普通高等教育“十一五”国家级规划教材

有限单元法
原理及应用

陈国荣　编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

有限单元法原理及应用

陈国荣　编著

科学出版社
北京

内容简介

本书重点介绍有限单元法的基本理论、程序设计，以及在工程中的应用。主要内容包括：以弹性力学为基础的有限元的概念和基本理论，等参有限元的基本理论和形函数的统一构造方法，主要的高效数值算法和有限元程序设计，以及弹塑性问题、结构动力问题、温度场与温度应力问题、混凝土徐变和粘弹性问题、板壳问题、混凝土细观力学问题。部分章节还包括了作者近年来的最新研究成果。本书最后附有5个有限元教学程序及其使用说明［可到科学出版社网站下载（http：//www.abook.cn)］，供不同专业和不同教学对象选择使用，有的程序可以直接用来解决生产实际问题。

本书可作为水利、土木类相关专业研究生和工程力学专业本科生的教材，也可供高等院校相关专业教师和工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

有限单元法原理及应用/陈国荣编著．—北京：科学出版社，2009
（普通高等教育“十一五”国家级规划教材）
ISBN 978-7-03-023950-1

Ⅰ．有…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．有限元法　Ⅳ．O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第009547号

责任编辑：童安齐／责任校对：赵　燕
责任印制：吕春珉／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
＊
2009年3月第一版　开本：787×1092 1/16
2009年3月第一次印刷　印张：28 1/4
印数：1—3 000　字数：42 000

定价：42.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）
销售部电话 010-62136131　编辑部电话 010-62137026（BA08）

前　言

有限单元法自从20世纪60年代问世以来，由于其原理简单，解决问题便捷，得到了快速的发展，成为解决偏微分方程的普遍的数值计算方法，广泛应用到各工程领域和工业领域，并被广大工程技术人员所接受。同时它也被列为许多专业本科生和研究生的必修课程。

从1988年开始，作者为河海大学水利工程和土木工程专业研究生开设"有限单元法"课程。该课程原先都以已故徐芝纶院士编著的《弹性力学中的有限单元法》(修订版，水利水电出版社，1978)作为基本教材。随着有限元理论和技术的发展，课程教学内容不断更新和丰富，作者几经修改讲稿，逐步形成本书。本书继承《弹性力学中的有限单元法》的撰写风格，由浅入深，即先突出基本概念，后加强理论的深化和导入。

本书重点介绍有限单元法的基本理论和程序设计。主要内容包括：以弹性力学为基础的有限元的概念和基本理论，等参有限元的基本理论和形函数的统一构造方法，高效数值算法和程序设计，以及弹塑性问题、结构动力问题、温度场与温度应力问题、混凝土徐变和粘弹性问题、板壳问题、混凝土细观力学问题。同时本书还介绍了有限元在大型水工结构和桥梁工程中的应用实例，部分章节还包括了作者近年来的最新研究成果。本书最后附有5个有限元教学程序及其使用说明[可到科学出版社网站下载(http://www.abook.cn)]，供不同专业和不同教学对象教学时选择使用，有的程序可以直接用来解决生产实际问题。

李皇胜硕士、周道传博士、居宏昌博士分别参加了第6章、第10章和第12章的编写工作。本书编写过程中得到了王润富教授、彭萱茂教授、张健飞博士的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中不妥或疏漏之处欢迎广大师生和读者提出宝贵意见和建议。

陈国荣

2008年10月

目　录

第 1 章 绪 论

1.1 有限单元法的发展概况

有限单元法是求解数理方程的一种数值计算方法，是解决工程问题的一种强有力的计算工具。"有限单元法"这个名称第一次出现在 1960 年。当时克拉夫(R. W. Clough)在一篇平面弹性问题的论文中应用过它。但是有限单元法分析的概念却可以追溯到 20 世纪 40 年代。1943 年，柯朗(R. Courant)第一次在他的论文中应用了"单元"的法则，取定义在三角形域上的分片连续函数，利用最小势能原理研究了圣维南(St. Venant)的扭转问题。然而，当时并没有引起人们的重视，几乎过了 10 年才再次有人用这些离散化的概念。1954～1955 年，阿吉里斯(J. H. Argris)相继发表了一系列有关结构分析矩阵方法的论文，于 1960 年出版了《能量原理与结构分析》一书。它对弹性结构的能量原理作了综合和推广，并发展了实际的分析方法，成为结构分析矩阵位移法的经典著作之一。

