高等院校工科专业研究生力学教材

工程弹性力学

THEORY OF ELASTICITY IN ENGINEERING

李兆霞　郭　力　编著

东　南　大　学　出　版　社

高等院校工科专业研究生力学教材

工程弹性力学

李兆霞　郭　力　编著

东南大学出版社
·南京·

内容提要

本书是为高等学校工程力学与相关工科专业本科生和研究生编写的弹性力学教材。其编写宗旨是，不仅要深入浅出地介绍经典弹性力学的主要内容，同时着重把握如何将工程问题转化为相应的弹性力学模型和运用弹性力学理论和方法解决工程问题。各章末附有习题供读者训练。

本书第一篇介绍弹性力学平面问题和空间问题的基本理论及其基本方程，侧重于经典弹性力学的基本方程和理论体系；第二篇介绍利用弹性力学的基本理论来求解经典弹性力学问题及其各类求解实例；第三篇介绍能量法和有限元法等弹性力学数值方法和一些相关软件；第四篇是弹性力学的工程应用，介绍如何将工程问题转化为相应的经典弹性力学模型或者数值模型来解决，同时介绍现代工程中的一些复杂弹性力学问题的分析过程。

本书的适用对象是工程力学和相关工科专业高年级本科生和研究生，亦可供从事应力分析和强度设计的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程弹性力学/李兆霞，郭力编著．—南京：东南大学出版社，2009.1
高等院校工科专业研究生力学教材
ISBN 978-7-5641-1456-5

Ⅰ.工… Ⅱ.①李… ②郭… Ⅲ.工程力学：弹性力学—研究生—教材 Ⅳ.TB125

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 172067 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)
出版人：江 汉
网 址：http://press.seu.edu.cn
电子邮件：press@seu.edu.cn
全国各地新华书店经销 江苏兴化印刷有限责任公司印刷
开本：787 mm×1092 mm 1/16 印张：14.25 字数：348 千字
2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5641-1456-5/TB・5
印数：1～3000 册 定价：36.00 元

前　　言

本书是为高等学校工程力学与相关工科专业本科生和研究生编写的弹性力学教材。

弹性力学是工程力学、机械设计与制造、土木工程、交通工程和材料工程等专业的核心课程和硕士研究生的学位课，是大学生将数理知识与工程问题相结合的一门技术基础课程，也是相关工程专业工程技术人员重要的基础理论知识之一。该课程对学生力学素质、逻辑思维能力、分析问题能力和创新能力的培养具有重要的作用。

根据编者长期讲授弹性力学课程的体会，弹性力学具有公式繁多、理论性强、对学生的数学基础要求高的特点，工科专业的学生和研究生在学习过程中有时会产生畏难情绪，难以把握和贯通各知识点，更难以将所学的弹性力学知识用于解决工程实际问题。因此，作为一本面向工程力学和相关工科专业本科生与研究生的新型弹性力学教材，本书的编写宗旨是，不仅要深入浅出地介绍经典弹性力学的主要内容，同时着重把握如何在工程实际中正确运用弹性力学理论和方法解决问题，主要包括：如何将工程问题转化为相应的弹性力学模型，如何运用弹性力学理论和方法求解工程中的问题。

本书的内容由四个部分组成：①基本理论与基本方程，主要介绍弹性力学平面问题和空间问题的基本理论及其基本方程，侧重于对经典弹性力学的基本方程和理论体系的介绍；②弹性力学解析方法与求解实例，介绍利用弹性力学的基本理论来求解经典弹性力学问题；③弹性力学的数值方法，介绍求解弹性力学问题的能量法、有限元方法和其他数值方法，同时介绍一些相关软件和新型数值方法的研究前沿；④弹性力学的工程应用，介绍如何将工程问题转化为相应的经典弹性力学模型或者数值模型来解决，同时介绍现代工程中的一些复杂弹性力学问题的分析过程。

本书中的上述四部分内容中，前两部分是弹性力学的基本内容，后两部分则是为拓宽和提高学生解决工程问题的途径和手段而编写的提高性的内容。对于不同的读者和不同的学时要求，可以根据需要对内容进行取舍。力学专业本科生应该掌握前三部分的内容，适当了解第四部分的内容，这样需要约 64 学时；其他工科专业本科生应该掌握前两部分中的主要内容(根据学时安排，可以不讲其中的空间问题)，适当了解第四部分的内容，约需 48 学时；工科专业研究生应该掌握所有四个部分的主要内容，需要 50 多学时；工程技术人员视其力学基础，可以重点阅读了解后三个部分的主要内容。

