JS

文心英才教育研究所 组编

“希望”数学竞赛教程

高一分册

韩保席　张欣然　宋　程 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

“希望”数学竞赛教程

高一分册

文心英才教育研究所　组编

本册主编　韩保席　张欣然　宋　程

本册编委　张义红　仓万林　吴　蕾

袁海峰　陈群峰　凌海霞

邓　凯　李红艳　胡瑞红

蒋　寅　杨晓璐　任连宜

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

"希望"数学竞赛教程. 高一分册/韩保席,张欣然,宋程主编. —杭州:浙江大学出版社,2009.3
ISBN 978-7-308-06651-8

Ⅰ.希… Ⅱ.①韩…②张…③宋… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 038916 号

"希望"数学竞赛教程(高一分册)

韩保席　张欣然　宋　程　主编

责任编辑　石国华
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　10.75
字　　数　268 千
版 印 次　2009 年 3 月第 1 版　2009 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06651-8
定　　价　16.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

前　　言

中学生学科竞赛的开展，在我国已有多年的历史，其中数学竞赛是开展最早、覆盖面最广的一项竞赛，数学竞赛活动由于其对少年儿童智力开发的重大促进作用而备受广大青少年的喜爱。

随着数学竞赛活动的蓬勃发展，各级各类数学竞赛活动也相继开展。其中比较大型的竞赛活动主要有：中国数学会主办的全国高中数学联赛，全国初中数学联赛；中国科协普及部、《数理天地》杂志等主办的"希望杯"全国数学邀请赛；中国奥数教学联盟、《数学竞赛之窗》杂志主办的"联盟杯"数学竞赛；华杯赛组委会主办"华罗庚金杯"少年数学邀请赛；《中学数学研究》杂志主办的"五羊杯"数学邀请赛；小学生数学报主办的"小数报邀请赛"等等。

这些竞赛活动对广大青少年数学素养的培养、思维方法的开拓起了很好的促进作用，很多这些竞赛的优胜者在后来的人生路上都取得了辉煌的成就。

如何才能在这些竞赛中取得好成绩，并提升自己的数学素养，促进自己的数学思维就成了广大家长和学生关注的问题。为解决这个问题，我们特组织了一批竞赛教学一线的专家老师编写了本套丛书，以期给广大读者一个良好的开端。

本丛书分为七年级、八年级和高一、高二分册。

丛书的内容涵盖初中和高中的各部分内容，在课本的基础之上，加以提升，整个难度控制在中考之上，全国联赛之下，服务于中考和竞赛，又不拘泥于中考和竞赛，对各校中档以上学生，参加中考和竞赛，最有帮助。

本书整体难度大致和"希望杯"全国数学邀请赛相当，作为"希望杯"全国数学邀请赛的培训教程最为合适。

使用建议：

1. 参加"希望杯"全国数学邀请赛的同学做赛前冲刺，请将本书所有内容均做完。

2. 希望中、高考提高的同学，请将每章中的例题全部过关，练习题部分中的前8题全部过关。

3. 参加全国初中数学联赛和全国高中数学联赛的同学，请在本书的基础上，再做一些更难的问题，以提高自己的数学素养。

限于作者水平，书中不妥之处请广大读者批评指正。联系电话是：0512－68184173，也可通过电子邮件联系我们，信箱是：wenxinjiaoyu@163.com。

文心英才教育研究所

2009年3月

目　录

Contents

第 1 讲　集合及其运算

考题再现

1. (1999 年第 1 试) 已知集合 $\{0,-1,2a\}=\{a-1,-|a|,a+1\}$，则实数 $a=$ ________.

【解析】 设 $A=\{0,-1,2a\}$，$B=\{a-1,-|a|,a+1\}$，

当 $a-1=0$ 时，$a=1$，此时 $A=\{0,-1,2\}$，$B=\{0,-1,2\}$，满足 $A=B$；

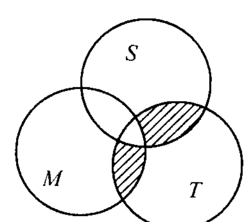
当 $-|a|=0$ 时，$a=0$，此时 $A=\{0,-1,0\}$，$B=\{-1,0,1\}$，因为集合的互异性，所以 $a\neq 0$；

当 $a+1=0$ 时，$a=-1$，此时 $A=\{0,-1,-2\}$，$B=\{-2,-1,0\}$，满足 $A=B$.