1955 年，特纳(M. J. Turner)、克拉夫、马丁(H. C. Martin)和托普(L. C. Topp)等在他们的著作中，提出了计算复杂结构刚度影响系数的方法并应用电子计算机进行计算分析。他们在飞机结构中，把矩阵位移法的思想应用到弹性力学平面应力问题中去，把结构分割成三角形和矩形单元。每一单元特性用单元的结点力与结点位移相联系的单元刚度矩阵表征。1959 年，特纳在《结构分析的直接刚度法》一文中正式提出了用直接刚度法集合有限元的整体方程组。

在 1960～1970 年这 10 年中，许多学者，如梅劳斯(R. J. Melosh)、贝赛林(J. F. Besseling)、琼斯(R. E. Jones)、卞学璜、赫尔曼(L. R. Herrmann)、毕奥(M. A. Biot)、普拉格(W. Prager)、董平等，对各种不同变分原理的有限元模型作出了卓越的贡献。

有限元法的列式不一定都建立在变分原理的基础上。1969 年，奥登(J. T. Oden)从能量平衡原理出发，成功地列出了热弹性问题有限元分析的方程组。斯查勃(B. A. Szabo)和李(G. C. Lee)在 1969 年利用伽辽金法得到了平面弹性问题的有限元解。

从单元的类型而言，已从一维的杆单元、二维的平面单元发展到三维的空间单元、板壳单元、管单元等，从常应变单元发展到高次单元。1966 年，欧格托蒂斯(B. Ergatoudis)、艾路斯(B. M. Irons)和泽凯维奇(O. C. Zienkiewics)为等参数单元的发展奠定了基础，使计算精度有较大提高，并可适用于各种复杂的几何形状和边界条件。

有限元法虽然起源于结构分析，但现在已被广泛推广应用到各种工程和工业领域，已成为解决数学物理方程的一种普遍方法。到目前为止，有限元法已被应用于固体力学、流体力学、热传导、电磁学、声学、生物力学等各个领域，能求解由杆、梁、板、壳、块体等各类

单元构成的弹性(线性和非线性)、黏弹性和弹塑性问题(包括静力和动力问题),各类场分布问题(流体场、温度场、电磁场等的稳态和瞬态问题),水流管路、电路、润滑、噪声以及固体、流体、温度相互作用的问题。

近几年来,有限单元法的计算软件也得到了快速发展。由于有限元法的通用性,它已成为解决各种问题的强有力和灵活通用的工具,因此不少国家编制了大型通用的计算软件,并商品化。比较常用的有 SAP,ADINA,ANSYS,NASTRAN,MARC,ABAQUS,SAFE,ASKA,SAMIS,ELAS 等。

SAP(structural analysis program)——结构分析程序。它由美国贝克莱加利福尼亚大学研制,该程序可处理空间桁架、刚架、平面应力、平面应变、轴对称、等参元、薄板、薄壳、三维固体、厚壳、管单元等问题。它的功能有信息处理、静力分析、动力分析、绘图、带宽优化、计算几何刚度等。

ADINA(a finite element program for automatic dynamic incremental nonlinear analysis)——自动动力增量非线性分析有限元程序。它由美国麻省理工学院机械工程系研制,单元库中有梁、平面、板壳、三维块体、轴对称、厚板(壳)等单元。它可处理非线性问题及与温度有关的问题等。

NASTRAN(NASA structural analysis)——NASA 结构分析程存。它由美国国家航空与宇航局研制,可供各种结构分析之用。其功能包括热应力分析,瞬态荷载与随机激振的动态响应分析,实特征值与复特征值计算以及稳定性分析,还有一定的非线性分析功能,可用于各种计算机系统。

ABAQUS 是 David Hibbitt 教授为首开发研制的。它具有几乎所有线性和非线性分析的功能,如静力、动力、热耦合、刚体动力学、力电耦合以及隐式时间差分非线性动态响应分析,能够进行设计灵敏度分析,可以考虑波浪荷载、拖动和浮力以及模拟海洋石油平台管道和电缆系统。它还能够分析结构的疲劳寿命和疲劳强度储备因子,确定部件的疲劳寿命。

