普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

信号与系统

学习指导及题解

陈后金 主编
胡 健 薛 健 编著

高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

信号与系统

学习指导及题解

陈后金　主编

胡 健　薛 健　编著

高等教育出版社
Higher Education Press

内容简介

本书是陈后金教授主编的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《信号与系统》的配套教材。

本书围绕主教材的章节结构展开，每章由基本知识与重要公式、学习要求、重点和难点提示、思考题、习题解答5个相互关联的部分组成，突出基本理论、基本概念和基本方法。习题解答给出了主教材中所有习题的详细解答，并对重点和难点习题附加了分析思路。书后给出了近年来北京交通大学的4套研究生入学考试试题及其解答。

本书可作为电子信息工程、通信工程、信息工程、自动控制工程、生物医学工程、计算机等专业的学生学习“信号与系统”课程或报考相关专业研究生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统学习指导及题解/陈后金主编. —北京：高等教育出版社，2008.12
ISBN 978-7-04-024961-3

Ⅰ.信… Ⅱ.陈… Ⅲ.信号系统-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第162431号

策划编辑 刘激扬 **责任编辑** 孙 薇 **封面设计** 张志奇 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 马敬茹 **责任校对** 张 颖 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com

开 本	787×960 1/16	版 次	2008年12月第1版
印 张	18.75	印 次	2008年12月第1次印刷
字 数	340 000	定 价	23.60元

物料号 24961-00

前　言

“信号与系统”课程是电气信息类专业重要的技术基础课程，也是信号处理课群（信号与系统，数字信号处理，信号分析与处理实验，DSP 技术课程设计等）的核心课程。以陈后金教授为带头人的信号处理教学团队，开拓进取，将“信号与系统”课程建成为首批国家精品课程和首批国家双语教学示范课程（网址：http://col.njtu.edu.cn/jingpinke/xhyxt/index.htm）。按照主教材与辅助教材、纸质教材与电子教材、理论教材与实验教材相结合进行立体化教材建设，已编著出版了普通高等教育“十一五”国家级规划教材《信号与系统》（高等教育出版社，2007），教育部电子电气基础课程教学指导分委员会立项实验教材《信号分析与处理实验》（高等教育出版社，2006），《信号与系统电子教案》也即将由高等教育出版社出版。

本书作为主教材《信号与系统》的辅助教材，按照主教材的连续与离散并行，先信号分析后系统分析、先时域分析后变换域分析的结构体系，与主教材相对应共分 9 章，每章由基本知识与重要公式、学习要求、重点和难点提示、思考题、习题解答 5 个相互关联的部分组成。基本知识与重要公式提炼了基本理论、基本概念和基本方法，学习要求突出了需要掌握的知识点，思考题引导读者对相关原理和概念的关注，习题解答给出了主教材中所有习题的详细解答，并对重点和难点习题附加了分析思路。书后给出了北京交通大学近年来 4 套研究生入学考试试题及其解答。

本书可作为电子信息工程、通信工程、信息工程、自动控制工程、生物医学工程、计算机等专业的学生学习“信号与系统”课程或报考研究生的参考书。

本书由陈后金、胡健、薛健编写，郝晓莉、魏杰、钱满义、周航、陶丹、申艳、杨恒等提供了部分素材，最后由陈后金统稿并担任主编。本书的出版得到了北京交通大学电子信息工程学院和国家电工电子实验教学示范中心的大力支持，在此深表谢意。

限于水平，书中错误及不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2008 年 6 月

于北京交通大学国家电工电子实验示范中心

目　　录

第1章 信号与系统分析导论

一、基本知识与重要公式

1. 信号分类与特性

信号是指消息的表现形式与传送载体。根据信号和自变量的特性，信号有多种不同的分类方式。从信号的确定性划分，信号可分为确定信号与随机信号；从信号自变量的取值划分，信号可分为连续时间信号与离散时间信号；从信号的周期性划分，信号可分周期信号与非周期信号；从信号的可积性划分，信号可分为能量信号与功率信号。

