}$.

解　如果 $x\in A$，则 $x^2-[x]=2$，$x^2=[x]+2\leqslant x+2$，由此得 $-1\leqslant x\leqslant 2$.

$\therefore$ $[x]=-1,0,1,2$；$x^2=[x]+2=1,2,3,4$；$x=1,\sqrt{2},\sqrt{3},2$ 或 $-1,-\sqrt{2},-\sqrt{3},-2$；

代入方程 $x^2-[x]=2$ 验证可得 $x=\sqrt{3},2,-1$. $\therefore$ $A\cap B=\{\sqrt{3},-1\}$.

30. 若 $M=\{(x,y)\mid |\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是 $\underline{\ 9\ }$ 个.

解　由 $|\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0$，得 $\tan\pi y=0$ 且 $\sin\pi x=0$，$\therefore$ $\pi y=k_1\pi$ 且 $\pi x=k_2\pi$.

$\therefore$ $y=k_1$ 且 $x=k_2$，其中 $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，即 $M=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$.

$\therefore$ $M\cap N=\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(1,1),(1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,-1)\}$，共 9 个.

31. 集合 A,B,C(不必两两相异）的并集 $A\cup B\cup C=\{1,2,\cdots,n\}$. 则满足条件的三元有序集合组$(A,B,C)$ 的个数是 $\underline{\ 7^n\ }$.

解　集合$\{1,2,\cdots,n\}$ 中的每一个元素都可能在：

$A\cap(\overline{B\cup C})$，$B\cap(\overline{A\cup C})$，$C\cap(\overline{B\cup A})$，$\overline{A}\cap B\cap C$，$A\cap\overline{B}\cap C$，$A\cap B\cap\overline{C}$，$A\cap B\cap C$

这七个两两不交的集合中的任何一个中，故所为 7^n.

32. 设 $A=\{x\mid\cos 2x+2(1+\sqrt{2})\sin x-(2\sqrt{2}+1)>0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid\sin x\geqslant\cos x,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$ $\underline{\ \varnothing\ }$.

解　$\cos 2x+2(1+\sqrt{2})\sin x-(2\sqrt{2}+1)>0\Leftrightarrow\sin^2x-(1+\sqrt{2})\sin x+\sqrt{2}<0\Leftrightarrow(\sin x-\sqrt{2})(\sin x-1)<0$.

没有实数 x 可以使上述不等式成立. 故 $A=\varnothing$. 从而有 $A\cap B=\varnothing$.

33. 已知 $M=\{(x,y)\mid x^2+2y^2=3\}$，

$N=\{(x,y)\mid y=mx+b\}$. 若对所有 $m\in\mathbf{R}$，均有 $M\cap N\neq\varnothing$，则 b 的取值范围是 $\underline{\left[-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right]}$.

解 $M\cap N\neq\varnothing$ 相当于点 $(0,b)$ 在椭圆 $x^2+2y^2=3$ 上或它的内部.

$\therefore \frac{2b^2}{3}\leqslant 1$，$\therefore -\frac{\sqrt{6}}{2}\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$.

34. 已知两复数的集合：

$M=\{z\mid z=\cos\alpha+(4-\cos^2\alpha)\mathrm{i},\alpha\in\mathbf{R}\}$，$N=\{z\mid z=\cos\beta+(\lambda+\sin\beta)\mathrm{i},\beta\in\mathbf{R}\}$.

若 $M\cap N\neq\varnothing$，则实数 λ 的取值范围是 $\underline{\left[\frac{11}{4},5\right]}$.

解 $M\cap N\neq\varnothing$ 即方程组

$$\begin{cases}\cos\alpha=\cos\beta,\\ \lambda+\sin\beta=4-\cos^2\alpha\end{cases}$$

有实数解，所以
$$\begin{aligned}\lambda&=4-\cos^2\beta-\sin\beta\\&=\sin^2\beta-\sin\beta+3\\&=\left(\sin\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\\&\in\left[\frac{11}{4},5\right].\end{aligned}$$

另解：$M\cap N\neq\varnothing$ 即方程组

$$\begin{cases}x^2+y=4,3\leqslant y\leqslant 4,\\ x^2+(y-\lambda)^2=1\end{cases}$$

有实数解，消去 x，即方程 $g(y)=y^2-(2\lambda+1)y+\lambda^2+3=0$ 在 $[3,4]$ 上有实数解.

