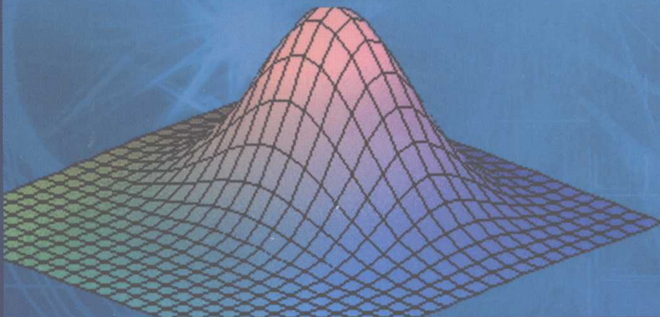
21世纪普通高等学校数学系列规划教材



概率论与数理统计

魏振军 编著

☑ 本书作者曾两次获全国教育软件大赛一等奖

☑ 光盘内含电子教案及电子试验：形式生动，界面直观

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21 世纪普通高等学校数学系列规划教材

概率论与数理统计

魏振军　编著
茆诗松　主审

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内容简介

本系列教材遵循普通高校工科《高等数学课程教学基本要求》，按照新形势下教材改革精神，结合编者长期的教学改革实践编写而成。

全书内容共分10章：第1～5章是概率论部分，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理；第6～10章是数理统计部分，内容包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析及方差分析初步。

本教材知识举例丰富、讲解透彻、难度适宜，以通俗易懂的语言，深入浅出地讲解概率论与数理统计的知识，切合实际需求和加强学生应用能力的培养。

本书适合作为普通高等院校各专业教材，尤其适合作为二、三类本科教材，也可供具有一定数学基础（如排列组合、初等微积分）的读者自学使用。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/魏振军编著. —北京：中国铁道出版社，2008.7
（21世纪普通高等学校数学系列规划教材）
ISBN 978-7-113-08827-9

Ⅰ.概… Ⅱ.魏… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第111299号

书　　名： 概率论与数理统计
作　　者： 魏振军　编著

策划编辑： 李小军　　**编辑部电话：**（010）83550579
责任编辑： 李小军　　**封面制作：** 白　雪
编辑助理： 袁　琳　张　丹　　**责任印制：** 李　佳
封面设计： 付　巍

出版发行： 中国铁道出版社（北京市宣武区右安门西街8号　　邮政编码：100054）
印　　刷： 北京鑫正大印刷有限公司
版　　次： 2009年4月第1版　　2009年4月第1次印刷
开　　本： 787mm×960mm　1/16　　**印张：** 17　　**字数：** 356千
印　　数： 4000册
书　　号： ISBN 978-7-113-08827-9/O·180
定　　价： 28.00元（附赠光盘）

前　　言

我们生活的世界丰富多彩、变幻莫测，无处不在、层出不穷的随机现象给人类带来机遇，也带来困惑. 伴随着科学的发展和人类的进步，人们对随机现象的认识不断深化，先后诞生了概率论与数理统计学科，为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法. 进入信息化时代，概率论与数理统计更是焕发出勃勃生机，其应用愈来愈广泛，遍及自然科学、社会科学、管理科学、工程技术、军事和工农业生产等许多领域.

作者在近三十年的教学实践中深切感受到，把学生引入随机世界，与学生一起理解和把握随机现象的规律性不是一件容易的事情. 丰富的实际背景难以在课堂呈现，源于生活和大量试验的一些概念、定理仅靠口说笔写也难以讲解明白. 二十年来，作者在这门课程的教学改革上进行了一些尝试，主编了几种版本的计算机辅助教学软件，通过对随机现象的大量模拟试验，以探索和发现随机现象的规律性，并用多媒体手段展示概率统计丰富的实际背景和广泛的应用，曾荣获**第五、九届全国多媒体教育软件大赛一等奖**等荣誉. 近几年又开发了概率论与数理统计网络课程，网络课程所包含的丰富信息及软件的交互性为学生营造了自主学习环境. 新颖的教学方法和内容受到校内外学生的广泛欢迎，也得到专家的肯定和同行的好评. 本教材在严密理论架构下，借鉴国内外同类教材优点，吸收我们此前对本课程教学改革的部分成果，依据教育部近年考研数学考试大纲中对概率统计知识点的要求编写.