确定信号是指能够以确定的时间函数表示的信号，而随机信号则是不能以确定的时间函数表示的信号，分别如图 1－1(a)、(b) 所示。连续时间信号是指在信号的定义域内，除有限个间断点外，任意时刻都有确定的函数值的信号，而离散时间信号其时间自变量的定义域为一些离散时刻，分别如图 1－1(c)、(d) 所示。连续时间信号和离散时间信号若分别满足

$$x(t)=x(t+nT_0),\quad n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\ -\infty<t<\infty \tag{1-1}$$

$$x[k]=x[k+nN],\quad n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\ -\infty<k<\infty \tag{1-2}$$

其中 T_0、N 为基本周期(基波周期)，则为周期信号，否则为非周期信号。若信号的能量为非零的有限值，且其功率为零，则为能量信号；若信号的能量为无限值，且其功率为非零的有限值，则为功率信号。

本课程重点研究确定性的连续时间信号和离散时间信号的时域及变换域分析。

2. 系统的分类和特性

系统是指能够完成某些特定功能的整体。根据系统的数学模型和基本特性，系统可分为连续时间系统与离散时间系统；线性系统与非线性系统；时变系统与非时变系统；因果系统与非因果系统，稳定系统与非稳定系统等。若系统的输入激励与输出响应均为连续时间信号，则为连续时间系统；若系统的输入激励与输出响应均为离散时间信号，则为离散时间系统。若系统具有线性特性(均匀特性与叠加特性)，则为线性系统；否则，就是非线性系统。若系统在零状态条件下，其输出响应与输入激励的关系不随输入激励作用于系统的时间起点而改变时，则为非时变系统；否则，就是时变系统。若系统仅当输入激励作用时才

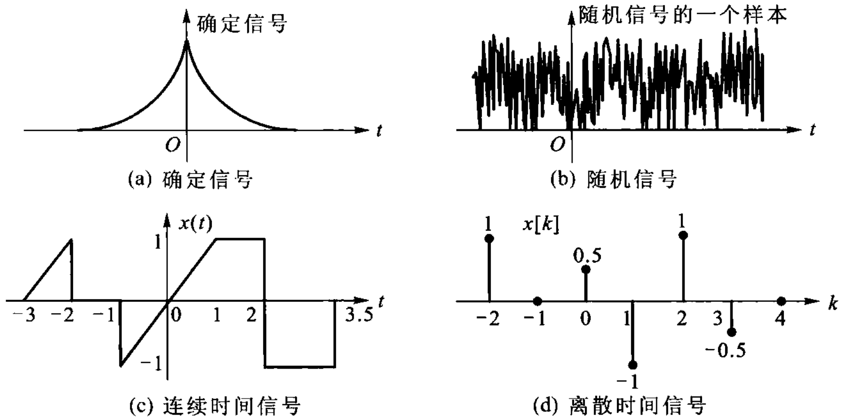


图 1-1 信号的分类

产生输出响应则为因果系统；否则，就是非因果系统。若系统对任意的有界输入其输出也有界，则为稳定系统；否则，就是非稳定系统。

本课程主要研究线性非时变的连续时间系统和离散时间系统的时域分析与变换域分析，因此线性非时变特性是进行系统分析的前提和基础。

线性特性包括均匀特性与叠加特性，连续时间系统的线性特性可表示为

若

$$y_1(t)=T\{x_1(t)\},\quad y_2(t)=T\{x_2(t)\}$$

则

$$T\{\alpha\cdot x_1(t)+\beta\cdot x_2(t)\}=\alpha\cdot y_1(t)+\beta\cdot y_2(t) \tag{1-3}$$