考虑到 $g(3)=\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2\geqslant 0$，则应有

$g(4)=\lambda^2-8\lambda+15\leqslant 0$ 或

$$\begin{cases}g(4)=\lambda^2-8\lambda+15>0,\\ \Delta=(2\lambda+1)^2-4(\lambda^2+3)\geqslant 0,\\ 3\leqslant\frac{2\lambda+1}{2}\leqslant 4,\end{cases}$$

解得：$3\leqslant\lambda\leqslant 5$ 或 $\frac{11}{4}\leqslant\lambda<3$.

即实数 λ 的取值范围是 $\left[\frac{11}{4},5\right]$.

35. 若 I 是全集，P,Q 是非空集合，又 $P\supset Q$，则 $(P\cup Q)\cap(\overline{P}\cup Q)=\underline{\ Q\ }$.

解 $\because P\supset Q$，

$\therefore P\cup Q=P$，$P\cap Q=Q$，

$\therefore (P\cup Q)\cap(\overline{P}\cup Q)=P\cap(\overline{P}\cup Q)=(P\cap\overline{P})\cup(P\cap Q)=Q$.

36. 已知 $M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$，若 $M\cap N=N$，则 a 的取值范围为 $\underline{\left[\frac{5}{4},+\infty\right)}$.

解 $\because M\cap N=N$，$\therefore N\subseteq M$.

由 $x^2+(y-a)^2\leqslant 1$ 得：

$x^2\leqslant y-y^2+(2a-1)y+(1-a^2)$.

$\therefore -y^2+(2a-1)y+(1-a^2)\leqslant 0$，

$\therefore \Delta=(2a-1)^2+4(1-a^2)\leqslant 0$，

$\therefore a\geqslant\frac{5}{4}$.

注：也可以用数形结合法解.

37. 设 $M=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-6}{5}+\frac{x-5}{6}=\frac{5}{x-6}+\frac{6}{x-5}\right\}$.

则 $M\cap N=\underline{\ \{0\}\ }$.

解 由已知可以解出 $M=\left\{0,5,\frac{13}{5}\right\}$，$N=\left\{0,11,\frac{61}{11}\right\}$. 故 $M\cap N=\{0\}$.

38. 设 a 为实数，集合 $A=\{-a,a^2,a^2+a\}$，$B=\{-1,-1-a,1+a^2\}$，$A\cap B\neq\varnothing$.

则 $A\cap B=\underline{\ \{-1,2\}\ }$.

解 由 $A\cap B\neq\varnothing$ 可得 $a=1$.

39. 已知 $A=\{(x,y)\mid y\geqslant|x-a|\}$，$B=\{(x,y)\mid y\leqslant -a|x|+2a\}(0<a<2)$，则由 $A\cap B$ 中的点组成的图形的面积为 $\underline{\frac{4a^2-a^3}{1+a}}$.

解 点集 A 表示以 $P(a,0)$ 为转折点的折线，B 表示以 $Q(0,2a)$ 为转折点的折线，与 x 轴交于点 $M(-2,0)$ 和 $N(2,0)$，又当 $0<a<2$ 时，两折线交点为 $E\left(-\frac{a}{a+1},\frac{a^2+2a}{a+1}\right)$、$F\left(\frac{3a}{a+1},\frac{2a-a^2}{a+1}\right)$，且 $A\cap B$ 对应四边形 $QEPF$.

$$S_{QEPF}=S_{\triangle QMN}-S_{\triangle EMP}-S_{\triangle FPN}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2a-\frac{1}{2}\cdot(a+2)\cdot\frac{a^2+2a}{a+1}$$
$$-\frac{1}{2}\cdot(2-a)\cdot\frac{2a-a^2}{a+1}$$
$$=\frac{4a^2-a^3}{1+a}.$$

