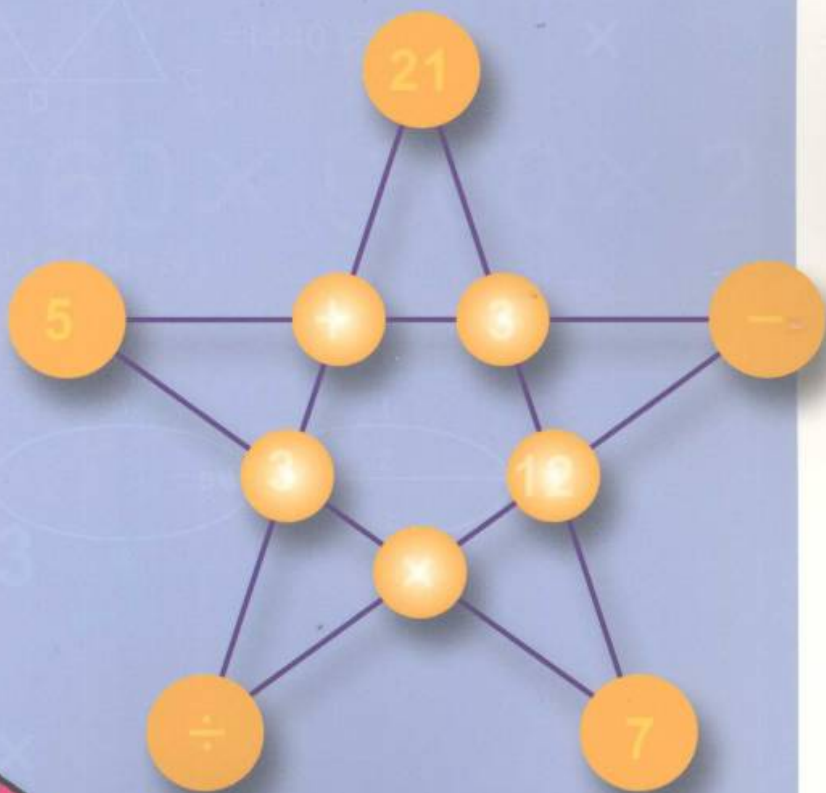


智力開發系列

# 挑戰奧數

領你從容跨進奧數大廳



孟繁學編著 萬里機構·明天出版社出版

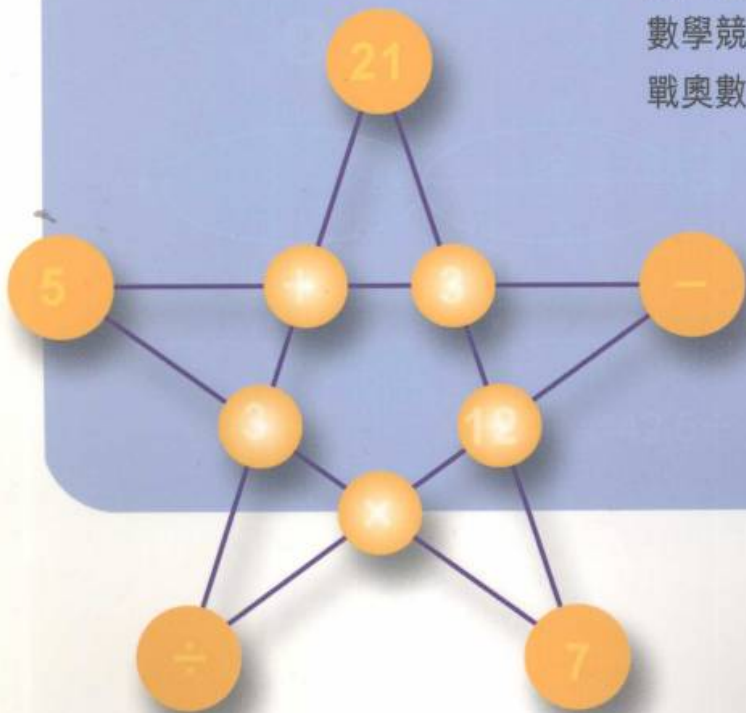
# 挑戰奧數

領你從容跨進奧數大廳



- 充滿智力挑戰與頭腦冒險的奧林匹克數學競賽，集各種問題、推理於一體；
- 年齡、追逐、雞兔、植樹、對策、利潤等問題，以及抽屜、容斥等原理都能在本書找到答案；
- 使讀者融會貫通，把握規律，學會解題方法，理清思考途徑。