限于编者的水平和能力，书中难免有疏漏和笔误之处，恳请读者不吝赐教。

目　　录

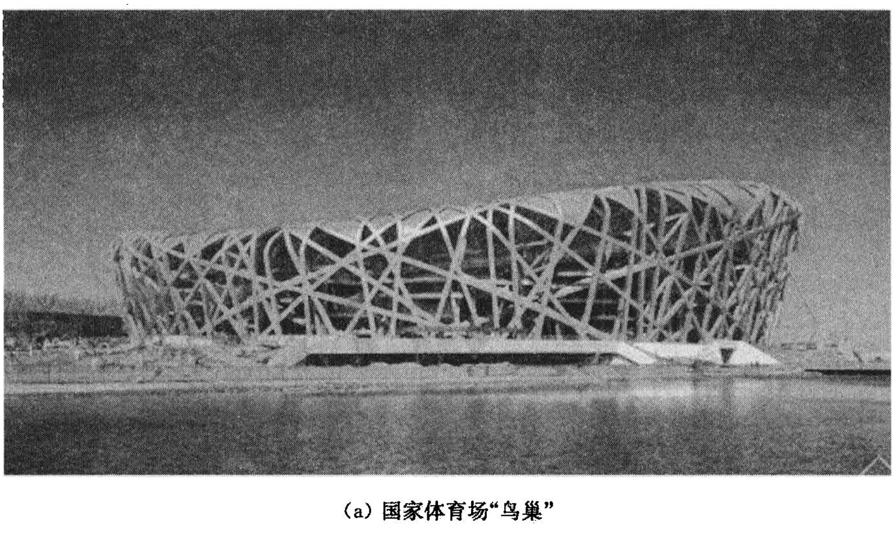
1 绪 论

在具体了解弹性力学理论和方法以前，我们首先有必要了解弹性力学是一门什么样的学科，主要研究哪些类型的工程问题，弹性力学的主要任务和主要内容是什么，它建立在哪些基本概念和基本假定的基础之上。

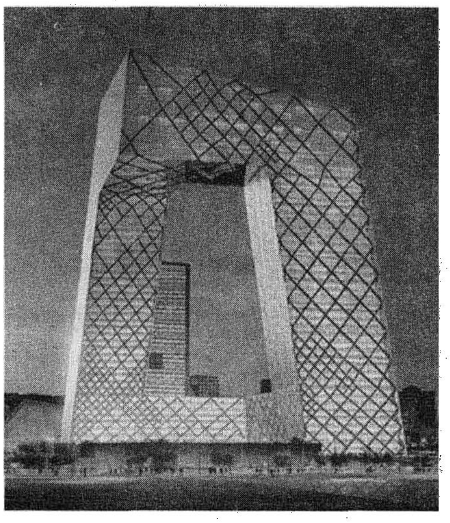
1.1 工程中的弹性力学问题

与其他自然科学知识的发展类似，弹性力学也是应工业发展和工程需要而发展起来的。在工程设计、分析和计算中存在大量的弹性力学问题，这里我们不妨看一看这样两个工程问题：

第一个是地基工程中常见的。如图 1.1 所示的建筑物基础的沉陷问题是所有建筑在设计和施工过程中都必须考虑的，在地基工程中，尤其是重大建筑工程如国家体育场"鸟巢"等，我们需要了解和控制建筑物的地基的沉陷，因此需要正确地计算建筑物的基础沉陷，从而据此进行设计和分析。这样的工程问题可以简化为如图 1.2 所示的力学模型。如果远处的建筑物对所关注部位的影响可以忽略不计（这一点是基于后面要介绍的圣维南原理），那么基础地面可以简化为很大（数学上用无穷大的概念）的**半平面体**或者**半空间体**（取决于基础地面上建筑物-载荷的作用方式）；如果建筑物载荷作用在一个区域内，并且不沿长度变化，则其弹性力学模型可以抽象为图 1.2(a)所示的半平面体受分布力作用（将在§6.7 中介绍）；如果建筑物载荷作用于一个很小区域，就简化为一个集中力，其弹性力学模型即为图 1.2(b)所示的半空间体受集中力作用（将在§8.6 中介绍）；无论是图 1.2(a)还是图 1.2(b)

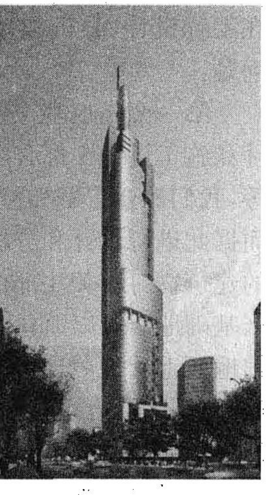


(a) 国家体育场"鸟巢"