式中，α,β 为任意常数。离散时间系统的线性特性可表示为

若

$$y_1[k]=T\{x_1[k]\},\qquad y_2[k]=T\{x_2[k]\}$$

则

$$T\{\alpha\cdot f_1[k]+\beta\cdot f_2[k]\}=\alpha\cdot y_1[k]+\beta\cdot y_2[k] \tag{1-4}$$

式中，α,β 为任意常数。

非时变特性是指系统在零状态条件下，输出响应与输入激励的关系不随输入激励作用于系统的时间起点而改变。连续时间系统的非时变特性可表示为

若

$$y_{zs}(t)=T\{x(t)\}$$

则

$$T\{x(t-t_0)\}=y_{zs}(t-t_0) \tag{1-5}$$

式中，t_0为任意值，如图 1－2 所示。

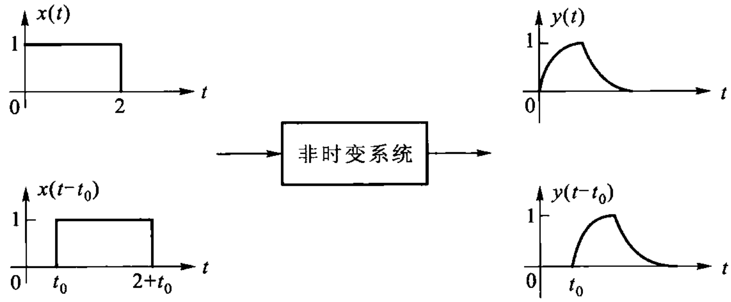


图 1－2　非时变系统

离散时间系统的非时变特性可表示为

若

$$y_{zs}[k]=T\{x[k]\}$$

则

$$T\{x[k-n]\}=y_{zs}[k-n] \tag{1-6}$$

式中，n 为任意整数。

3．信号与系统分析概述

信号与系统分析主要包括信号分析与系统分析两部分内容。信号分析的核心内容是信号分解，即将复杂信号分解为一些基本信号的线性组合，通过研究基本信号的特性和信号的线性组合关系来研究复杂信号的特性。信号分析的主要内容可以简要概括如下：

- 信号分析
  - 连续信号
    - 时域：信号分解为单位冲激信号的线性组合
    - 频域：信号分解为不同频率正弦信号的线性组合
    - 复频域：信号分解为不同频率复指数信号的线性组合
  - ↓ 抽样
  - 离散信号
    - 时域：信号分解为单位脉冲序列的线性组合
    - 频域：信号分解为不同频率正弦序列的线性组合
    - 复频域：信号分解为不同频率复指数序列的线性组合

系统分析的主要任务就是描述系统（即建立系统的数学模型），求解线性非时变系统的输出响应。系统的描述主要有输入输出描述和状态空间描述。对于线性非时变系统，其零状态响应可以利用信号分析，通过基本信号作用在系统上的响应，以及系统的特性而求出。系统分析的主要内容可以简要概括如下：

- 系统分析
  - 连续系统
    - 系统的描述
      - 输入输出描述：N 阶微分方程
      - 状态空间描述：N 个一阶微分方程组
    - 系统响应的求解
      - 时域：$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$
      - 频域：$Y_{zs}(\mathrm{j}\omega) = X(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$
      - 复频域：$Y_{zs}(s) = X(s)H(s)$
  - 离散系统
    - 系统的描述
      - 输入输出描述：N 阶差分方程
      - 状态空间描述：N 个一阶差分方程组
    - 系统响应的求解
      - 时域：$y_{zs}[k] = x[k] * h[k]$
      - 频域：$Y_{zs}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$
      - 复频域：$Y_{zs}(z) = X(z)H(z)$

二、学习要求

(1) 掌握信号的定义及分类。

(2) 掌握系统的描述、分类及特性。

(3) 重点掌握确定信号及线性非时变系统的特性。

三、重点和难点提示

由于本课程主要研究线性非时变系统的时域分析与变换域分析，因此线性非时变是本章的重点。学习时应能够判断系统是否为线性非时变系统，牢固掌握并能熟练应用式(1－3)和式(1－4)的线性特性，以及式(1－5)和式(1－6)的非时变特性。