細閱本書，將使你徜徉於奧林匹克數學競賽的大廳，增強參與拼搏挑戰奧數的信心。



ISBN 962-14-3171-9



9 789621 431714



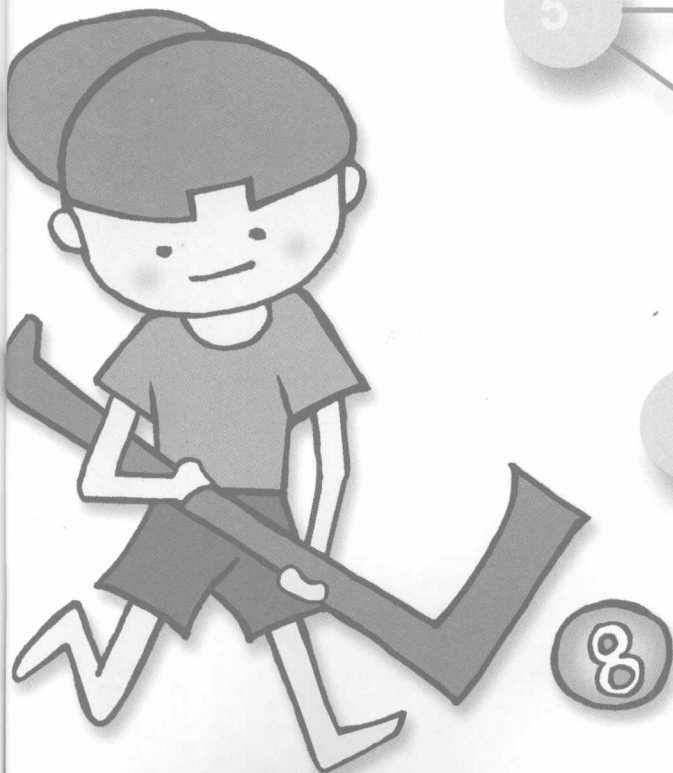
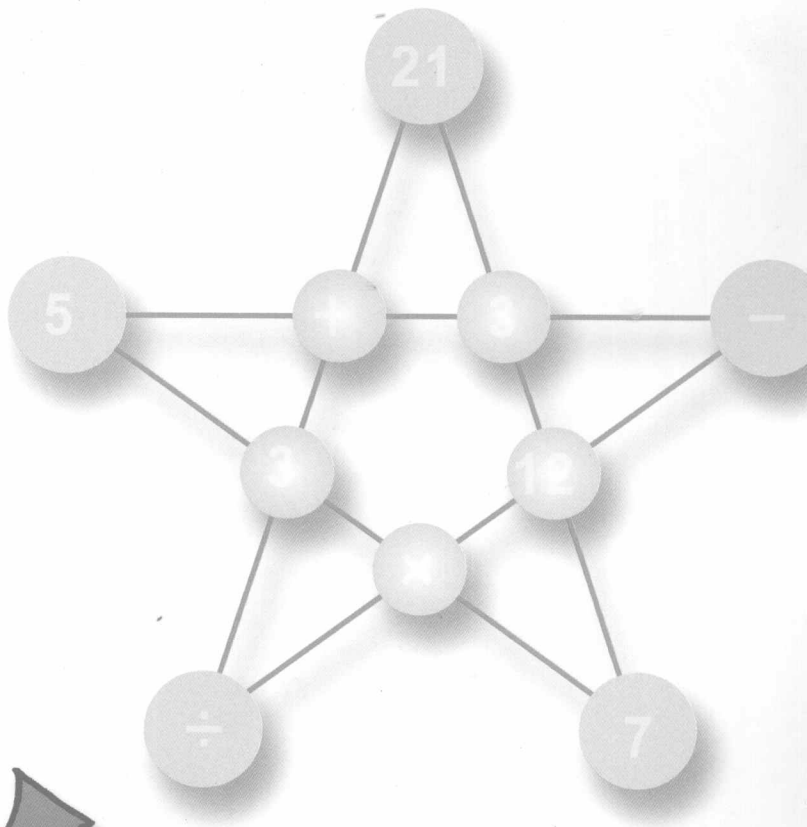
聯合出版集團