本教材是为普通高等院校概率论与数理统计课程教材，全书共分 10 章：

前五章为概率论部分，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理及中心极限定理；后五章为数理统计部分，内容包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析及方差分析初步。

本书的**主要特点**是：

1. 以知识点为主线，用学生**易于接受**的方式讲述，语言生动，图文并茂，可读性强.

2. 注意知识间的**相互联系**，特别注意新概念的引入及重点、难点的讲解，**引导学生思考、探索和发现**.

3. **注重理论联系实际**，通过大量实例说明这门学科丰富的**实际背景和广泛应用**. 教材中共计讲解例题 177 个（含各章后的综合应用举例 16 个）.

4. **与计算机技术紧密结合**. 教材在讲解过程中插入的模拟试验或演示内容共计 40 个，存放在与教材配套的光盘中. 学生可进行交互的随机试验，探索和发现随机现象的规律.

5. 在数理统计内容的讲述中**突出统计思想、方法和应用**. 从生活中常见事例出发提

出问题和研究问题，对有关统计思想作了深入浅出的讲解，强调应用中的注意事项.

6. 练习题分为**基本练习题**和**提高题**，其中基本练习题 231 道，提高题 56 道. 提高题有一定难度，供准备考研的学生参考.

需要指出的是，尽管本书的配套光盘包含了**部分模拟试验和演示**，但我们更希望读者亲自使用计算机编写简单程序来辅助这门课程的学习. 我们认为，免费的 R 软件是一个比较好的工具软件. 为此，在与本书配套的辅导书“附录”中，对 R 软件作了专门介绍，题目叫“用 R 做概率统计”. 这部分文字不仅介绍了 R 软件中与概率分布有关的指令，还举例说明如何用 R 软件进行计算机模拟、绘制概率分布图、寻求统计量的抽样分布、计算概率、计算分位数、区间估计和假设检验、一元线性回归等. 藉此希望给本课程的学习注入新的活力.

本书适合高等学校各专业使用，尤其适合二、三类普通高等学校学生使用.

本书是在中国铁道出版社领导和编辑的建议、鼓励下编写的. 在我们从事本课程教学改革的过程中，概率统计学界前辈严士健、张尧庭、茆诗松等教授都给予过关心和指导. 书稿完成后，茆诗松教授又接受中国铁道出版社的委托对全书进行了认真细致的审定，对书稿提出了很多珍贵意见. 张宣杨等多名毕业学员参与过教学软件的研制，本书的配套光盘包含有他们的劳动成果. 本书前五章初稿撰写过程中刘弦博士曾给予协助，张新建老师和刘璐博士都曾认真阅读书稿并演算了部分习题，提出过一些修改意见. 在此对他们一并表示衷心的感谢！

尽管我们为编写本书和制作配套光盘尽了最大的努力，试图在理论联系实际方面有所突破，但受个人学术水平的局限，错误和疏漏之处难免，欢迎同行和读者提出宝贵意见.

编著者

2008 年 12 月

目　　录

第 1 章

随机事件与概率

本章从生活中的随机现象开始，介绍随机事件、概率、条件概率、独立性等概念，常用的几种确定概率的方法，概率的公理化定义和性质以及计算概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式.

我们生活的世界充满了不确定性. 从抛硬币、掷骰子和玩扑克等简单的机会游戏，到复杂的社会现象；从婴儿诞生，到世间万物的繁衍生息；从流星坠落，到大自然的千变万化……，这是一个丰富多彩的随机世界. 现在，我们就和大家一起，尝试从生活中的现象开始，去研究随机性，发现其中的奥秘.