所以 $a=\pm 1$.

【说明】 本题考查集合的概念，在处理此类问题时应注意集合中元素的互异性和分类讨论思想的运用.

2. (2002 年第 2 试) 如图所示，三个圆分别表示集合 M、S、T，则阴影部分表示集合　　(　　)



A. $(S\cap T)\cup(T\cap M)$

B. $(M\cup S)\cap T$

C. $\{x\mid x\in(M\cup S)\cap T, x\notin M\cap S\}$

D. $\{x\mid x\in(M\cap S)\cup(S\cap T)\cup(T\cap M), x\notin M\cap S\cap T\}$

【解析】 由图可知，$x\in T$ 且 $x\in(M\cup S)$，但 $x\notin M\cap S$，不难得出阴影部分可表示为 $\{x\mid x\in(M\cup S)\cap T, x\notin M\cap S\}$. 选 C.

【说明】 韦恩图使得集合的交、并、补关系直观明了，在解题时用来讨论集合的关系，具有化抽象为具体的功能.

3. (2006 年第 1 试) 设 $S=\{(x,y)\mid xy>0\}$，$T=\{(x,y)\mid x>0$ 且 $y>0\}$，则(　　)

A. $S\cup T=S$　　B. $S\cup T=T$　　C. $S\cap T=S$　　D. $S\cup T=\varnothing$

【解析】 由 $S=\{(x,y)\mid xy>0\}=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}\cup\{(x,y)\mid x<0,y<0\}$，知 $T\subset S$.

故选 A.

【说明】 本题考查集合之间的交并集关系.

4. (1997 年第 1 试) 已知 $M=\left\{\alpha\middle|\alpha=\dfrac{4k\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$, $N=\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi\pm\dfrac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$, $P=\{\alpha\mid\alpha=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,则集合 M、N、P 满足关系式 ( )

A. $M=(N\cup P)$　　B. $M\subset(N\cup P)$

C. $M\supset(N\cup P)$　　D. $M\cap(N\cup P)=\varnothing$

【解析】 **方法一**: 对于集合 M: $\alpha=\dfrac{4k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$,

对于集合 N: $\alpha=\dfrac{(6k\pm2)\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$,

对于集合 P: $\alpha=\dfrac{6k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$,

由于 $6k\pm2$ 表示被 6 除余 2 和 4 的数, $6k$ 表示被 6 整除的数,

所以 $(N\cup P)=\left\{\alpha\middle|\alpha=\dfrac{2k\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$,所以 $M\subset(N\cup P)$.

方法二: $M=\left\{\cdots,0,\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3},\dfrac{12\pi}{3},\cdots\right\}$, $N=\left\{\cdots,\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{10\pi}{3},\dfrac{16\pi}{3},\cdots\right\}$, $P=\{\cdots,0,2\pi,4\pi,6\pi,\cdots\}=\left\{\cdots,0,\dfrac{6\pi}{3},\dfrac{12\pi}{3},\dfrac{18\pi}{3},\cdots\right\}$,

所以 $(N\cup P)=\left\{\cdots,-\dfrac{2\pi}{3},0,\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{6\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3},\dfrac{10\pi}{3},\cdots\right\}$,所以 $M\subset(N\cup P)$. 选 B.

【说明】 处理此类问题一般有两种方法,一是化简集合,从表达式中找两集合之间的关系;二是列举法表示各集合,从元素中寻找关系. 由于方法二只是停留在最初的归纳阶段,没有从理论上解决问题,因此提倡方法一,但方法二入手较易,不失为一种解答客观题的好方法.

5. (2005 年第 1 试) 已知集合 $A=\{x\mid-8\leqslant x\leqslant6\}$, $B=\{x\mid x\leqslant m\}$,若 $A\cup B\neq B$ 且 $A\cap B\neq\varnothing$,则 m 的取值范围是________.

【解析】 由题意,若 $A\cap B\neq\varnothing$,则必有 $m\geqslant-8$;

若 $A\cup B\neq B$,则有 $m<6$,所以 m 的取值范围为 $-8\leqslant m<6$.

【说明】 本题涉及集合交并补的简单运算及性质,解决本题的关键是抓住 $A\cup B\neq B$ 且 $A\cap B\neq\varnothing$ 这两个条件.