H.K.\$45.00

Published in Hong Kong

# 挑戰奧數

領你從容跨進奧數大廳



智力開發系列

**挑戰奧數——領你從容跨進奧數大廳**

編着者

孟繁學

編輯

彭敏

出版者

萬里機構·明天出版社

香港鰂魚涌英皇道1065號東達中心1305室

電話：2564 7511 傳真：2565 5539

網址：<http://www.wanlibk.com>

發行者

香港聯合書刊物流有限公司

香港新界大埔汀麗路36號中華商務印刷大廈3字樓

電話：2150 2100 傳真：2407 3062

電郵：[info@suplogistics.com.hk](mailto:info@suplogistics.com.hk)

承印者

新豐柯式製本有限公司

出版日期

二〇〇六年三月第一次印刷

版權所有·不准翻印

ISBN-10: 962-14-3171-9

ISBN-13: 978-962-14-3171-4

# 引言



## 大家都來參加奧數比賽

香港每年都會舉辦奧林匹克數學比賽，通過比賽選拔傑出的學生，代表香港參加中國或國際的奧數比賽，力爭優異成績為港爭光。隨着香港參加奧數比賽人數逐年的增加，對各方面的影響也越來越大了。數學比賽不僅增添了參賽者學習數學的信心，激發了參賽者克服困難的鬥志，也為對數學有興趣的學生造就了不少自我提高的機會。

奧林匹克數學比賽不但要求參賽者有冷靜且靈活的頭腦，而且還要求他們有周詳的數學思維和坦然面對得失的心理素質。通過奧林匹克數學比賽，參賽者可以鞏固和擴大所學的知識，活躍思維，激發求知欲望，培養數學興趣，發展數學特長。因此，如何讓他們接受數學的挑戰和考驗，為參賽作好準備；如何為他們多提供一些指導和參考，提高他們學習數學的興趣，引導他們主動學習、分析、探究、思考和鑽研與數學有關的問題；這些都是需要認真解決的問題。

本書以引導學生積極參與奧數比賽為目的，也幫助那些沒有打算參賽的同學認識數學，裝備自己，從而在數學的領域中培養濃厚的興趣，以及在數學上爭取驕人的成績。

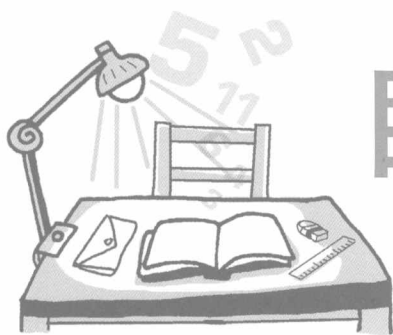
奧數比賽的主要意義並不是培養數學家，而是要引導入門，打好基礎，培養學生的數學觀念，開拓頭腦中的數學空間，促進學習成績的全面提高。

基於這一認識，我們確定以開拓視野，活躍思維，引導自學為基點，以難易適度，誘導入門為指導，把課本中已學的適當拓寬延伸，重在介紹新知識，開闢新的天地，發展新的思維空間。

編選內容集中展示了數十類常見的數學問題，囊括古今，涉及面十分廣泛，使奧數比賽題型盡收眼底。編選時，注重典型例題，由淺入深，靈活多樣，使之貼近奧賽，防止“定勢”思維。每類問題，力求量少質精，揭示本質，重在啟智激思，避免生吞活剝，思維僵化。題型之間相互溝通，使讀者可以融會貫通，把握規律，學會解題方法，理清思考途徑。以“博、全、精”為目標，以開闊視野、拓寬思路為原則，避免片面追求“深、難、散”的傾向，使讀者可以居高臨下，指導運算。

希望本書能為你眼前增添一道新的亮點，增強你參與挑戰奧數比賽的信心。





# 目 錄

## 引 言

### 第一部分 和差積商基本問題

奧妙無窮的數字 .....	8
估算問題 .....	11
餘數問題 .....	15
“移多補少”的平均問題 .....	18
和差問題 .....	21
和倍問題 .....	25
差倍問題 .....	28
綜合數字關係的年齡問題 .....	31

### 第二部分 生活中常見問題

歸一問題 .....	36
需要逆向思維的還原問題 .....	38
相遇問題 .....	41
你追我趕的追及問題 .....	45
啟迪思維的時鐘問題 .....	49
“蝸牛爬牆”的升降問題 .....	52
雞兔問題 .....	54