§1.1 随机试验与事件

1.1.1 随机现象及其统计规律

春天到了，万物复苏，百花盛开，大自然呈现出一片勃勃生机；秋风吹来，枝叶凋零；上抛的物体一定会下落；在标准大气压下，水加热到 100℃ 就会沸腾；无论是什么形状的三角形，其两边之和总要大于第三边.

总结上面列举的这些现象，我们可以发现它们都有着共同的特点. 如果用比较科学的语言来表达，那就是服从特定的因果规律，从一定的条件出发，一定可以推出某一结果. 这一类现象我们把它称作**确定性现象**，也称作**必然现象**. 在自然界和社会中还大量存在着另一类现象，称之为**随机现象**或者说是**偶然现象**.

比如，在马路交叉口，每天都要通过许多人和车辆，但是我们无法事先预测每天确切的人数及车辆数.

人们所关心的一场足球赛就要开始了，这是一场实力相当的比赛，可能甲队赢，也可能乙队赢，事先我们不能准确地预言哪个球队能取胜.

你家买回了一台电视机，使用多长时间后它会出故障？也许大于 10 000 h，也许小于

10 000 h,事先也无法准确预言.

1986 年 1 月 28 日,美国的“挑战者”号航天飞机升空后不久便发生爆炸,2003 年 2 月 1 日,“哥伦比亚”号航天飞机在即将返回地面时解体,这两件令世界震惊的事件事先谁也无法料到.

随机现象具有如下特点:

(1) 结果不止一个;

(2) 人们事先无法确知出现哪一个结果.

在一定条件下,并不总是出现相同结果的现象称为**随机现象**.

那么,我们要问:随机现象是不是没有规律可言呢?

人们经过长期实践和深入研究后发现,在大量重复试验和观察下,随机现象的结果会呈现出某种规律性.例如,抛掷一枚质地均匀的硬币,掷少数几次看不出什么规律,如果掷的次数很多就会发现,出现正面的次数大约占一半.

又如,一门火炮在一定条件下进行射击,个别炮弹的弹着点可能偏离目标而有随机性的误差,但大量炮弹的弹着点则表现出一定的规律性,如一定的命中率、一定的分布规律,等等.

再如,测量一物体的长度,由于仪器及观察受到环境的影响,每次测量的结果可能是有差异的,但多次测量结果的平均值随着测量次数的增加逐渐稳定于一常数,并且各测量值大多落在此常数的附近,越远则越少,其分布状况呈现“两头小,中间大,左右基本对称”的规律.

这种在一定条件下对随机现象的大量观察中表现出的规律性,称作随机现象的**统计规律性**.随机现象常常表现出这样或那样的统计规律,这正是概率论所研究的对象.

1.1.2　随机现象、样本空间与事件

研究随机现象,首先要对它进行观察或试验.如果每次试验的结果不止一个,而且事先不能肯定会出现哪一个结果,这样的试验称为**随机试验**.

下面看几个随机试验.

【例 1】　掷一颗骰子,观察掷出的点数.所看到的是六种可能结果中的某一个,而事先无法肯定掷出的是几点.

【例 2】　将一枚硬币抛掷两次,观察出现正、反面的情况.可能结果为:

$$\{正,反\},\{正,正\},\{反,正\},\{反,反\},$$

但抛掷之前不能预言出现哪一种结果.

【例 3】　从一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.可以知道寿命 $t \geq 0$,但在测试之前不能确定它的寿命究竟有多长.

从以上的随机试验中可以看到:试验是在一定条件下进行的;试验有一个目的,根据这个目的,每次试验的结果是多个结果中的某一个;试验的全部可能结果是在试验前就明确的,或者虽不能确切知道试验的全部可能结果,但可以知道它不超过某个范围;每次试验的结果事先不可预言,也就是说,试验的结果具有随机性.由于我们只研究能大量重复的随机现象,因此只考虑可以在相同条件下重复进行的随机试验.以下,随机试验也简称为**试验**.