在判断具有初始状态的系统是否线性时，应从可分解性、零输入响应线性与零状态响应线性三个方面来判断，若系统的输出响应可分解为零输入响应与零状态响应之和，且系统的零输入响应对所有的初始状态呈现线性特性，系统的零状态响应对所有的输入信号呈现线性特性，则为线性系统。否则，为非线性系统。

在判断系统的非时变特性时，不涉及系统的初始状态。一般，若系统零状态响应 $y(t)$ 中除了激励 $x(t)$ 外，仍含有时间变量 t，则为时变系统。

四、思考题

(1) 如何对信号进行分类？各类信号的本质区别是什么？

(2) 一个信号可否既是能量信号又是功率信号？可否既不是能量信号又不是功率信号？

(3) 如何判断一个系统为线性系统？线性系统是否一定为非时变系统？

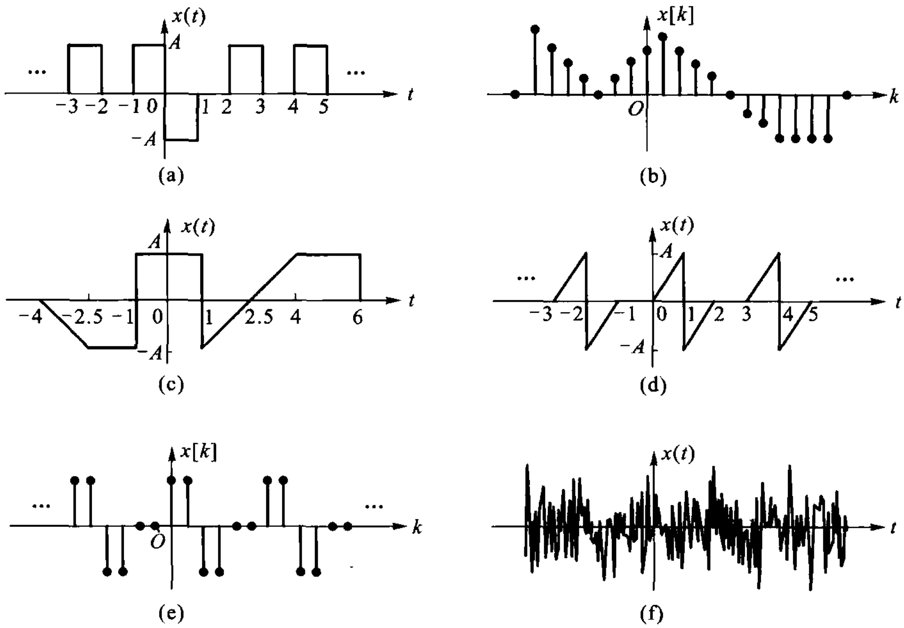
(4) 如果某系统对某些输入信号其输出滞后输入，可否断定该系统为因果

系统？

（5）信号与系统为何是不可分割的整体？

五、习题解答

1－1　试确定题 1－1 图所示各信号的类型。



题 1－1 图

解：可以从不同的角度对信号进行分类，主要分为确定信号与随机信号、连续信号与离散信号、周期信号与非周期信号、能量信号与功率信号等。

（a）信号是确定、连续、非周期、功率信号。

（b）信号是确定、离散、非周期、能量信号。

（c）信号是确定、连续、非周期、能量信号。

（d）信号是确定、连续、周期、功率信号（周期信号为功率信号）。

（e）信号是确定、离散、周期、功率信号。

（f）信号是随机、连续、非周期、功率信号（随机信号为功率信号）。

1－2　设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是基本周期分别为 T_1 和 T_2 的周期信号。证明 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ 是周期为 T 的周期信号的条件为