### 第三部分 工程財務問題

盈虧問題 .....	58
間接與直接關係的相抵問題 .....	61
替換問題 .....	63
“1”與工程問題 .....	65
利息問題 .....	69
利潤問題 .....	71
糖水與濃度問題 .....	74
植樹問題 .....	77
方陣問題 .....	79

### 第四部分 排列組合與統籌

比例問題 .....	82
排列組合問題 .....	85
統籌問題 .....	88
“常勝將軍”的對策問題 .....	91
推理問題 .....	94
染色問題 .....	97
尋求“極端”的最值問題 .....	100
不定方程問題 .....	103
定義新運算 .....	108

### 第五部分 抽屜與容斥原理

容斥原理 .....	112
抽屜原理 .....	115
周期原理 .....	117

### 附錄：參考答案



# 第一部分

# 和差積商基本問題





## 奧妙無窮的數字

數字，表面看它平靜如水，當你深入地研究一番，就會發現無窮奧妙。

比如，63，是個兩位數，逆序排列數字是36。它具有以下的特性：

◇ 一個兩位數與它逆序數的和，一定是這個兩位數數字和的11倍。

$$\text{如，}(63+36) \div (6+3) = 11$$

◇ 一個兩位數與它逆序數的差，一定是這個兩位數數字差的9倍。

$$\text{如，}(63-36) \div (6-3) = 9$$

三位數又另有一番奧妙：

一個三位數與它逆序數的差，等於它的百位數字與個位數字差的99倍。

$$\text{如，}(751-157) \div (7-1) = 99$$

運用這些特性可以作一些有趣的運算。

此外，奇數、偶數、連續數，它們的計算更有一番奇妙！

### 例1

我家的門牌號碼是個兩位數，數字的和是13，數字的差是3，十位數字還比個位數字大。我家的門牌號碼是多少？

### 分析與解

本題直接用和差法可以解出。

如果運用兩位數與它的逆序數的特性，同樣可以解出。

因為“一個兩位數與它逆序數的和，一定是這個兩位數數字和的11倍”，可知原數與它的逆序數和是：

$$13 \times 11 = 143$$

因為“兩位數與它的逆序數的差，是這個兩位數數字差的9倍”，可知原數與它的逆序數的差是：

$$3 \times 9 = 27$$

已知數字和是143，數字差是27，此數可求：

$$(143+27) \div 2=85$$

因此，我家的門牌號是85。

### 例2

有一個兩位數，十位數字的值是個位數字的3倍，假如從這個數裏減去5，兩個數字就相等，這個兩位數是多少？

### 分析與解

在1~9九個數字中，十位數字是個位數字的3倍，個位數最大是3。

從這個數裏減去5，必須從十位數字退下1，才能夠減的。

減後的數，十位數字上少1，個位上加5。數字便相等了。由此可知數字間差數為 $1+5=6$ 。

至此問題轉化為：已知十位數字與個位數字相差6，十位數字是個位數字的3倍。用差倍方法可求：

$$(1+5) \div (3-1)=3 \dots\dots\dots \text{個位數字}$$

$$3 \times 3=9 \dots\dots\dots \text{十位數字}$$

另解：這樣的兩位數只有93、62、31三個。減去5兩個數字相等只有93。

$$93-5=88$$

故這個兩位數是93。

### 例3

一個兩位數與它的逆序數之差為45，十位數字是個位數字的3倍少1，這個兩位數是多少？

### 分析與解

根據“兩位數與其逆序數的差等於其數字差的9倍”，可知十位數字與個位數字的差是： $45 \div 9=5$

按差倍問題可解：

$$\text{個位數字是：} (5+1) \div (3-1)=3$$

$$\text{十位數字是：} 3 \times 3-1=8$$



另解：二個數字之差為5的兩位數有94、83、72、61、50五個，十位數是個位數的3倍少1，只有83。

因此：這個兩位數是83。

#### 例4

一個三位數，數字和為15，百位數字與個位數字的和是十位數字的2倍。它的逆序數比它少594。這個三位數是多少？

#### 分析與解

從已知條件中，依據和倍問題可求得十位數字是：

$$15 \div (2+1) = 5$$

百位數字與個位數字的和為：

$$15 - 5 = 10$$

根據“三位數與它的逆序數的差等於它百位數字與個位數字差的99倍”，可知個、百兩位數字差是：

$$594 \div 99 = 6$$

這樣，已知和為10，差為6，則個、百兩位數字可求：

$$\text{百位數字為：} (10+6) \div 2 = 8$$

$$\text{個位數字為：} (10-6) \div 2 = 2$$

因此：原數為852。