在随机试验中,可能发生也可能不发生的试验结果称为**随机事件**.例如,在掷硬币试验中,"掷出正面"是一随机事件.又如,在掷骰子试验中,"掷出6点"、"掷出偶数点"也都是随机事件."随机"的意思无非是说:事件是否在某次试验中发生随机会而定.随机事件也简称为**事件**,通常用大写英文字母 A、B、C 等表示.

事件可分为**基本事件**和**复合事件**.我们把相对于观察目的不可再分解的事件称为**基本事件**.例如,在掷骰子试验中,我们的目的是要观察掷出的点数,则"掷出点数为1","掷出点数为2",…,"掷出点数为6"都是基本事件.两个或一些基本事件并在一起,就构成一个**复合事件**.例如,在掷骰子试验中,事件"掷出偶数点"就是由"掷出点数为2","掷出点数为4","掷出点数为6"三个基本事件构成的.

有两个特殊的事件必须说明一下,一个是**必然事件**,即在试验中必定发生的事件,常用 S 表示;另一个是**不可能事件**,即在试验中不可能发生的事件,常用 $\varnothing$ 表示.例如,在掷骰子试验中,"掷出点数小于7"是必然事件;而"掷出点数8"则是不可能事件.

必然事件与不可能事件都是确定性的,但为了今后讨论问题方便,不妨将它们视为随机事件的特例.

1.1.3　样本空间与随机事件

随机试验的结果事先不能准确预言,但试验的全部可能结果在试验前一般是可以明确的.一个试验的所有可能结果的集合称为**样本空间**,记为 S.样本空间中的每一个元素称为**样本点**.下面是几个例子.

【例4】　如果试验是观察新生婴儿的性别,则样本空间

$$S=\{g,b\}.$$

其中结果 g 表示女婴,b 表示男婴.

【例5】　如果试验是将一枚硬币抛掷两次,则样本空间

$$S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}.$$

其中结果 (H,H) 表示两次都出正面,(H,T) 表示第一次掷出正面而第二次掷出反面,(T,H) 表示第一次掷出反面而第二次是正面,(T,T) 表示两次都出反面.

【例6】　如果试验是抛掷一颗骰子,则样本空间

$$S=\{i:i=1,2,3,4,5,6\}.$$

这里结果 i 表示掷出 i 点,$i=1,2,3,4,5,6$.

【例7】　如果试验是测试某灯泡的寿命(以小时计),则样本点是一非负数.由于不能确知寿命的上界,所以可认为任一非负实数都是一个可能结果,故样本空间

$$S=\{t:t\geqslant 0\}.$$

样本空间在如下意义上提供了一个理想试验的数学模型:在每次试验中必有一个样本点出现且仅有一个样本点出现.

引入样本空间之后,事件便可表示为样本空间的子集合.例如,在前述掷骰子试验中,令 B

表示{掷出奇数点}这一事件，如果在一次试验中，出现了样本点 1、3、5 中的任一个，则事件 B 发生；反之，如果 B 发生了，则在该试验中必出现了样本点 1、3、5 中的某一个. 于是 $B=\{1,3,5\}$，它是样本空间的一个子集. 显然，只包含一个样本点的事件就是基本事件.

1.1.4 事件的关系与运算

以下，设 S 是某试验的样本空间，A、B、C 为 S 中的事件. 为便于理解，在介绍事件的关系和运算时，我们使用下面的例子.

【例 8】 掷一颗骰子，观察面上的点数.

1. 事件的包含与相等

如果事件 A 的发生必导致事件 B 的发生，则称事件 **A 包含于 B**，或称 **B 包含 A**，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 一个形象的表示如图 1.1 所示. 其中，样本空间 S 用矩形表示，A，B 是 S 中的两个事件.