(b) 中央电视台

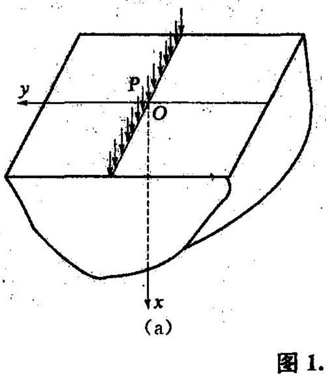
(c) 成排楼房



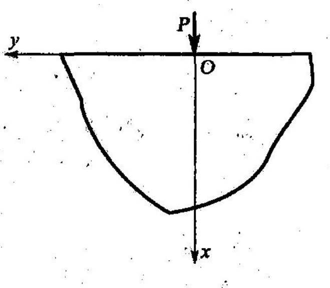
(d) 单幢高楼

图 1.1 建筑物及其基础(参见书前彩图)

所示的力学模型,其应力场或者位移场的计算问题都无法用材料力学或者是结构力学来解决。实际上,这就是一个经典的弹性力学问题。



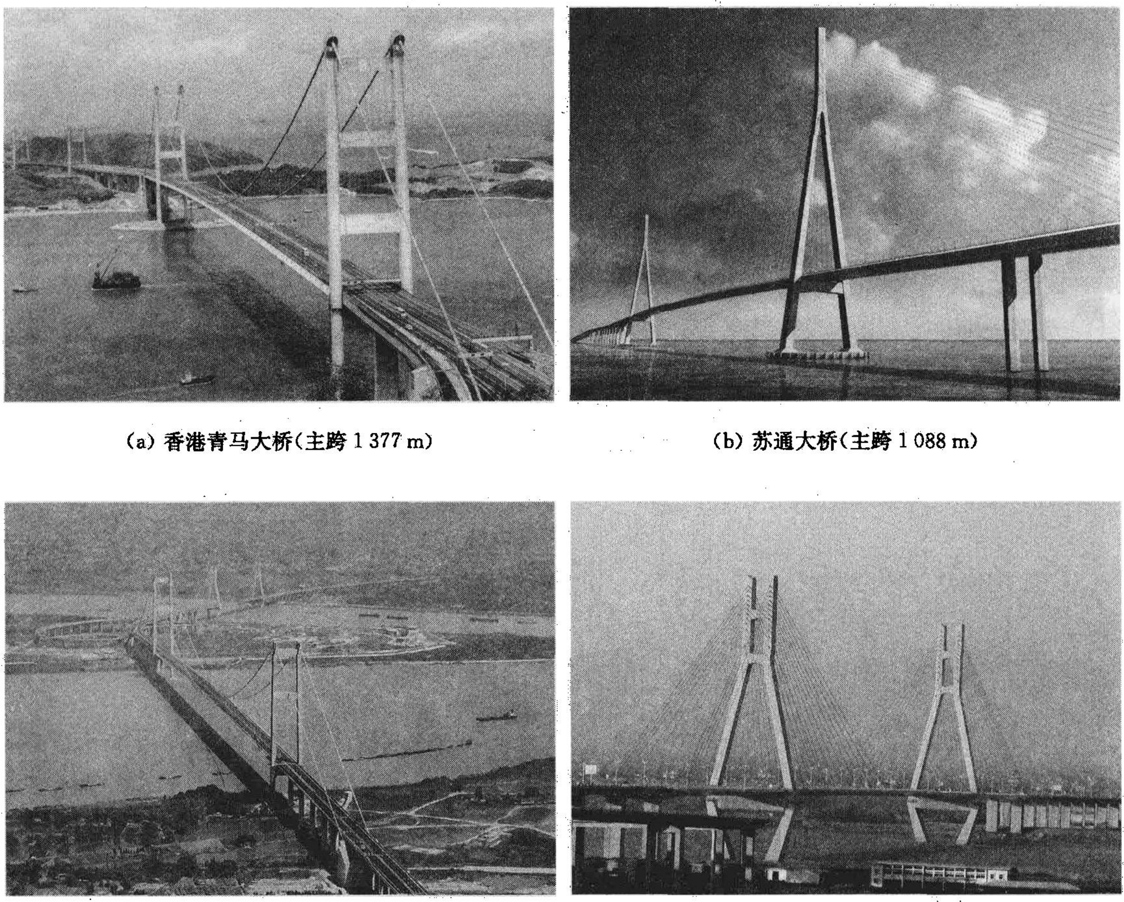
(a)



(b)