1. 有七個連續奇數，第二個與第六個和為38，求各數。
2. 有十個連續數，第五個與第八個的和為55，求第一個數。
3. 有個兩位數，數字的和是10，數字的差是4，十位數字大於個位數字，這個數是多少？
4. 一個三位數，數字和是14，百位數字等於個、十兩位數字的和，要是把百位數字與十位數字交換位置，得數就比原數少360，原數是多少？



## 估算問題

估算就是遵循一定的原則，對問題進行測定，從而確定其結果的大致範圍。

如 $999 \times 99 = ?$

不通過具體運算，我們可以粗略估算它的結果在99900 (100個999) ~ 98000 (1000個98) 之間。

估算只是粗略的得數，不是精確結果。但也不是“離題萬里”的胡亂猜測，而是遵循一定原則和技巧的預測。

常用的方法是省略尾數或取近似值，也就是用放大或縮小的計算方法來估計運算結果的大致範圍。

放大和縮小的範圍要適中，太小了算起來麻煩，太大了所取的近似值精確度太低。因此調整放大或縮小範圍是估算正確與否的關鍵。

### 例1 估計值的範圍

估計 $\frac{4}{9} + \frac{6}{13} + \frac{9}{19}$  的值的範圍。

#### 分析與解

本題的三個分母是互質數，按法則需要通分。具體運算起來非常麻煩，運算結果還可能出錯，為了驗證結果的正誤，可以進行估算。

先將各分數放大：

$$\frac{4}{9} + \frac{6}{13} + \frac{9}{19} < \frac{4}{8} + \frac{6}{12} + \frac{9}{18} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1.5$$

再將各分數縮小：

$$\frac{4}{9} + \frac{6}{13} + \frac{9}{19} > \frac{4}{10} + \frac{6}{15} + \frac{9}{20} = 0.4 + 0.4 + 0.45 = 1.25$$

由此可估計，算式的值在1.25~1.5之間。

### 例2

下面算式的兩個方框內應填甚麼數，才能使這道整數除法題餘數最大？

$$\square \div 25 = 104 \cdots \square。$$

### 分析與解

本題只告知除數和商。

被除數必須大於 $104 \times 25$ 才能有餘數。

餘數必須 $< 25$ ，要保證餘數最大，則餘數必須等於24。

依此原則，問題可解：

$$104 \times 25 + 24 = 2600 + 24 = 2624$$

$$\text{即：} \boxed{2624} \div 25 = 104 \cdots \cdots \boxed{24}$$

### 例3

兩個相鄰的偶數的乘積比625大，比800小，這兩個相鄰的偶數是多少？

### 分析與解

$800 < 30 \times 30$ ，可知這兩個偶數不能比30大。 $625 = 25 \times 25$ 可知這兩個數必比25大。由此，可斷定此相鄰兩偶數在26~30之間。經試算：

$$26 \times 28 = 728 > 625 \cdots \cdots \text{符合題意}$$

$$28 \times 30 = 840 > 800 \cdots \cdots \text{不合題意}$$

$$\text{即：} 800 > 26 \times 28 > 625$$

因此，這兩個相鄰的偶數是26和28。

### 例4

$$\text{已知 } S = \frac{1}{\frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \cdots + \frac{1}{1991}} \text{，求 } S \text{ 的整數部分。}$$

### 分析與解

題中的這些分數共同特點是分子都是1，從這個特點中可找出估算的突破口，因為分子相同的分數，分母大的分數值小，分母小的分數值反而大。從分母1980起至1991止共有12個分數。

① 先把12個分數放大，若分母都是1980，則：

$$\frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \cdots + \frac{1}{1991} < \frac{1}{1980} \times 12 = \frac{12}{1980}$$

② 再把12個分數縮小，若分母都是1991，則：

$$\frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \cdots + \frac{1}{1991} > \frac{1}{1991} \times 12 = \frac{12}{1991}$$