$$mT_1=nT_2=T（m、n 为正整数）$$

证：设 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ 的周期为 T，则存在

$$x(t+T)=x_1(t+T)+x_2(t+T)=x_1(t)+x_2(t)$$

而

$$x_1(t)+x_2(t)=x_1(t+mT_1)+x_2(t+nT_2)$$

所以

$$mT_1=nT_2=T$$

1-3 设 $x_1[k]$ 和 $x_2[k]$ 是基本周期分别为 N_1 和 N_2 的周期序列。证明 $x[k]=x_1[k]+x_2[k]$ 是周期为 N 的周期序列的条件为

$$mN_1=nN_2=N(m、n\text{ 为正整数})$$

证:设 $x[k]=x_1[k]+x_2[k]$ 的周期为 N,则存在

$$x[k]=x_1[k+N]+x_2[k+N]=x_1[k]+x_2[k]$$

而

$$x_1[k]+x_2[k]=x_1[k+mN_1]+x_2[k+nN_2]$$

所以

$$mN_1=nN_2=N$$

1-4 试判断下列信号是否是周期信号。若是,确定其周期。

(1) $x(t)=\sin(\pi t),t\geqslant 0$;　(2) $x(t)=\sin(2\pi t)+\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$;

(3) $x(t)=\sin(2t)+\cos(3\pi t)$;　(4) $x(t)=e^{-2t}\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$;

(5) $x[k]=e^{j\left(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$;　(6) $x[k]=\sin\left(\frac{3}{4}k\right)$;

(7) $x[k]=\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}k\right)$;　(8) $x[k]=\sin\left(\frac{\pi}{6}k\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right)$。

解:(1) 周期信号必须在区间($-\infty<t<\infty$)上满足 $x(t)=x(t+T)$,由于该信号仅在 $t\geqslant 0$ 时为正弦信号,所以信号 $x(t)$ 是非周期信号。

(2) 正余弦信号的相位不影响其周期。由于 $\sin(2\pi t)$ 是周期为 $T_1=1$ s 的周期信号,$\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$ 是周期为 $T_2=\frac{2}{3}$ s 的周期信号,故根据题 1-2 的结论,信号 $x(t)$ 是周期信号,周期 $T=2$ s。

(3) 由于 $\sin(2t)$ 是周期为 $T_1=\pi$ s 的周期信号,$\cos(3\pi t)$ 是周期为 $T_2=\frac{2}{3}$ s的周期信号,故根据题 1-2 的结论可知,信号 $x(t)$ 不是周期信号。

(4) 不满足 $x(t)=x(t+T)$,所以此信号为非周期信号。

(5) 如果离散虚指数和正弦信号是周期为 N 的周期信号,则有 $\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{M}{N}$,$M$、$N$ 是整数。由于 $\Omega_0=\frac{\pi}{2}$,$\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{1}{4}$,所以此信号是周期信号,周期 $N=4$。

（6）由于 $\Omega_0=\dfrac{3}{4},\dfrac{\Omega_0}{2\pi}=\dfrac{3}{8\pi}$，不是有理数，所以此信号是非周期信号。

（7）信号 $x[k]$ 可表示为 $x[k]=\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{4}k\right)=\dfrac{1}{2}\left[1-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}k\right)\right]$，其中 $\dfrac{1}{2}$ 是直流信号、$\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}k\right)$ 是周期 $N=4$ 的周期信号。由于直流信号与周期信号叠加不影响信号的周期，故信号 $x[k]$ 是周期信号，周期 $N=4$。

（8）由于 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}k\right)$ 是周期为 $N_1=12$ 的周期序列，$\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}k\right)$ 是周期为 $N_2=5$ 的周期序列，故根据题 1-3 的结论可知，信号 $x[k]$ 是周期信号，周期 $N=60$。