这些通用程序的编制,对解决许多工程技术问题提供了极大的方便。

我国学者冯康教授 1965 年发表了“基于变分原理的差分格式”,几乎同时和西方科学家各自独立建立了有限单元法的理论基础,但由于我国计算机工业发展较迟,计算力学的发展与应用受到一定的影响。20 世纪 70 年代初,有限元法才开始在国内得到应用与推广。我国最早系统地开展有限单元法研究和应用的是已故院士徐芝纶教授。他领导的科研组于 1971 年开始,开展有限元法的研究、推广与普及工作,1972 年结合生产需要完成了风滩空腹重力拱坝的温度场与温度应力的有限元计算分析工作,这是我国最早的有限元应用成果。1974 年,他以华东水利学院的名义编著出版了我国第一部关于有限单元法的专著《弹性力学问题的有限单元法》,为我国推广、普及有限单元法做了开创性的工作,随后在航空工业、造船工业、机械工业、水利工程、建筑工程、石油化工等都得到广泛应用与发展。80 年代,北京大学袁明武教授根据我国当时计算机容量小的情况,在力求用小型计算机解大题目方面做了不少研究工作,取得了卓越的成就,推出了 SAP84,为有限元的普及和实际应用做出了重要贡献。在应用新的单元方面,有的单位也进行了探索,取得了一些成果。近几年来,在动态和非线性、流体力学与电磁场方面,细观力学、生物力学等

方面也开展了不少研究工作，取得很好的成绩。

有限单元法的理论与方法到目前已经非常成熟，不可能再有突破性的改变或发展。今后的发展主要是两方面的工作有所期待：一是进一步拓展新的应用领域，如有生命的固体力学，有生命的流体力学、细微观力学等；另一方面是研制高水平的大型通用软件和专门化的应用软件。有限元是计算力学中最主要的方法，现已成为常用的普遍的计算工具，应用软件是计算力学发展水平的主要标志。我国在有限元应用软件研制上与国外发达国家的差距非常大，高水平的商品软件很少。

1.2 弹性力学基本方程的矩阵表示

1. 平衡方程

弹性体 V 域内任一点的平衡微分方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+f_x=0\\&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+f_y=0\\&\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+f_z=0\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

平衡微分方程用矩阵表示为

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}\tag{1-2}$$

式中，$\boldsymbol{L}$ 为微分算子矩阵，$\boldsymbol{\sigma}$ 为应力列阵或称为应力向量，$\boldsymbol{f}$ 为体力列阵或称为体力向量。它们分别表示为

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&0&0&\frac{\partial}{\partial y}&0&\frac{\partial}{\partial z}\\0&\frac{\partial}{\partial y}&0&\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}&0\\0&0&\frac{\partial}{\partial z}&0&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\tag{1-3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\sigma_z\\\tau_{xy}\\\tau_{yz}\\\tau_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x&\sigma_y&\sigma_z&\tau_{xy}&\tau_{yz}&\tau_{zx}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{1-4}$$

$$\boldsymbol{f}=\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}=[f_x \quad f_y \quad f_z]^{\mathrm{T}} \tag{1-5}$$

对于平面问题

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{f}=\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}=[f_x \quad f_y]^{\mathrm{T}}$$

2. 几何方程

在小变形条件下，弹性体内任一点的应变与位移的关系，即几何方程为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1-6}$$

几何方程用矩阵表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \tag{1-7}$$

式中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变列阵或称应变向量；$\boldsymbol{u}$ 为位移列阵或称位移向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^{\mathrm{T}} \tag{1-8}$$

$$\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}=[u \quad v \quad w]^{\mathrm{T}} \tag{1-9}$$

对于平面问题

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=[u \quad v]^{\mathrm{T}}$$

3. 物理方程

各向同性线弹性体的应力与应变的关系，即物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_x\\ \sigma_y&=\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_y\\ \sigma_z&=\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_z\\ \tau_{xy}&=G\gamma_{xy}\\ \tau_{yz}&=G\gamma_{yz}\\ \tau_{zx}&=G\gamma_{zx}\end{aligned}\right\}\tag{1-10}$$

式中，λ 和 G 为拉梅(Lame)常数，它们与弹性模量和泊松比的关系为

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)}\tag{1-11}$$

物理方程用矩阵表示为

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D\varepsilon}\tag{1-12}$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵，有

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & & \lambda+2G & 0 & 0 & 0\\ & & & G & 0 & 0\\ & & & & G & 0\\ & & & & & G\end{bmatrix}\tag{1-13}$$

对于平面应力问题弹性矩阵为

$$\boldsymbol{D}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}$$

对于平面应变问题需把 E 换成$\frac{E}{1-\nu^2}$，ν 换成$\frac{\nu}{1-\nu}$。

4. 应力边界条件

在受已知面力作用的边界 S_σ 上，应力与面力满足的条件为

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} &= \bar{f}_x \\ l\tau_{yx} + m\sigma_y + n\tau_{yz} &= \bar{f}_y \\ l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_z &= \bar{f}_z \end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