從上兩式，可斷定：

$$\frac{12}{1980} < S < \frac{12}{1991}$$

將兩分數化簡得：

$$165 < S < 165\frac{11}{12}$$

介於165和 $165\frac{11}{12}$ 之中S的整數值只能是165。

因此，S的整數部分是165。

### 例5

一個四位數6□□6能被134整除，求這個四位數除以134的商。

### 分析與解

這題的關鍵是要把被除數估算出來，根據所給的條件，可以斷定被除數在6006~6996之間。再通過試除確定商的範圍，逐步縮小“包圍圈”。

$$6006 \div 134 = 44 \cdots 110$$

$$6996 \div 134 = 52 \cdots 28$$

由此，又可斷定商數的範圍在44~52之間。

題中已告知是“整除”，則商的個位數與除數134的個位相乘的積的個位必須是6。在1~9各數中與4相乘的積的個位是6的只有數字9。而44~52之間個位是9的只能是49。

因此，商是49。

### 例6

$$456789123 \div 987654321 \approx 0.\square\square \text{ (保留兩位小數)}$$

### 分析與解

因為得數只需要保留兩位小數，為了縮小計算量，可以用省略尾數的方法進行估算。

將被除數和除數都縮小到 $\frac{1}{10}$ ，再省略尾數並保留整數，得

$$46 \div 99 = 0.464646 \cdots \approx 0.47$$

將被除數和除數都縮小到  $\frac{1}{10^6}$  再省略尾數並保留整數，得

$$457 \div 988 = 0.46255 \cdots \approx 0.46$$

將被除數和除數都縮小到  $\frac{1}{10^5}$  再省略尾數並保留整數，得

$$4568 \div 9877 = 0.46248 \cdots \approx 0.46$$

從而可以斷定：原式的商保留兩位小數是0.46。



1.  內應填甚麼數，才能使這道整數除法的餘數最小？

$$\square \div 998 = 99 \cdots \square$$

2. 某車間加工一種零件，4人7小時能加工102個，照這樣計算，10人加工255個零件，需要 \_\_\_\_\_ 小時。

(A) 8    (B) 7    (C) 9    (D) 10

3. 在四位數  $3\square\square6$  的方框裏填上合適的數，使它能被246整除。

4. 求  $31.719 \times 1.2798$  的整數部分。

5. 求繁分數  $\frac{1}{\frac{1}{70} + \frac{1}{71} + \frac{1}{72} + \frac{1}{73} + \frac{1}{74}}$  化簡後的整數部分。

6. 設  $S = \frac{1}{\frac{1}{1985} + \frac{1}{1986} + \frac{1}{1987} + \cdots + \frac{1}{1992}}$ ，求S的整數部分。





## 餘數問題

我們知道：

被除數 $\div$ 除數=商

被除數 $\div$ 商=除數

商 $\times$ 除數+餘數=被除數

餘數問題常與數的整除問題結合在一起。熟練掌握數的整除特徵，是解答餘數問題的關鍵。

其次，“尾數問題”、“同餘問題”的一些特點，也是經常會用到的，如：

- ◇ 兩個整數和的尾數，就是這兩個整數尾數和的尾數；
- ◇ 兩個整數差的尾數，等於被減數尾數加上10與減數之差的尾數；
- ◇ 一個整數平方的尾數是0、1、4、5、6、9；
- ◇ 若整數 $a$ 、 $b$  ( $a > b$ ) 對於 $m$ 同餘，則 $a$ 、 $b$ 之差一定能被 $m$ 整除；
- ◇ 如果整數 $a$ 、 $b$ 除以 $m$ 的餘數相同， $b$ 、 $c$ 除以 $m$ 餘數相同，則 $a$ 、 $c$ 除以 $m$ 的餘數也相同；
- ◇ 被除數 $a$ 加上除數 $b$ 的倍數，再除以 $b$ ，餘數 $r$ 不變。

### 例1

一個小於200的數，它除以11餘8，除以13餘10，那麼這個數是\_\_\_\_\_。

### 分析與解

從除以11餘8，可知，若這個數加上3，即為11的倍數；再滿足除以13餘10，若也加上3，就是13的倍數了。所以，這個數加上3後，便是11與13的公倍數。即，

$11 \times 13 = 143$  或  $143$  的  $n$  倍 ( $n$  為自然數)

又因為這個數小於200，所以它加上3後應小於203。

因此，符合條件的只有143。

所求的這個數應是： $143 - 3 = 140$