6. (2006 年培训题) 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$ 为自然数集, $A=\{x\mid|x-3|\geqslant2\}$, $B=\{x\mid x^2-6x-7>0\}$,那么集合 $A\cap(\complement_U B)\cap\mathbf{N}$ 的元素个数有 ( )

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 无穷多个

【解析】 由题意, $A=\{x\mid x\geqslant5$ 或 $x\leqslant1\}$, $B=\{x\mid x<-1$ 或 $x>7\}$,

$\therefore\ \complement_U B=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant7\}$, $\therefore\ A\cap(\complement_U B)=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant1$ 或 $5\leqslant x\leqslant7\}$,

$\therefore\ A\cap(\complement_U B)\cap\mathbf{N}=\{0,1,5,6,7\}$,即共有 5 个元素. 选 B.

【说明】 本题涉及集合交补的简单运算和性质，二次方程与二次不等式的联系. 关键是处理好运算过程中的细节问题.

7. (2003 年第 1 试) 集合 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，A 是 S 的一个子集，当 $x\in A$ 时，若有 $x-1\notin A$，且 $x+1\notin A$，则称 x 为 A 的一个"孤立元素"，那么 S 中无"孤立元素"的 4 元子集的个数是________.

【解析】 由"孤立元素"的定义可知，相邻的两个数字构成的元素都不是"孤立元素"，因此 S 中无"孤立元素"的 4 元子集可分为两类：第一类是子集中的 4 个元素为相邻的四个数字，有 $\{0,1,2,3\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\{2,3,4,5\}$ 三个，第二类是子集中的 4 个元素分为两组，每一组的两个元素为相邻的两个数字，有 $\{0,1,3,4\}$，$\{0,1,4,5\}$，$\{1,2,4,5\}$ 三个，一共有六个.

【说明】 对于集合中的新定义，如何理解定义，然后根据定义来处理相关信息.

8. (2000 年第 1 试) 已知函数 $f(x)=x^2+px+q(p,q\in\mathbf{R})$，又集合 $A=\{x\mid f(x)=x\}$，$B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$，若 $A=\{1,3\}$，则 $B=$________.

【解析】 若 $A=\{1,3\}$ 时，即 1，3 为方程 $x^2+(p-1)x+q=0$ 的两根，由韦达定理知，$\begin{cases}1+3=1-p,\\ 1\times 3=q,\end{cases}$ 所以 $p=-3$，$q=3$，则 $f(x)=x^2-3x+3$，则 $f[f(x)]=(x^2-3x+3)^2-3(x^2-3x+3)+3=x$，化简可得 $(x-3)(x-1)^3=0$，解得 $B=\{1,3\}$.

【说明】 解决此类问题的关键是把握好题目所给信息，将方程的根反代入方程，得到原方程的相关系数，从而为下面继续解题做好铺垫.

趋势预测

集合是组合数学的基础，也是高中数学竞赛中的重要组成部分. 每年都有集合及其运算在考试中出现，且越来越注重和其他知识的综合考查. 一般考查以下两方面内容：一是对集合基本概念的认识和理解的水平，比如集合表示法，集合中元素的互异性，元素与集合的关系，集合与集合的关系，集合的运算；二是考查对集合知识的应用水平，如求不等式和不等式组的解集，用解集解决相关问题，在考查集合知识的同时，突出考查准确使用数学语言的能力和用数形结合的思想解决问题的能力.

针对模拟

1. P、Q、R、S 分别表示长方体集合、直平行六面体集合、直四棱柱集合、正四棱柱集合，它们之间的关系为　　(　　)

A. $R\supset Q\supset P\supset S$　　B. $R\supset Q\supset S\supset P$

C. $S\subset P=Q\subset R$　　D. $S\subset R$，$P\subset Q$，$R\not\subset Q$，$Q\not\subset R$

2. 设 $B=\{0,1,2\}$,$A=\{x\mid x\subseteq B\}$,则 A 与 B 的关系是 ( )

A. $A\subseteq B$　　B. $B\subseteq A$　　C. $A\in B$　　D. $B\in A$

3. 集合 $P=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{2k+1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$Q=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k+2}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则有 ( )

A. $P=Q$　　B. $P\supset Q$

C. $P\subset Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

4. 已知集合 $A=\left\{y\,\middle|\,y=\cos\dfrac{\pi x}{2},x\in\mathbf{N}\right\}$,$B=\left\{y\,\middle|\,y=\sin\dfrac{\pi x}{4},x\in\mathbf{N}\right\}$,则 ( )