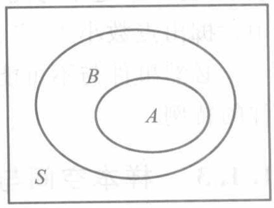


图 1.1

例如，在例 8 中，以 A 表示事件"掷出点数 3"，即 $A=\{3\}$，以 B 表示事件"掷出奇数点"，即 $B=\{1,3,5\}$，则 $A\subset B$.

如果两事件 A 与 B，既有 $A\subset B$，又有 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **等价**或**相等**，记作 $A=B$.

例如，在例 8 中，以 A 表示事件"掷出点数能被 3 整除"，即 $A=\{3,6\}$，以 B 表示事件"掷出点数 3 或 6"，即 $B=\{3,6\}$，则 $A=B$.

2. 事件的和(或称并)与积(或称交)

两事件 A、B 中至少有一个发生是一事件，把这事件称为 A 与 B 的**和**，也称为事件的并，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$(见图 1.2).

两事件 A、B 都发生是一事件，把这个事件称为 A 与 B 的**积**，也称为事件的交，记作 $A\cap B$ 或 AB(见图 1.3).

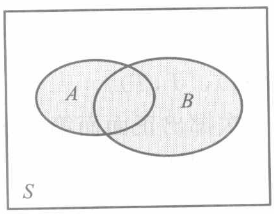


图 1.2

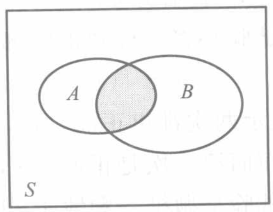


图 1.3

例如，在例 8 中，以 A 表示事件"掷出偶数点"，即 $A=\{2,4,6\}$，以 B 表示事件"掷出点数是 3 的倍数"，即 $B=\{3,6\}$，则 $A+B$①$=\{2,3,4,6\}$，而 AB②$=\{6\}$.

事件的和与积都可以推广到多个事件的情形.

3. 互不相容事件与对立事件

如果两事件 A、B 不可能同时发生，即

①② 为表述简便起见，后面一般都采用"$A+B$"表示事件 A 与 B 的和(并)，用 AB 表示事件 A 与 B 的积(交).

$$AB = \varnothing,$$

则称 A、B **互不相容**或**互斥**(见图 1.4).

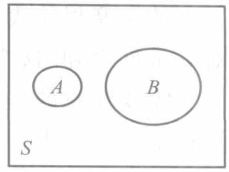


图 1.4

如果一些事件中的任意两个都互不相容(两两互不相容),则称这些事件**互不相容**.

例如,在例 8 中,以 A 表示事件"掷出偶数点",即 $A = \{2,4,6\}$,以 B 表示事件"掷出奇数点",即 $B = \{1,3,5\}$,则 A 与 B 互不相容.

事件 A 不发生是一事件,称为 A 的**对立事件**或**逆事件**(见图 1.5),记作 $\overline{A}$.

例如,在例 8 中,以 A 表示事件"掷出点数 3",即 $A = \{3\}$,则 $\overline{A} = \{$掷出点数不是 3$\}$,即 $\overline{A} = \{1,2,4,5,6\}$.

这里要注意互不相容事件与对立事件的区别. 事件 A 与事件 B 互不相容,只要求 $AB = \varnothing$;而事件 A 与事件 B 对立,则除了要求 $AB = \varnothing$ 之外,还要求 $A+B = S$,即要求 A、B 中必出现其一,但 A、B 不能同时出现.

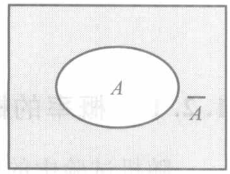


图 1.5

例如,在例 8 中,以 A 表示事件"掷出偶数点",即 $A = \{2,4,6\}$,以 B 表示事件"掷出点数 3",即 $B = \{3\}$,则 A 与 B 是互不相容事件,但不是对立事件.