1-5　已知正弦信号 $x(t)=\cos\left(10t+\dfrac{\pi}{6}\right),(-\infty<t<+\infty)$。

（1）对 $x(t)$ 等间隔抽样，求出使 $x[k]=x(kT_s)$ 为周期序列的抽样间隔 T_s；

（2）如果 $T_s=0.1\pi$ s，求出 $x[k]=x(kT_s)$ 的基本周期 N。

解：连续周期正弦信号经过等间隔抽样得到的离散正弦信号不一定是周期信号，若为周期离散信号，则抽样间隔 T_s 必须满足一定的条件。

设 $x[k]$ 是对连续信号 $x(t)=\cos(\omega_0 t)$ 等间隔抽样所得的离散信号，即 $x[k]=\cos(\omega_0 kT_s)$。要使其是周期为 N 的周期信号，则存在 $\dfrac{\Omega_0}{2\pi}=\dfrac{M}{N}$（$M,N$ 是整数）。由于 $\Omega_0=\omega_0T_s$，所以有 $\dfrac{\omega_0T_s}{2\pi}=\dfrac{M}{N}$，即当抽样间隔 $T_s=\dfrac{2\pi M}{N\omega_0}=\dfrac{MT}{N}$（$T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为连续正弦信号的周期）时，抽样所得离散正弦信号是周期信号。

（1）由于正弦信号 $x(t)$ 的角频率 $\omega_0=10$ rad/s，故可求出使抽样所得离散正弦信号为周期信号的抽样间隔 $T_s=\dfrac{2\pi M}{N\omega_0}=\dfrac{\pi M}{5N}$。

（2）如果 $T_s=0.1\pi$ s，则 $\Omega_0=\omega_0T_s=\pi$ rad，$\dfrac{\Omega_0}{2\pi}=\dfrac{1}{2}$，故离散正弦信号的基本周期为 $N=2$。

1-6　试判断下列信号中哪些为能量信号，哪些为功率信号，或者都不是。

（1）$x(t)=A\sin(\omega_0t+\theta)$；　　（2）$x(t)=Ae^{-t}$；

（3）$x(t)=e^{-t}\cos t,t\geqslant 0$；　　（4）$x(t)=2t+1,\ -1\leqslant t\leqslant 2$；

（5）$x[k]=\left(\dfrac{4}{5}\right)^k,k\geqslant 0$；　　（6）$x[k]=e^{j\Omega_0k}$。

解：如果信号归一化能量 $E<\infty$，归一化功率 $P=0$，则信号为能量信号；若信号归一化能量 $W\to\infty$，归一化功率 $0<P<+\infty$，则信号为功率信号。信号不

可能既是能量信号又是功率信号,但可以既不是能量信号又不是功率信号。

(1) $x(t)=A\sin(\omega_0 t+\theta)$是基本周期 $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$的周期信号。其在一个基本周期内的能量为

$$E_0=\int_0^{T_0}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^{T_0}A^2\sin^2(\omega_0 t+\theta)\mathrm{d}t$$
$$=A^2\int_0^{T_0}\frac{1}{2}[1-\cos(2\omega_0 t+\theta)]\mathrm{d}t=\frac{A^2T_0}{2}$$

由于周期信号有无限个周期,所以 $x(t)$的归一化能量为无限值,即

$$E=\lim_{k\to\infty}kE_0=\infty$$

但其归一化功率

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{kT_0}kE_0=\frac{E_0}{T_0}=\frac{A^2}{2}$$

是非零的有限值,因此 $x(t)$是功率信号。

(2) 信号 $x(t)$的归一化能量和功率分别为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}A^2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}-\frac{A^2}{2}(\mathrm{e}^{-T}-\mathrm{e}^{T})=\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}A^2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2(\mathrm{e}^{T}-\mathrm{e}^{-T})}{2T}=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2}\mathrm{e}^{T}=\infty$$

$x(t)$的归一化能量是无限值,归一化功率也是无限值,因此既不是能量信号也不是功率信号。

(3) 信号 $x(t)$的归一化能量为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}(\mathrm{e}^{-t}\cos t)^2\mathrm{d}t<\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