A. $A\subset B$　　B. $A\supset B$　　C. $A=B$　　D. $A\in B$

5. 已知 $M=\{x\mid x^2>4\}$,$N=\{x\mid x<3\}$,则下列等式中正确的是 ( )

A. $\overline{M}\cup\overline{N}=\{x\mid x>-2\}$　　B. $\overline{M}\cap\overline{N}=\mathbf{R}$

C. $M\cap N=\{x\mid x<3\}$　　D. $M\cup N=\mathbf{R}$

6. 若集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$,$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$,则满足 $A\cup B=B$ 的所有 a 的集合是 ( )

A. $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 9\}$　　B. $\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$

C. $\{a\mid a\leqslant 9\}$　　D. $\varnothing$

7. 若$\{\sqrt{a},1\}\subset\{1,2,a\}\subset\{1,2,4,a^2\}$,则 a 的值是________.

8. 已知集合 M 满足$\{2,5\}\subseteq M\subset\{1,2,3,4,5\}$,则不同的 M 的个数是________.

9. 已知集合 $A=\{x\mid x-a=0\}$,$B=\{x\mid ax-1=0\}$,若 $A\cap B=B$,则实数 a 等于________.

10. 集合 M 由正整数的平方组成,即 $M=\{1,4,9,16,25,\cdots\}$,若对某集合中的任意两个元素进行某种运算,结果仍在此集合中,则称此集合对该运算是封闭的. M 对下列运算封闭的是 ( )

A. 加法　　B. 减法　　C. 乘法　　D. 除法

11. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 4\}$,$B=\{(x,y)\mid x^2-y\neq 4\}$,则$\overline{A\cup B}=$________.

12. 已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,|x^2-1|=\dfrac{x}{10}+b\right\}$,当 $b=0$ 时,A 中元素的个数是________,当 $b=1$ 时,A 中元素的个数是________.

第 2 讲　映射与函数的概念

考题再现

1. (2008 年希望杯高一试题) 函数 $f(x)=\lg(2x+1)$ 的定义域为________.

【分析】 本题只需满足真数大于 0 即可.

【解】 由题意得 $2x+1>0$,解得 $x>-\frac{1}{2}$,所以定义域为 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

【说明】 函数定义域即使函数有意义 x 的取值集合,一般情况常见条件有"真数大于 0";"分母不等于 0";"开偶次根式的被开根数大于等于 0".

2. (2007 年希望杯高一试题) 函数 $f(x)=\log_2(x^2-2x+10)$ 的值域为________.

【分析】 函数的值域可以考虑单调性求解.

【解】 由题意得 $x^2-2x+10>0$,所以该函数的定义域为 $\mathbf{R}$,

因为 $x^2-2x+10=(x-1)^2>9$,且 $y=\log_2 x$ 为单调增函数,所以 $f(x)$ 的值域为 $(\log_2 9,+\infty)$.

【说明】 对于复合函数的值域的求解,可先求出内层函数值域,再求出外层函数的值域.

3. (2007 年希望杯高一试题) 函数 $y=x^3-6x^2+12x(x\leqslant 0)$ 的反函数的解析式是 $y=$________,它的定义域是________.

【分析】 反函数的求解步骤为:先求原函数的定义域,再反解 x,交换 x,y 得到反函数的解析式.

【解】 因为 $y=x^3-6x^2+12x=(x-2)^3+8$,显然该函数是由 $y=x^3$ 向右平移两个单位,再向上平移 8 个单位而得,所以该函数在 $(-\infty,0]$ 单调递增,即值域为 $(-\infty,0]$,所以反函数的定义域为 $(-\infty,0]$. 又 $y=(x-2)^3+8$,解得 $x=\sqrt[3]{y-8}+2$,所以反函数为 $y=\sqrt[3]{x-8}+2$.

【说明】 反函数的定义域必须通过原函数的值域求解,而不是使反函数有意义的 x 的取值集合.

4. (2002 年希望杯高一试题) 已知 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$,从 A

到 B 的对应法则分别为(1) $x\to y=\frac{1}{2}(x+1)$;(2) $x\to y=|x-1|$;(3) $x\to y=\sqrt{x+1}$;(4) $x\to y=\sqrt[3]{x+2}$,其中能构成 $A\to B$ 的映射的个数为________.

【分析】 判定的条件有两个,一为 A 中每一个元素是不是都有唯一象,二是 B 中每一个元素是否都有原象.