图 1.2 地基模型

第二个工程问题是现代大跨桥梁结构分析中遇到的。在我国,现代大跨桥梁的发展非常迅猛,有不少大跨桥梁工程进入世界悬索桥和斜拉桥前十大主跨最长纪录,如图 1.3 中所示的润扬大桥、青马大桥和苏通大桥等。在现代大跨桥梁的结构健康监测和结构状态评估分析中,需要对桥梁各主要部分建立精细的有限元模型(参见图 1.4)进行结构响应和当前状态的准确计算,因此需要准确计算桥塔截面的扭转和剪切力学特性等。但是,大跨桥梁的主塔高几百米(润扬悬索桥主塔高 210 m、青马大桥主塔高 206 m、苏通大桥主塔高 306 m),其构造一般是薄壁多室空间结构,由钢筋混凝土建造而成,其典型的桥塔截面通常如图 1.5 所示。对于这样的主塔,其截面扭转刚度系数或剪切系数如果按照材料力学的实体杆件扭转或剪切公式去计算显然是不行的。因此,需要考察具有不同材料组成的一般空间梁的扭转或者剪切问题,杆件的横截面是由多条闭合曲线围合而成的平面区域,在杆件的端面承受集中力(用于分析剪切系数)或者集中力偶(用于分析扭转刚度系数)。以扭转刚度系数的分析为例,其弹性力学模型可以抽象为如图 1.6 所示。



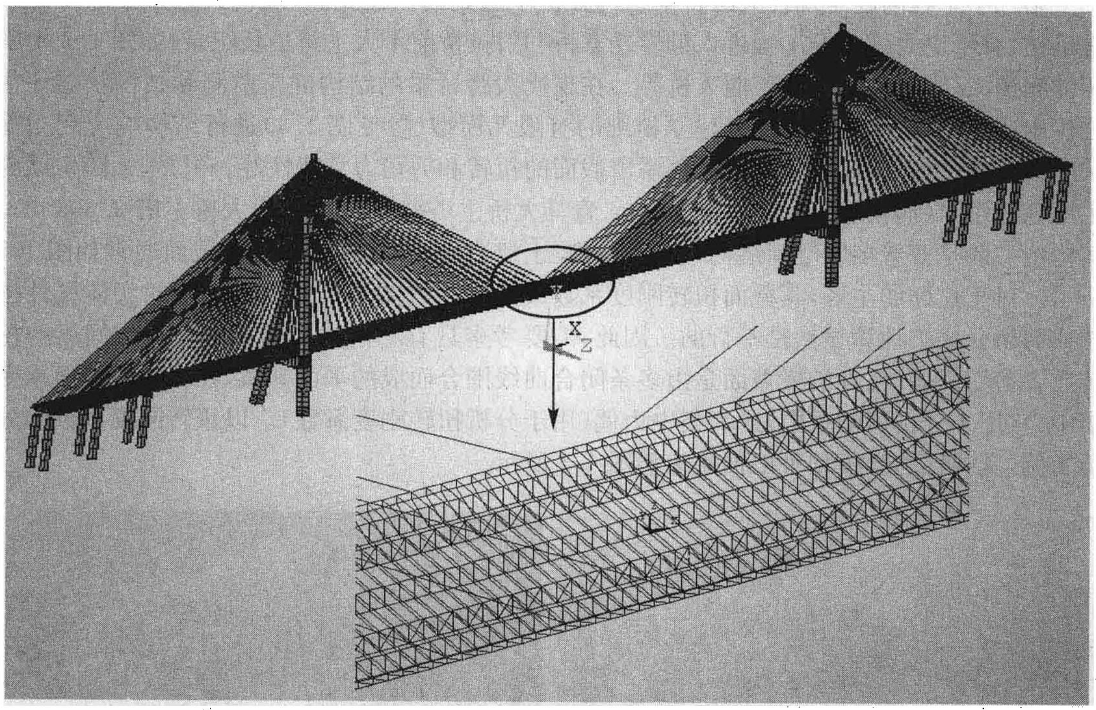
(a) 香港青马大桥(主跨 1 377 m)

(b) 苏通大桥(主跨 1 088 m)