因此信号 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}\cos t, t\geqslant 0$ 是能量信号。

(4) 信号 $x(t)$的归一化能量为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{-1}^{2}(2t+1)^2\mathrm{d}t=\left(\frac{4}{3}t^3+2t^2+t\right)\Bigg|_{-1}^{2}=21$$

因此信号 $x(t)=2t+1, -1\leqslant t\leqslant 2$ 是能量信号。若信号 $x(t)$只在有限时间范围内取值,则该信号通常是能量信号。

(5) 信号 $x[k]$ 的归一化能量为

$$E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|^2=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(0.64)^k=\frac{1}{1-0.64}=2.78$$

因此信号 $x[k]=\left(\dfrac{4}{5}\right)^k, k\geqslant 0$ 是能量信号。

(6) 信号 $x[k]$ 的归一化能量和功率分别为

$$E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0 k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}1=\infty$$

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}|x[k]|^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}1=1$$

因此信号 $x[k]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}$为功率信号。

1-7　已知系统的输入、输出关系如下，其中 $x(t)$、$y(t)$分别为连续时间系统的输入和输出，$y(0)$为初始状态；$x[k]$、$y[k]$分别为离散时间系统的输入和输出，$y[0]$为初始状态。判断这些系统是否为线性系统？

(1) $y(t)=4y(0)+2\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$；　(2) $y(t)=y^2(0)+3tx(t)$；

(3) $y(t)=y(0)\sin(2t)+\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$；　(4) $y[k]=4y[0]\cdot x[k]+3x[k]$；

(5) $y[k]=2y[0]+6x^2[k]$；　(6) $y[k]=ky[0]+\sum\limits_{n=0}^{k}x[n]$。

解：在判断具有初始状态的系统是否线性时，应从三个方面来判断。一是可分解性，即系统的输出响应可分解为零输入响应与零状态响应之和。二是零输入线性，系统的零输入响应必须对所有的初始状态呈现线性特性。三是零状态线性，系统的零状态响应必须对所有的输入信号呈现线性特性。只有这三个条件都符合，该系统才为线性系统。

(1) 具有可分解性，零输入响应 $y_{zi}(t)=4y(0)$具有线性特性。对零状态响应 $y_{zs}(t)=2\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$，设输入 $x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$，则

$$\begin{aligned}y_{zs}(t)=T\{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\}&=2\frac{\mathrm{d}[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]}{\mathrm{d}t}\\&=2\alpha\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}+2\beta\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=\alpha y_{zs1}(t)+\beta y_{zs2}(t)\end{aligned}$$

也具有线性特性。故系统为线性系统。一般，若系统的零状态响应 $y(t)$是输入 $x(t)$的微分，则该微分系统是线性系统。

(2) $y(t)$具有可分解性，零状态响应 $3tx(t)$具有线性特性，但零输入响应 $y^2(0)$非线性，所以该系统是非线性系统。

(3) $y(t)$具有可分解性，零输入响应 $y(0)\sin(2t)$具有线性特性，对零状态响应 $\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$，设输入$x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$，则

$$\begin{aligned}y_{zs}(t)=T\{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\}&=\int_0^t[\alpha x_1(\tau)+\beta x_2(\tau)]\mathrm{d}\tau\\&=\alpha\int_0^t x_1(\tau)\mathrm{d}\tau+\beta\int_0^t x_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\alpha y_{zs1}(t)+\beta y_{zs2}(t)\end{aligned}$$