【解】 能够成映射的对应关系有(1)、(2)、(3),而(4)中当 $y=2$,x 无解,所以(4)不能够构成映射.

【说明】 一个 $A\to B$ 的对应必须满足 A 集合中每一个元素的对应关系存在且唯一,B 中每一个元素都有原象才是一个 $A\to B$ 的映射.

5. 若函数 $y=\log_3(x^2+ax-a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $\mathbf{R}$　　B. $\mathbf{R}^-$

C. $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$　　D. $(-4,0)$

【分析】 本题函数的限制只有真数大于0,定义域为 $\mathbf{R}$.

【解】 由题意得 $x^2+ax-a>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,所以只需 $\Delta=a^2+4a<0$ 即可,即 $a\in(-4,0)$. 选 D.

【说明】 定义域为 $\mathbf{R}$ 的问题可以转化为恒成立处理.

6. (2008年希望杯高一试题)已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 与函数 $y=f(x-1)+2$ 的图像重合,那么 $a=$________,$b=$________.

【分析】 将 $y=f(x-1)+2$ 代入,然后再与 $f(x)$ 的系数一一对比,得到方程,解得系数 a,b.

【解】 $y=f(x-1)+2=a(x-1)^2+b(x-1)+c+2$

所以有 $c+2-a-b=c$,$b-2a=b$,即 $a=0$,$b=2$.

【说明】 对于已知函数类型求解函数解析式问题,只需用待定系数法建立方程求解即可.

7. (2004年希望杯高一试题) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为有理数},\\ 1, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$ 当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$f(g(x))=$________,$g(f(x))=$________.

【分析】 对于分段函数的解析式的求解,要注意不同段的自变量的取值范围.

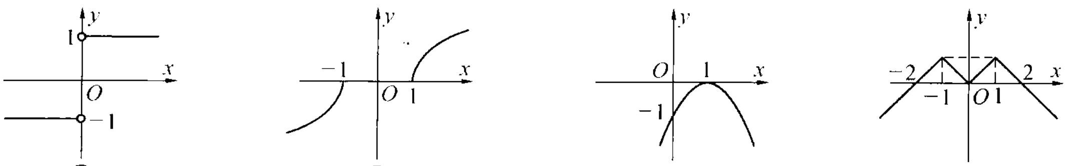
【解】 当 x 为有理数时,$g(x)=0$,所以 $f(g(x))=f(0)=1$,当 x 为无理数时,$g(x)=1$,所以 $f(g(x))=f(1)=1$,综上 $f(g(x))=1$.

当 x 为有理数时,$f(x)=1$,所以 $g(f(x))=g(1)=0$,当 x 为无理数时,$f(x)=0$,所以 $g(f(x))=g(0)=0$,综上 $g(f(x))=0$.

【说明】 分段函数的函数值的求解必须从里向外一层层的求解.

8. (2006年希望杯培训题)给出下列四个函数:$f(x)=-|x-1|^3$,$g(x)=1-$

$|x-1|$，$\varphi(x)=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$，$h(x)=\begin{cases}\log_2 x, x\geqslant 1\\0, -1<x<1\\-\log_2(-x), x\leqslant -1\end{cases}$ 的图像：



①　　②　　③　　④

则 ①，②，③，④ 对应的函数分别为　　(　　)

A. $\varphi(x), h(x), g(x), f(x)$　　B. $\varphi(x), g(x), h(x), f(x)$

C. $\varphi(x), h(x), f(x), g(x)$　　D. $\varphi(x), g(x), f(x), h(x)$

【分析】　分段函数的图像应该一段段地处理，最后合在一起即可.

【解】　① 所对应的函数解析式为 $\varphi(x)$；② 所对应的函数解析式为 $h(x)$；③ 所对应的函数解析式为 $f(x)$；④ 所对应的函数解析式为 $g(x)$，故答案选 C.

【说明】　函数图像的判断可以通过特殊点，对应性，值域等函数性质来判断.

9. (1999 年希望杯高一试题) 设集合 $A=\{1,2\}$，则从 A 到 A 的映射 f 中满足 $f[f(x)]=f(x)$ 的映射的个数是　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【分析】　$f[f(x)]$ 即将 A 对应一次所得元素，看做原象再做一次对应所得的象.