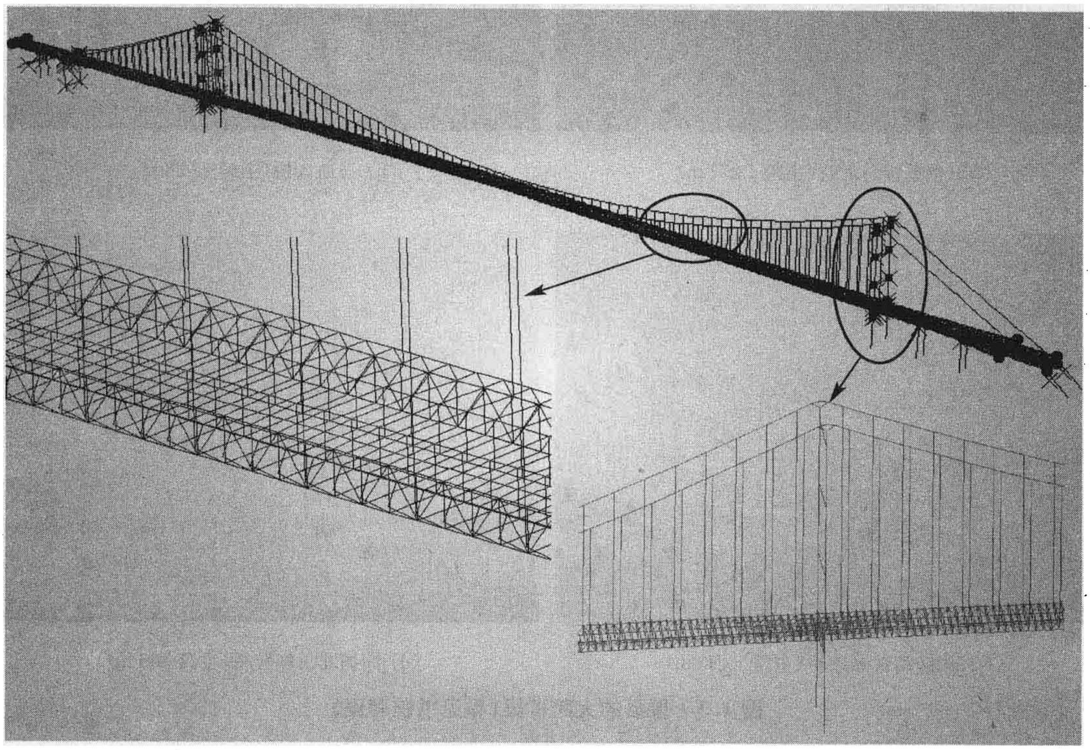
(c) 润扬南汉悬索桥(主跨 1 490 m)

(d) 润扬北汉斜拉桥(主跨 406 m)

图 1.3 重要的大跨桥梁(参见书前彩图)



(a) 斜拉桥三维有限元模型



(b) 悬索桥三维有限元模型

图 1.4　面向健康监测和状态评估的大跨桥梁三维有限元模型(参见书前彩图)

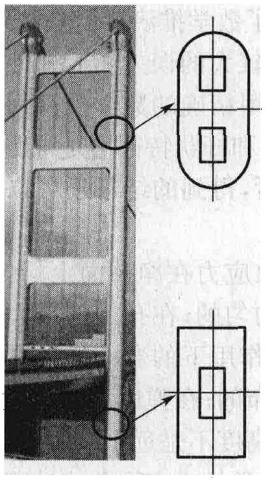


图 1.5 桥塔

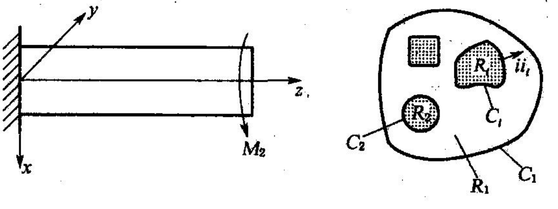


图 1.6 杆件扭转的弹性力学模型

以上两类工程中提出的力学问题都超出了我们此前已经掌握的材料力学或者结构力学的计算分析范围，因为它们各自具有如下特征之一：

(1) 研究的对象不再仅仅是杆件或者杆件体系，而是弹性实体；例如以上的建筑物基础的沉陷问题；

(2) 虽然仍然可以视为弹性杆件，但是其几何和物理构造的复杂性使其已不能满足在材料力学或者结构力学中关于杆件变形和应力分析的相关假设，如果仍然用材料力学方法计算势必会产生很大的计算误差；例如以上的大跨桥梁桥塔截面刚度的计算问题。

上述分析表明，工程中大量存在的一些问题用我们已经掌握的材料力学、结构力学是无法解决的，需要一门适宜分析和计算这些问题的学科来解决这些工程问题，这就是弹性力学。

1.2 弹性力学的任务和主要内容

弹性力学又称弹性体力学，或者弹性理论(Theory of Elasticity)，**主要研究弹性体在外力作用或者环境温度改变下发生的应力、变形和位移。**由于弹性体其实是变形在一定范围内(变形小于固体的弹性极限)时的固体，因此，弹性体力学是固体力学的一个分支。

弹性力学的任务，是分析各种弹性体包括结构和构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否具有所需的强度、刚度和稳定性。和以前学过的材料力学、结构力学相比较，弹性力学的任务与这两门力学是相似的，但是它们在研究对象上有所分工；由于研究对象上的差异，也造成了弹性力学与其他力学在研究方法上的不同。