式中，l,m,n 分别为边界外法向方向余弦；$\bar{f}_x,\bar{f}_y,\bar{f}_z$ 分别为已知面力分量。

应力边界条件用矩阵表示为

$$\boldsymbol{n\sigma} = \bar{\boldsymbol{f}} \tag{1-15}$$

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \\ \bar{f}_z \end{Bmatrix} = [\bar{f}_x \quad \bar{f}_y \quad \bar{f}_z]^{\mathrm{T}} \tag{1-16}$$

对于平面问题

$$\bar{\boldsymbol{f}} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{Bmatrix} = [\bar{f}_x \quad \bar{f}_y]^{\mathrm{T}}$$

5. 位移边界条件

在位移已知的边界 S_u 上，位移应等于已知位移，即

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \bar{\boldsymbol{u}} \tag{1-17}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = [\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}]^{\mathrm{T}} \tag{1-18}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{u}}$ 为已知位移向量。

对于平面问题

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

6. 虚位移原理

虚位移原理：对于静力可能的应力，外力在虚位移上所做的功等于应力在虚应变上所

做的功，简述为外力虚功等于内力虚功，即

$$\int_V f_i \delta u_i \mathrm{d}v + \int_{S_\sigma} \bar{f}_i \delta u_i \mathrm{d}s = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}v \tag{1-19}$$

式(1-19)称为虚位移方程，虚位移方程等价于平衡微分方程和应力边界条件。式中，f_i 为体力分量；$\bar{f}_i$ 为面力分量；δu_i 为虚位移，即位移的变分；$\delta\varepsilon_{ij}$ 为虚应变，即应变的变分。

虚位移方程用矩阵表示为

$$\int_V \delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}v + \int_{S_\sigma} \delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{f}} \mathrm{d}s = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}v \tag{1-20}$$

7. 最小势能原理

极小势能原理：在所有变形可能的位移中，实际存在的位移使总势能取极小值，即

$$\delta \Pi(u_i) = 0 \tag{1-21}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Pi(u_i) = U + V \\ &U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \mathrm{d}v \\ &V = -\int_V f_i u_i \mathrm{d}v - \int_{S_\sigma} \bar{f}_i u_i \mathrm{d}s \end{aligned}\right\} \tag{1-22}$$

式中，Π 为弹性体的总势能，它是位移 u_i 的泛函；U 为弹性体的应变能；V 为外力势能。

根据弹性力学解的唯一性，总势能的极小值即为最小值，所以也称极小势能原理为最小势能原理。最小势能原理等价于平衡方程和应力边界条件。

结构的总势能用矩阵表示为

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}v - \int_V \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}v - \int_{S_\sigma} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{f}} \mathrm{d}s \tag{1-23}$$

1.3 有限单元法的概念和分析过程

有限单元法分析一般包括三个步骤，即离散化、单元分析和整体分析。这一节中以弹性力学平面问题为例，介绍有限单元法的概念和分析过程。

1. 离散化

首先把一个连续的弹性体划分成由有限多个有限大小的区域组成的离散结构，称这种离散结构为有限元网格，见图 1-3 和图 1-4。这些有限大小的区域就称为有限单元，简称为单元，单元之间相交的点称为结点，设结点总数为 n 个。平面问题常用的单元有三角形单元、矩形单元、任意四边形单元等，见图 1-1。空间问题常用的单元有四面体单元、长方体单元、任意六面体单元等，见图 1-2。对于平面问题，最简单因而最常用的单元是三角形单元。在平面应力问题中，它们是三角板，如图 1-3 所示的深梁。在平面应变问题

中，它们是三棱柱，如图 1-4 所示的重力坝。所有的结点都取为铰接。如果结点位移全部或其某一方向被约束，就在结点上安置一个铰支座或相应的连杆支座。每一单元所受的荷载，都按静力等效的原则移置到结点上，成为结点荷载，称为等效结点荷载。