【解】　因为该映射为 $A\to A$，故 $f(1)=1, f(2)=2$ 或者 $f(1)=2, f(2)=1$，又或者是 $f(1)=f(2)=1$ 和 $f(1)=f(2)=2$，这四个映射中 $f(1)=1, f(2)=2$ 和 $f(1)=f(2)=1$，及 $f(1)=f(2)=2$ 满足题意，故答案选 C.

【说明】　在处理多次映射的问题时，应该注意象和原象的区别.

10. (2007 年希望杯高一试题) 若函数 $f(x)=\lg(ax^2+5x+4)$ 的值域是 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是________.

【分析】　对数函数的值域为 $\mathbf{R}$，应该转化为真数所对应的函数的值域的问题.

【解】　设 $u=ax^2+5x+4$，因为 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，即 $\{y\mid y=u(x), x\in\mathbf{R}\}\supseteq(0,+\infty)$，

当 $a=0$ 时，符合题意；当 $a\neq 0$ 时，满足 $a>0$，$\Delta=25-16a\geqslant 0$，即 $0<a\leqslant\dfrac{25}{16}$.

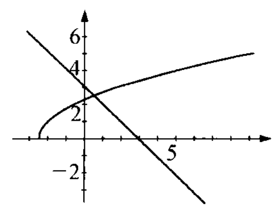
综上，$0\leqslant a\leqslant\dfrac{25}{16}$ 即为所求.

【说明】　$y=\log_a g(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，应该转化为 $\{y\mid y=g(x), x\in\mathbf{R}\}\supseteq(0,+\infty)$.

11. (1997 年希望杯高一试题) 对于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，规定：当 $f(x)\leqslant g(x)$ 时，$f(x)※g(x)=f(x)$；当 $f(x)>g(x)$ 时，$f(x)※g(x)=g(x)$. 已知 $f(x)=3-x$，$g(x)=(2x+5)^{\frac{1}{2}}$，则 $f(x)※g(x)$ 的最大值为________.

【分析】 本题为分段函数的最值的求解,可以通过函数图像求解.

【解】 由题意得 $f(x)※g(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)\leqslant g(x))\\ g(x) & (f(x)>g(x))\end{cases}$,



在同一坐标系画出这两个函数图像(见右图),

令 $3-x=(2x+5)^{\frac{1}{2}}$,得 $x=4\pm2\sqrt{3}$,又 $x\leqslant3$,所以 $x=4-2\sqrt{3}$,$f(x)※g(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{3}-1$.

【说明】 本题要读懂新定义的函数的含义,对于一些多项式的大小比较的问题也可以通过图像来进行研究.

12. (1993 年希望杯高一试题)如果函数 $y=f(x)$ 有反函数,函数 $y=f(x)$ 的图像过点 $(-a,b)$,则 ( )

A. $y=f^{-1}(x)$ 的图像过点 $(a,-b)$,$x=f^{-1}(y)$ 的图像过点 $(-b,a)$

B. $y=f^{-1}(x)$ 的图像过点 $(-b,a)$,$x=f^{-1}(y)$ 的图像过点 $(a,-b)$

C. $y=f^{-1}(x)$ 的图像过点 (b,a),$x=f^{-1}(y)$ 的图像过点 $(-a,b)$

D. $y=f^{-1}(x)$ 的图像过点 $(-b,-a)$,$x=f^{-1}(y)$ 的图像过点 $(-a,-b)$

【分析】 利用反函数和原函数的图像对称关系求解.

【解】 因为 $y=f(x)$ 的图像过点 $(-a,b)$,所以其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像过点 $(a,-b)$,而 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 为同一个函数,所以 $x=f^{-1}(y)$ 图像过点 $(-a,b)$,故答案选 A.

【说明】 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数,与 $x=f^{-1}(y)$ 为同一个函数.

13. (1997 年希望杯高一试题)函数 $f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$,$x\in[n,n+1]$(n 是正整数)的值域中恰有 10 个不同整数,则 n 的值为________.

【分析】 明确所给区间的单调性,然后用最大值减去最小值即可判断.

【解】 因为 $f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$ 的对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$,所以 $f(x)$ 在区间 $[n,n+1]$ 单调递增,即 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=(n+1)^2+(n+1)-n^2-n=2n+2=10$,所以 $n=4$.

【说明】 本题的函数区间为离散的,但是每一段均为单调递增,而值域起始点不是整数,所以包含 10 个整数,即最大值与最小值差为 10.