材料力学的研究对象是杆状构件，即长度远大于高度和宽度的构件。结构力学是在材料力学的基础上研究杆状构件组成的杆件体系结构，例如桁架、刚架等等。至于非杆状的结构，例如板和壳、挡土墙、水坝、地基等实体结构，就是弹性力学的研究对象。

除了从静力学、几何学和物理学三方面进行分析以外，材料力学在研究方法上的特点是引用一些关于形变状态或者应力分布的假定，由于其研究对象的上述几何特征，材料力学采

用这些假定不至于产生工程上不可接受的误差，这就大大简化了数学推演。但是，当分析对象的杆状特征不显著时，基于材料力学的假定得出的解答会有较大的误差。而弹性力学尤其是数学弹性力学[1]从弹性体的基本概念和基本假设出发，只用精确的数学推演而不引用关于变形状态或者应力分布的假定，因此，不仅可以对实体结构和杆状特征不是很明显的构件进行分析，对于杆状结构也可以进行进一步、更加精确的分析，得到的结果还可以用来校核由材料力学得到的近似解答。

例如，在材料力学中计算有孔的拉伸杆件的应力时，假定拉应力在净截面上均匀分布；实际上，在孔的附近会发生应力集中，截面上的应力分布不是均匀的，在孔边的最大拉应力远大于平均拉应力。再如，在材料力学中计算直梁在横向载荷作用下的弯曲应力时引用了平截面假定，因此计算得到的横截面上的弯曲正应力是线性分布的；在弹性力学中计算这一问题时就无须引用平截面假定，计算结果表明：对于深梁（梁的高度不是远小于梁的跨度）来说，横截面上的应力不是线性分布而是按曲线变化的，用材料力学的正应力公式计算得到的最大正应力有很大的误差。

由于弹性力学的方法主要是建立弹性体变形和应力场变量的偏微分方程的边值问题，然后寻求其解析解和数值解，其求解特征是严密和精确的数学推演，因此弹性力学又有数学弹性力学之称。当然，弹性力学中也有部分内容是引用了一些关于变形状态或者应力分布的假定来简化数学推演，例如弹性板壳结构的分析方法；这些内容也被认为是实用弹性力学，在方法上是接近材料力学的，但是由于研究中需要用到数学弹性力学的部分结果，其研究对象也不在材料力学的范畴内，因此，这部分实用弹性力学仍然归于弹性力学的范围。

随着计算机硬件和软件系统的飞速发展和有限元方法的普及，作为有限元理论基础之一的弹性力学也更加重要，同时，也给求解复杂形状弹性体在复杂受力条件下的变形和应力场的数值解答带来越来越方便和快捷的途径。

此外，还需要特别注意的是，弹性力学和材料力学、结构力学这些学科之间的界限并非明显的和不变的。一个工程中的力学问题，应该用材料力学、结构力学还是弹性力学理论来解决，答案并非是唯一的，而是往往取决于工程分析的目的和需求，还取决于按照分析的精度要求必须考虑哪些因素和必须将问题简化为什么样的力学模型。这是在学习掌握了弹性力学以后能够正确地在工程中运用弹性理论分析和解决工程中的弹性力学问题的关键，也是本书贯穿始终的一个要点。我们将在后面的章节中对这一要点不断加以论述，以便于本书的读者不仅能够掌握弹性力学的理论和方法，同时也能够掌握如何将工程问题转化为弹性力学问题，正确地运用弹性力学理论和方法解决工程中的力学问题。

1.3 基本概念和基本假定

这一节我们要进一步明确弹性力学中经常使用的几个基本概念，以及建立弹性力学理论所需要的基本假定。

1.3.1 基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念主要有外力、应力、变形和位移。这些概念在材料力学

和结构力学中已经用到，但是由于研究对象的差别，同一概念在表述和符号规定方面可能有所差别。因此，有必要给以进一步的详细说明。

作用于弹性体上的外力，按照其作用方式可以分为体积力与表面力，又简称为体力和面力。

体力是分布于弹性体体积内的力，也即单位体积中所受外力的集度，例如重力和惯性力。在弹性力学中，通常将任意一点 P 的体积力矢量用其在坐标轴 x、y、z 上的投影 X、Y、Z 来表示，分别称为弹性体在 P 点的体力分量，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向则为负。体力分量的量纲是[力][长度]$^{-3}$。

面力是分布作用在弹性体表面上的力，也即弹性物体表面的单位面积上所受外力的集度，例如流体压力和接触力等。在弹性力学中通常将任意一点的面力矢量用其在坐标轴 x、y、z 上的投影 $\bar{X}$、$\bar{Y}$、$\bar{Z}$ 来表示，分别称为弹性体在该点的面力分量，其符号以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向则为负。面力分量的量纲是[力][长度]$^{-2}$。