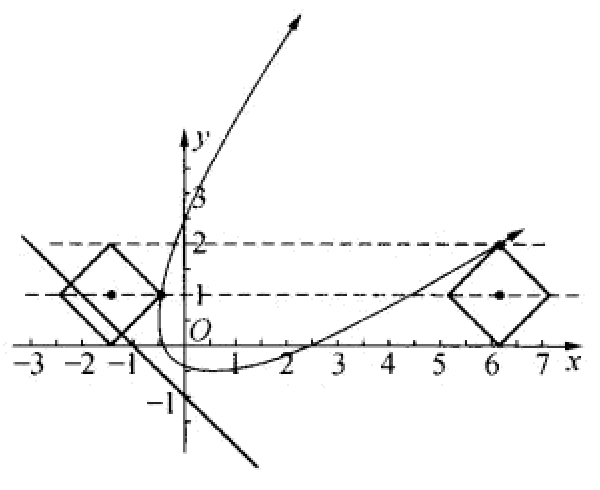
40. 已知平面上两个点集：

$M=\{(x,y)\mid |x+y+1|\geqslant\sqrt{2(x^2+y^2)},x,y\in\mathbf{R}\}$，

$N=\{(x,y)\mid |x-a|+|y-1|\leqslant 1,x,y\in\mathbf{R}\}$.

若 $M\cap N\neq\varnothing$，则 a 的取值范围是 $\underline{[1-\sqrt{6},3+\sqrt{10}]}$.

解　由题意知 M 是以原点为焦点、直线 $x+y+1=0$ 为准线的抛物线上及其凹口内侧的点集，N 是以 $(a,1)$ 为中心的正方形及其内部的点集（如图）.



考察 $M\cap N=\varnothing$ 时，a 的取值范围：

令 $y=1$，代入方程 $|x+y+1|=\sqrt{2(x^2+y^2)}$，

得　$x^2-4x-2=0$，

解出得　$x=2\pm\sqrt{6}$.

所以，当 $a<2-\sqrt{6}-1=1-\sqrt{6}$ 时，$M\cap N=\varnothing$.

令 $y=2$，代入方程 $|x+y+1|=\sqrt{2(x^2+y^2)}$，得 $x^2-6x-1=0$. 解出得 $x=3\pm\sqrt{10}$.

所以，当 $a>3+\sqrt{10}$ 时，$M\cap N=\varnothing$.

因此，综合上述知，当 $1-\sqrt{6}\leqslant a\leqslant 3+\sqrt{10}$，即 $a\in[1-\sqrt{6},3+\sqrt{10}]$ 时，$M\cap N\neq\varnothing$.

41. 定义：$X-Y=\{x\mid x\in X,x\notin Y\}$. 化简：

$(((A\cup(B-C))\cap A)\cup(B-(B-A)))\cap(C-A)$.

解　$(((A\cup(B-C))\cap A)\cup(B-(B-A)))\cap(C-A)$

$=(A\cup(A\cap B))\cap(C-A)=A\cap(C-A)=\varnothing$.

42. 若 $M=\left\{z\,\middle|\,z=\frac{t}{1+t}+\mathrm{i}\frac{1+t}{t},t\in\mathbf{R},t\neq-1,t\neq 0\right\}$，$N=\{z\mid z=\sqrt{2}[\cos(\arcsin t)+\mathrm{i}\cos(\arccos t)],t\in\mathbf{R},|t|\leqslant 1\}$，

求 $M\cap N$ 中元素的个数.

解　$\because M=\left\{(x,y)\,\middle|\,x=\frac{t}{1+t},y=\frac{1+t}{t},t\neq 0,t\neq-1\right\}=\{(x,y)\mid xy=1,x\neq 1\}$，

$N=\{(x,y)\mid x=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-t^2},y=\sqrt{2}t,t\in\mathbf{R},|t|\leqslant 1\}=\{(x,y)\mid x^2+y^2=2,x\geqslant 0\}$，

$\therefore M\cap N=\{(x,y)\mid xy=1,x^2+y^2=2,x\geqslant 0,x\neq 1\}=\varnothing$，　$\therefore |M\cap N|=0$.

43. 已知两个集合：

$A=\{(x,y)\mid y=\sqrt[4]{4+2x-x^2},x\in\mathbf{R}\}$，

$B=\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\leqslant a^2,a>0\}$.

问：是否存在正实数 a，使得 $A\cap B=A$？如果存在，求 a 的值的集合；如果不存在，请说明理由.

解　假设存在这样的正实数 a 符合题目要求.