4. 事件 A 与事件 B 的差

事件 A 发生事件 B 不发生是一事件,把这事件称为 A 与 B 的**差**,记作 $A - B$ 或 $A\overline{B}$(见图 1.6).

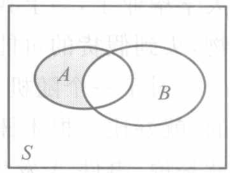


图 1.6

例如,在例 8 中,以 A 表示事件"掷出点数小于 4",即 $A = \{1,2,3\}$,以 B 表示事件"掷出点数 3",即 $B = \{3\}$,则 $A - B = \{1,2\}$.

5. 事件运算的基本规律

设 A、B、C 都是样本空间 S 中的事件. 利用事件关系及运算可推出如下的基本规律.

交换律:

$$A + B = B + A, \quad AB = BA.$$

结合律:

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A(BC) = (AB)C.$$

分配律:

$$A + (BC) = (A + B)(A + C);$$
$$A(B + C) = AB + AC.$$

德 · 摩根律(对偶律):

$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}.$$

我们来看一下德 · 摩根律. 事实上,事件 $A + B$ 表示事件 A 和 B 至少有一个发生,它的对立事件显然就是 A 和 B 都不发生,即 $\overline{A}\,\overline{B}$;而事件 AB 都发生的对立事件就是 A 和 B 至少有一个不发生,即 $\overline{A} + \overline{B}$.

德·摩根律表明:事件和的对立事件是各事件的对立事件之积;积的对立事件是各事件的对立事件之和.这个性质在后面经常使用.

需要注意的是,不要把数的运算规律如移项、添括号、去括号等用到事件运算上来,这些运算在事件运算中一般是不成立的.

例如:

$$(A+B)-C\neq A+(B-C);$$
$$A-(B-C)\neq (A-B)+C;$$
$$A+C=B+C\text{ 不一定有 }A=B.$$

§1.2 概率

1.2.1 概率的概念

随机试验中的随机事件在一次试验中,可能发生,也可能不发生.既然有可能性,就有可能性大小的问题.人们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大.比如说,大学毕业了,马上找到工作的可能性有多大?乘飞机出行,飞机失事的可能性有多大?到超市购物,买到假货的可能性有多大?等等.

对于一个随机事件来说,它发生的可能性大小的度量是由它自身决定的,并且是客观存在的.就好比一根木棒有长度,一块土地有面积一样.概率是随机事件发生可能性大小的量度.也就是说,事件 A 发生的可能性大小就是事件 A 的概率.我们用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率.

例如,在天气预报中会提到降水概率.大家都明白,如果降水概率是 90%,那就很可能下雨;但如果是 10%,就不大可能下雨.因此,概率描述了某件事情发生的机会.

又如,在掷硬币试验中,用 A 表示"出现正面",用 B 表示"出现反面".如果硬币质地均匀,形状对称,那么人人都会说事件 A 和事件 B 出现的可能性一样大.也就是说

$$P(A)=1/2,\quad P(B)=1/2.$$

这就把事件发生可能性的大小数量化了.

由于必然事件在每次试验中必定发生,或者说,它发生的可能性是 100%,所以它的概率是 1.不可能事件发生的可能性是零,所以它的概率是 0.即有

$$P(S)=1,\quad P(\varnothing)=0.$$

而任一事件 A 发生的可能性不会小于 0,也不会大于 100%,所以 A 的概率介于 0 与 1 之间.即有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

研究随机现象,不仅关心试验中会出现哪些事件,更重要的是想知道事件出现的可能性大小,也就是事件的概率.在概率论的发展过程中,人们针对不同的问题,从不同的角度给出了定义和计算概率的各种方法.