在外力或者环境变化作用下，弹性体内部将产生内力。研究弹性体内力和应力的方法也是采用材料力学中使用的截面法。假想用过 P 点的一个截面 mn 将弹性体截为 A、B 两部分，将部分 B 去除，留下部分 A，去除的部分 B 对部分 A 的作用用内力来取代，如图 1.7 所示。取包含 P 点的一个微小面积 ΔA 来讨论，设作用在 ΔA 上的内力为 ΔQ，则 P 点的内力平均集度为 $\Delta Q/\Delta A$。假定内力为连续分布，当微元面积 ΔA 趋向于零且趋于 P 点时，$\Delta Q/\Delta A$ 将趋向于一定的极限 s，即

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = s$$

这个极限矢量 s 就是物体在截面 mn 上 P 点的应力。

为了进行变形和强度分析的方便，在弹性力学中也和材料力学类似地，一般**将应力用其沿作用截面的法向分量和切向分量来表示，也就是正应力 σ 和剪应力 τ**，如图 1.7 所示。应力分量的量纲是[力][长度]$^{-2}$。

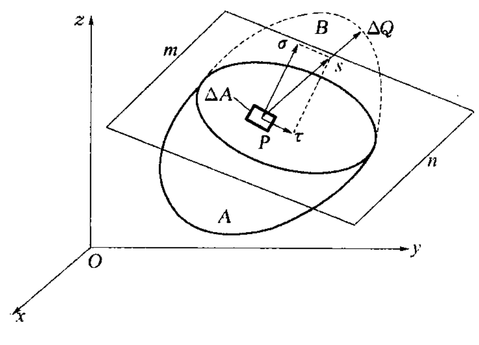


图 1.7　横截面上的内力和应力

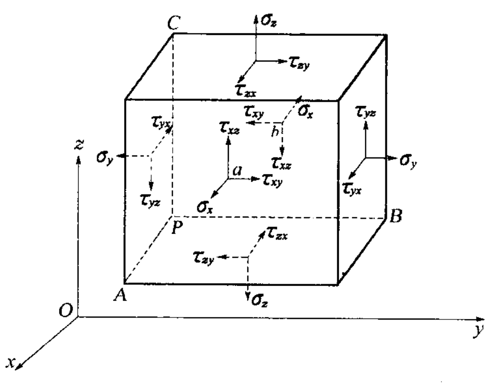


图 1.8　P 点的应力分量

物体中不同位置的应力固然是不同的，在同一点 P 的不同截面上的应力也是不同的，并且，在同一点 P 的同一截面沿不同方向有不同的应力分量（一个沿法向的正应力和两个分别沿两个切向的剪应力）。为了分析一点的应力状态，首先需要清楚地表示过 P 点的各个截面上的应力的大小和方向。为此，从物体中取出一个微小平行六面体如图 1.8 所示，其

各个棱边平行于坐标轴，长度分别为 $PA=\Delta x$，$PB=\Delta y$，$PC=\Delta z$。每个面上作用的应力可以分解为一个沿法向的正应力分量和两个分别沿两个切向的剪应力分量，分别与坐标轴平行。每个应力分量都用两个坐标下标来表示其作用面和作用方向，σ_{ij} $(i=x, y, z; j=x, y, z)$；其中，第一个下标 i 表示该应力分量作用在法向为 i $(i=x, y, z)$ 的面上，第二个下标 j 表示该应力分量是沿着 j $(j=x, y, z)$ 轴的方向。由此可见，应力 σ_{xx} 是作用在法向为 x 的面上同时也沿 x 轴，显然，这是一个正应力。通常正应力的两个相同的下标就只写一个。再如，应力 σ_{xy} 是作用在法向为 x 的面上沿 y 轴方向，显然这是一个剪应力，按照习惯，往往写成 τ_{xy}。

应力分量的符号按照如下的规则确定：首先定义每个面的正负，一个截面的外法线方向与坐标轴的正方向一致为正，反之为负；在此基础上就可以确定应力分量的符号：如果某个截面为正面，那么作用在这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向时为正，沿坐标轴负方向时为负；相反，如果某个截面为负面，那么作用在这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向时为正，沿坐标轴正方向时为负。**简言之，弹性力学中应力分量的符号规定就是："正面"上沿正向和"负面"上沿负向都为正，"正面"上沿负向和"负面"上沿正向都为负。**按照这个符号规定，可以发现，图 1.8 中表示的所有应力分量全都是正的。上述应力分量的规定，对于正应力来说和材料力学中的规定相同，但是，对于剪应力而言，却和材料力学中的规定不完全相同。

值得注意的是，图 1.8 中的 9 个应力分量并非全部为独立的变量，在 6 个剪应力分量之间存在一定的互等关系。如果以连接正负 x 面的中心的直线 ab 为矩轴，建立力矩平衡方程，即可以得到如下的剪应力之间的互等关系：