由 $A\cap B=A$，简化为 $A\subseteq B$，即二元方程 $y=\sqrt[4]{4+2x-x^2}$ 的实数解均是二元不等式 $(x-1)^2+y^2\leqslant a^2$ 的解，于是：

将 $y=\sqrt[4]{4+2x-x^2}$ 代入 $(x-1)^2+y^2\leqslant a^2$ 得：$(x-1)^2+\sqrt{4+2x-x^2}\leqslant a^2$.

设 $T(x)=(x-1)^2+\sqrt{4+2x-x^2}$，令 $t=\sqrt{4+2x-x^2}=\sqrt{5-(x-1)^2}\in[0,\sqrt{5}]$，

则 $T=5-t^2+t=-(t^2-t)+5$

$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{21}{4}.$

当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$T_{\max}=\frac{21}{4}.$

依题意得：$a^2\geqslant\frac{21}{4}$，∴ $a\geqslant\frac{\sqrt{21}}{2}.$

所以适合条件的 a 存在，a 的值构成的集合为 $\left\{a\mid a\geqslant\frac{\sqrt{21}}{2}\right\}$.

44. 设集合 $M=\{p\mid p=p(x,y)=2x^2-6xy+5y^2,x,y\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{0,1,2,\cdots,10\}$.

(1) 求 $M\cap N$；

(2) 证明：$\forall\, p_1,p_2\in M$，仍有 $p_1p_2\in M$.

解 (1) 因为 $p(x,y)=(x-y)^2+(x-2y)^2$，$x,y\in\mathbf{Z}$，所以 M 中元素 p 为两个整数的平方和的形式.

反之，若 p 是两个整数的平方和，设 $p=u^2+v^2$，$u,v\in\mathbf{Z}$，

令 $x-y=u$，$x-2y=v$，解得 $x=2u-v$，$y=u-v$，$x,y\in\mathbf{Z}$. 所以 $p\in M$.

因而 $M=\{p\mid p=p(x,y)=x^2+y^2,x,y\in\mathbf{Z}\}$.

然后对 $0,1,2,\cdots,10$ 一一验证，可得：$M\cap N=\{0,1,2,4,5,8,9,10\}$.

(2) 若 $p_1,p_2\in M$，设 $p_1=x_1^2+y_1^2$，$p_2=x_2^2+y_2^2$，$x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbf{Z}$，则

$p_1p_2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$

$=(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2\in M.$

45. 奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上有定义，且在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，$f(10)=0$. 又知函数 $g(\theta)=2\cos^2\theta+m\sin\theta-5m$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，集合 M、N 满足 $M=\{m\mid g(\theta)<0\}$，$N=\{m\mid f(g(\theta))>0\}$.

求 $M\cap N$.

解 ∵ 奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，

∴ 奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也是增函数.

∵ $f(10)=0$，

∴ $f(-10)=-f(10)=0$.

∴ $N=\{m\mid f(g(\theta))>0\}=\{m\mid g(\theta)>10$ 或 $-10<g(\theta)<0\}$.

∴ $M\cap N=\left\{m\mid -10<g(\theta)<0,\forall\,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

∵ $g(\theta)=2\cos^2\theta+m\sin\theta-5m=-2\sin^2\theta+m\sin\theta-5m+2$，

令 $\sin\theta=t$，则 $t\in[0,1]$，又设 $h(t)=2t^2-mt+5m-2=2\left(t-\frac{m}{4}\right)^2+\frac{-m^2+40m-16}{8}$.

则原命题等价于：函数 $h(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值大于 0，最大值小于 10，则

(1) 当 $\frac{m}{4}<0$ 时，函数 $h(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 $h(0)$，最大值为 $h(1)$.

$$\therefore\begin{cases}\frac{m}{4}<0,\\5m-2>0,\\2-m+5m-2<10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<0,\\m>\frac{2}{5},\\m<\frac{5}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow m\in\varnothing$.

(2) 当 $0\leqslant\frac{m}{4}\leqslant1$ 时，函数 $h(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 $h\left(\frac{m}{4}\right)$，最大值为 $h(0)$ 或 $h(1)$.

$$\therefore\begin{cases}0\leqslant\frac{m}{4}\leqslant1,\\\frac{-m^2+40m-16}{8}>0,\\5m-2<10,\\2-m+5m-2<10\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant m\leqslant4,\\20-8\sqrt{6}<m<20+8\sqrt{6},\\m<\frac{12}{5},\\m<\frac{5}{2}\end{cases}$$