14. (2000 年希望杯高一试题)设定义域为 **R** 的函数 $f(x)$,$g(x)$ 都有反函数,并且函数 $f(x-1)$,$g^{-1}(x-2)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,若 $g(5)=1999$,那么 $f(6)=$ ( )

A. 1999　　B. 2000　　C. 2001　　D. 2002

【分析】 可以通过反函数与原函数图像的关系再结合平移知识来求解.

【解】 设 $F(x)=f(x-1)$,则 $F^{-1}(x)=g^{-1}(x-2)$,因为 $g(5)=1999$,则 $g^{-1}(1999)=5$,即 $F^{-1}(2001)=5$,所以 $F(5)=2001$,即 $f(6)=2001$.

【说明】 对于平移后所得的反函数应该换一个函数形式来表示,这样关系清晰.

15.（1994 年希望杯高一试题）已知集合 $M=\{x,y,z\}$，$T=\{1,0,-1\}$，则 M 到 T 的映射 f 满足 $f(x)-f(y)=f(z)$，那么这样的映射的个数是（　　）

A. 7　　B. 5　　C. 3　　D. 1

【分析】 需要将映射情况一一加以分析.

【解】 若 $f(z)=1$，则 $f(x)=1$，$f(y)=0$.

若 $f(z)=0$，则 $f(x)=f(y)=1$ 或 0 或 -1.

若 $f(z)=-1$，则 $f(x)=0$，$f(y)=1$，故映射的个数为 5. 选 B.

【说明】 映射的概念要记清楚，特殊映射关系具体化后讨论即可.

16.（2007 年希望杯高一试题）已知函数 $y=f(x)=\frac{1}{4}x^2-4x+16-a$，且当 $x\in[0,b]$ 时，$y\in[0,3b]$，求 a,b 的值.

【分析】 本题给定了函数的定义域和值域求解 a,b，可以通过分类讨论来确定所给区间的单调性来求解值域.

【解】 因为该二次函数为开口向上的二次函数，所以最大值只能在端点处取得.

又 $y=f(x)=\frac{1}{4}(x-8)^2-a$，

令 $-a=0$ 得 $a=0$，此时 $b\geqslant 8$，$f(x)=\frac{1}{4}(x-8)^2$.

若 $f(0)=3b$，即 $b=\frac{16}{3}<8$ 不符合题意；若 $f(b)=3b$，即 $b=14\pm 4\sqrt{5}$，又 $b\geqslant 8$，所以 $b=14+4\sqrt{5}$，此时当 $a=0$，$b=14+4\sqrt{5}$ 符合题意.

当 $b<8$ 时，该函数在 $[0,b]$ 上单调递减，所以有 $f(0)=3b$，$f(b)=0$，

解得 $b=4$，$a=4$.

综上符合题意的 a,b 有两组解 $a=0$，$b=14+4\sqrt{5}$ 或 $a=4$，$b=4$.

【说明】 在对二次函数进行讨论时，关键是抓住对称轴和区间的关系及明确最值取得的点是端点或对称轴的位置.

趋势预测

纵观这几年希望杯的考题，函数基本概念主要有映射、函数的定义域、解析式、值域和反函数的求解，基本是以小题考查为主，其中映射和反函数虽然在新课程已经弱化，但是在希望杯中还是有基本的考查.

针对模拟

1. 函数 $y=\log_2(\sqrt{x+4}+2)\,(x>0)$ 的反函数是（　　）

A. $y=4^x-2^{x+1}\,(x>2)$　　B. $y=4^x-2^{x+1}\,(x>1)$

C. $y=4^x-2^{x+2}(x>2)$　　　D. $y=4^x-2^{x+2}(x>1)$

2. 设 $a>1$，函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间$[a,2a]$上的最大值与最小值之差为$\frac{1}{2}$，则 $a=$(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

3. 下列函数中，反函数是其自身的函数为(　　)

A. $f(x)=x^2, x\in[0,+\infty)$　　　B. $f(x)=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$

C. $f(x)=e^3, x\in(+\infty,-\infty)$　　　D. $f(x)=\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$

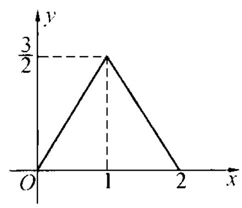
4. 右图中的图像所表示的函数的解析式为(　　)