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}, \quad \tau_{zx}=\tau_{xz}, \quad \tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{1.1}$$

由此可见，在物体中的任意一点，如果已知 6 个应力分量 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy}，就可以完全确定该点的应力状态。

弹性体的**变形可以归结为长度的改变和角度的改变**。以图 1.8 中沿坐标轴 x，y，z 正方向的 3 条微小线段 PA、PB、PC 的变形为例，当物体变形以后，这 3 条线段的长度以及它们之间的直角一般都会发生改变。线段在单位长度的伸长或者缩短定义为**正应变**，用 ε 表示，其符号为伸长为正，缩短为负，因此，ε_x、ε_y、ε_z 就分别表示 x、y、z 方向的线段 PA、PB、PC 的正应变。相互垂直的两条线段之间的角度的改变，用弧度表示，称为**剪应变**。剪应变用 γ 表示，其符号为直角变小为正、直角变大为负；γ_{yz}、γ_{zx}、γ_{xy} 就分别表示 y 与 z、z 与 x、x 与 y 两方向的线段之间的角度的改变。正应变和剪应变都是无量纲的量。

在物体中的任意一点，如果已知六个应变分量 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{yz}、γ_{zx}、γ_{xy}，就可以完全确定该点的应变状态。

位移是弹性体中各点位置的改变。物体中任意一点的位移，用它在 x、y、z 坐标轴上的投影 u、v、w 来表示，称为位移分量；位移分量的符号以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负；位移分量的量纲为[长度]。

一般而言，弹性体内任意一点的应力分量、应变分量和位移分量都是随该点的位置而改变，因此是位置坐标的函数。如果满足下面讨论的弹性力学基本假定，则这些应力分量、应变分量和位移分量函数都将是连续函数或者区域连续函数。

1.3.2 基本假定

将工程问题转化为弹性力学问题的过程中，如果精确考虑涉及的所有各方面的因素，则建立的模型和方程将会非常复杂，实际上不可能求解。因此，通常必须按照研究对象的主要特性和求解问题的范围，抽象出若干基本假定，略去可以忽略的因素，使得建立的模型尽可能的简化，才能够使得建立的方程能够求解。在弹性力学中一般采用如下的基本假定：

1）连续性假定

假定物体是连续的，整个物体的体积都被组成该物体的介质所填满，没有留下任何孔隙。只有当我们假定物体是连续的，物体中的物理量才可能是连续的，才可以用坐标的连续函数来表示其变化规律。因此，这一假定对于使用连续函数来描述弹性体中的应力、变形和位移等物理量来说是必不可少的。

当然，连续性假定只是一个理想化的假定。实际上，一切物体在一定小的尺度下观察都可以发现微粒间的孔隙和距离；混凝土材料甚至在肉眼可见的尺度中也能够观察到砂浆与粗骨料之间的孔隙。但是，对于一般材料在宏观尺度下，对于混凝土等复合材料在包含足够多的复合相（骨料）的情况下，只要保证微粒的尺寸以及其间的孔隙和距离相对于物体的宏观尺度是足够得小，使用物体连续性假定所产生的误差就可以是很小的。因此，这里的连续性假定是宏观尺度下分析问题所必需的，也是完全可以成立的。

2）均匀性假定

假定物体是均匀的，整个物体是由同一材料组成的。也就是说，在弹性体的不同位置处具有相同的材料性能，因而，物体的弹性系数不随不同位置坐标而变化。这样就可以在物体中取出任意小的一部分来分析，然后把分析结果应用于整个弹性体。由此可见，均匀性假定对于使用具有任意的代表性的数学函数来描述弹性体中的应力、变形和位移等物理量来说也是必不可少的。

如果物体在一定小的尺度上是由两种或者两种以上的材料组成的（例如混凝土材料），只要每一种材料的颗粒远小于物体本身的尺度，并且在物体内可以视为是均匀分布的，那么这个物体就可以抽象为均匀的。因此，均匀性假定事实上也是在一定的宏观尺度下才成立的理想化假定。

3）各向同性假定

假定物体是各向同性的，也就是说，在物体中的同一点的不同方向上的弹性性能都相同。这样，物体的弹性系数在同一点不随不同的方向而改变，因此，弹性系数可以用一个标量来表示。

显然，有些材料例如木材和竹子是不具备各向同性性质的。至于钢材，虽然在微观下，其单个晶体是含有各向异性的，但是由于晶体很微小，而且是随机性排列的，它们在宏观上表现出来的弹性性质实际上是无数微小晶体随机排列时的统计弹性性能，这个宏观的弹性性能是各向相同的。