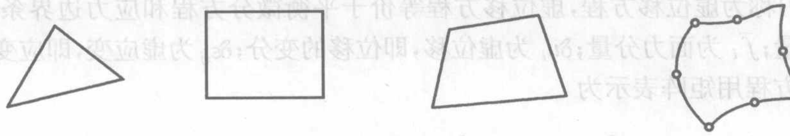

图 1-1

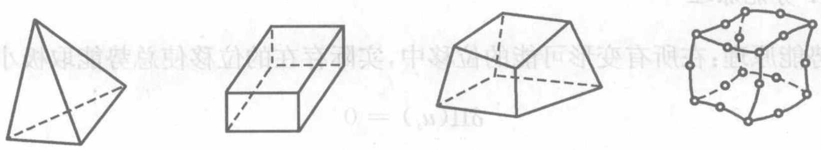

图 1-2

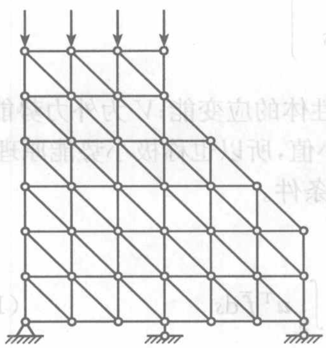

图 1-3

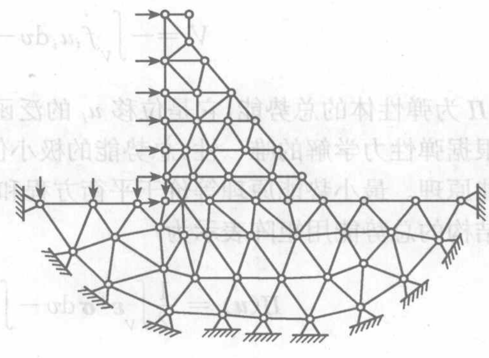

图 1-4

如果采用位移法计算（也可以采用其他方法，但不如位移法计算简单而且能广泛应用），取结点位移为基本未知量。

每个结点有两个位移分量，记 i 结点的位移为 $\boldsymbol{a}_i=\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\end{Bmatrix}$。每个结点上作用有两个等效荷载分量，记 i 结点的等效荷载为 $\boldsymbol{R}_i=\begin{Bmatrix}R_{ix}\\R_{iy}\end{Bmatrix}$。把所有结点的位移和等效结点荷载按顺序排列成列阵，分别记为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{R}$，即

$$\boldsymbol{a}=[u_1\ v_1\quad u_2\ v_2\quad \cdots\quad u_n\ v_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{R}=[R_{1x}\ R_{1y}\quad R_{2x}\ R_{2y}\quad \cdots\quad R_{nx}\ R_{ny}]^{\mathrm{T}}$$

称 $\boldsymbol{a}$ 为整体结点位移列阵，称 $\boldsymbol{R}$ 为整体等效结点荷载列阵。这样就把原来连续的弹性体受分布体力和分布面力作用下求解位移场的问题，转换成为离散结构仅在结点处受等效结点荷载 $\boldsymbol{R}$ 作用下，求各结点位移 $\boldsymbol{a}$ 的问题。在数学上，就是把一个无限自由度的问题转换成为有限自由度的问题。

2. 单元分析

为了在求出结点位移以后能够从而求得应力，就要把单元中的应力用结点位移来表示。在网格中取出一个典型单元，如图 1-5(a)所示，单元的三个结点分别用 i,j,m 表示。首先利用插值的办法将单元上的位移场用结点位移表示

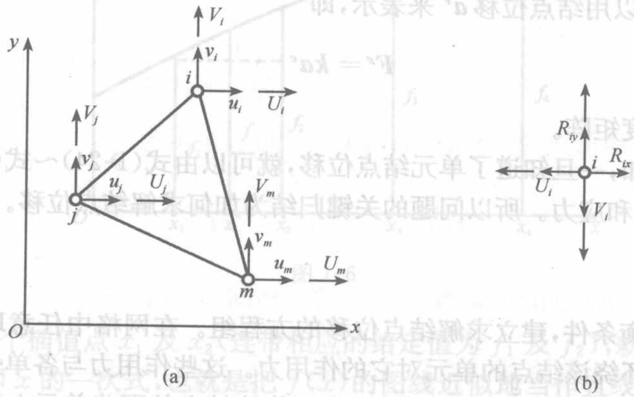

图 1-5

$$\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e \tag{1-24}$$

根据几何方程，单元上的应变可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e=\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e \tag{1-25}$$

根据物理方程，单元上的应力可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e=\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}^e \tag{1-26}$$

式(1-24)～式(1-26)中，$\boldsymbol{B}$ 为一个 3×6 的矩阵，称为应变转换矩阵；$\boldsymbol{S}$ 也是一个 3×6 的矩阵，称为应力转换矩阵；$\boldsymbol{a}^e$ 为单元结点位移列阵，即

$$\boldsymbol{a}^e=[u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^{\mathrm{T}}$$