A. $y=\frac{3}{2}|x-1|\ (0\leqslant x\leqslant 2)$

B. $y=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}|x-1|\ (0\leqslant x\leqslant 2)$

C. $y=\frac{3}{2}-|x-1|\ (0\leqslant x\leqslant 2)$

D. $y=1-|x-1|\ (0\leqslant x\leqslant 2)$



(第 4 题图)

5. 设 $P(3,1)$ 为二次函数 $f(x)=ax^2-2ax+b(x\geqslant 1)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像的一个交点，则(　　)

A. $a=\frac{1}{2}, b=\frac{5}{2}$　　　B. $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2}$

C. $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{5}{2}$　　　D. $a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2}$

6. 在对应法则“f”下，给出下列从集合 A 到集合 B 的对应：

(1) $A=\mathbf{N}, B=\mathbf{R}, f: x\to y=\frac{1}{x}$；

(2) $A=\mathbf{N}, B=\mathbf{Z}, f: x\to y=(-1)^x$；

(3) $A=\{x\mid x$ 是平面内的三角形$\}$，$B=\{y\mid y$ 是平面内的圆$\}$，$f: x\to y$ 是 x 的外接圆.

其中能构成映射的是(　　)

A. (1)、(2)　　B. (1)、(3)　　C. (2)、(3)　　D. (2)

7. 函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{19}|x-n|$ 的最小值为(　　)

A. 190　　B. 171　　C. 90　　D. 45

8. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$ 的定义域为________.

9. 已知函数 $y=2x-a$ 的反函数是 $y=bx+3$，则 $a=$________，$b=$________.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}2e^{x-1}, & x<2,\\ \log_3(x^2-1), & x\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $f(f(2))$ 的值为________.

11. 设函数 $f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}, f_2(x)=x^{-1}, f_3(x)=x^2$，则 $f_1(f_2(f_3(2007)))=$________.

12. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别由下表给出：

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为________；满足 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 的 x 的值是________.

13. 已知函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，若函数 $y=f(1+x)$ 的图像经过点 $(3,1)$，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像必经过点________.

14. 设 $f(x)$ 是一次函数，且 $f(1)=1$，$f[f(2)]=2f^{-1}(4)$，试求 $f(x)$ 的解析式.

15. 已知函数 $f(x)=-2x^2+bx+c$ 在 $x=1$ 时有最大值 1，$0<m<n$，并且 $x\in[m,n]$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right]$. 试求 m，n 的值.

第 3 讲　函数的性质

考题再现

1. (2004 年希望杯高一试题) 函数 $f(x)=\dfrac{x+|x-4|}{\sqrt{9-x^2}}$　　(　　)

A. 是奇函数但不是偶函数　　B. 是偶函数但不是奇函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 既不是奇函数又不是偶函数

【分析】 判断函数奇偶性首先得看定义域是否关于原点对称，然后再判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

【解】 由题意得 $9-x^2>0$，解得 $-3<x<3$，则 $f(x)=\dfrac{x+(4-x)}{\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{9-x^2}}$，

则 $f(-x)=\dfrac{4}{\sqrt{9-(-x)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{9-x^2}}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数. 故选 B.

【说明】 在判断函数奇偶性时，当形式比较复杂时，可以根据函数的定义域化简形式，以便更好地判断出 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

2. (2004 年希望杯高一试题) 函数 $f(x)=\log_a(x^2+2x-3)$，若 $f(2)>0$，可知 $f(x)$ 的单调递增区间是________；单调递减区间是________.

【分析】 该函数可以看做是对数函数与二次函数的复合函数，先根据 $f(2)>0$ 得到 a 的取值范围，然后再根据复合函数的单调性得到 $f(x)$ 的单调区间.

【解】 由 $f(2)>0$，得 $\log_a 5>0$，则 $a>1$.

设 $t=x^2+2x-3>0$，则 $y=\log_a t$，且 $x>1$ 或 $x<-3$；

因为 $t=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$ 在 $x\in(-\infty,-3)$ 时单调递减，在 $x\in(1,+\infty)$ 时单调递增，且 $y=\log_a t$ 在 $t>0$ 时单调递增，所以 $f(x)=\log_a(x^2+2x-3)$ 在 $x\in(-\infty,-3)$ 时单调递减，在 $x\in(1,+\infty)$ 时单调递增，即 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1,+\infty)$；单调递减区间是 $(-\infty,-3)$.

【说明】 求函数单调区间时要注意单调区间一定是定义域的一个子区间.

3. (1999 年希望杯高一试题) 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x-1)=f(2-x)$，