也具有线性特性，所以系统是线性系统。一般，若系统的零状态响应 $y(t)$ 是输入 $x(t)$ 的积分，则该积分系统是线性系统。

（4）不具有可分解性，即 $y[k]\neq y_{zi}[k]+y_{zs}[k]$，故系统为非线性系统。

（5）具有可分解性，系统响应可分解为零输入响应 $y_{zi}[k]=2y[0]$ 和零状态响应 $y_{zs}[k]=6x^2[k]$ 之和。显然零输入响应 $y_{zi}[k]$ 具有线性特性，对于零状态响应 $y_{zs}[k]$，设输入 $x[k]=x_1[k]+x_2[k]$，则

$$y_{zs}[k]=T\{x_1[k]+x_2[k]\}=6\{x_1[k]+x_2[k]\}^2=6x_1^2[k]+6x_2^2[k]+12x_1[k]x_2[k]$$
$$\neq T\{x_1[k]\}+T\{x_2[k]\}=6x_1^2[k]+6x_2^2[k]$$

不具有线性特性，因此，系统为非线性系统。

（6）$y[k]$ 具有可分解性，零输入响应 $y_{zi}[k]=ky[0]$ 具有线性特性，零状态响应 $y_{zs}[k]=\sum\limits_{n=0}^{k}x[n]$ 也具有线性特性，所以系统是线性系统。

1-8 判断下列系统是否为非时变系统，为什么？其中 $x(t)$、$x[k]$ 为输入信号，$y(t)$、$y[k]$ 为零状态响应。

（1）$y(t)=\sin[x(t)]$；

（2）$y(t)=\sin t\cdot x(t)$；

（3）$y(t)=x(t)+\dfrac{dx(t)}{dt}$；

（4）$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)e^{t-\tau}d\tau$；

（5）$y[k]=x[k]-2x[k-1]$；

（6）$y[k]=x[2k]$；

（7）$y[k]=\sum\limits_{n=0}^{k}x[k-n]$；

（8）$y[k]=kx[k]$。

解：在判断系统的非时变特性时，不涉及系统的初始状态，只考虑系统的零状态响应。

（1）因为

$$y_1(t)=T\{x(t-t_0)\}=\sin[x(t-t_0)]=y(t-t_0)$$

所以该系统为非时变系统。

（2）因为

$$y_1(t)=T\{x(t-t_0)\}=\sin t\cdot x(t-t_0)$$

而

$$y(t-t_0)=\sin(t-t_0)\cdot x(t-t_0)\neq y_1(t)$$

所以该系统为时变系统。

（3）因为

$$y_1(t)=T\{x(t-t_0)\}=x(t-t_0)+\frac{dx(t-t_0)}{dt}=y(t-t_0)$$

所以该系统为非时变系统。

（4）因为

$$y_1(t)=T\{x(t-t_0)\}=\int_{-\infty}^{t}x(\tau-t_0)\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau \xlongequal{\lambda=\tau-t_0} \int_{-\infty}^{t-t_0}x(\lambda)\mathrm{e}^{t-t_0-\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

而

$$y(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}x(\tau)\mathrm{e}^{t-t_0-\tau}\mathrm{d}\tau=y_1(t)$$

所以该系统为非时变系统。

(5) 因为

$$y_1[k]=T\{x[k-k_0]\}=x[k-k_0]-2x[k-k_0-1]=y[k-k_0]$$

所以该系统为非时变系统。

(6) 因为

$$y_1[k]=T\{x[k-k_0]\}=x[2k-k_0]$$
$$y[k-k_0]=x[2(k-k_0)]\neq y_1[k]$$

所以该系统为时变系统。

(7) $y[k]=\sum\limits_{n=0}^{k}x[k-n]$，设 $y_1[k]=T\{x[k-1]\}=\sum\limits_{n=0}^{k}x[k-1-n]$

当 $k=0$ 时，$y[0]=x[0]$，$y_1[0]=x[-1]$

当 $k=1$ 时，$y[1]=x[1]+x[0]$，$y_1[1]=x[0]+x[-1]$

当 $k=2$ 时，$y[2]=x[2]+x[1]+x[0]$，$y_1[2]=x[1]+x[0]+x[-1]$

$$\vdots$$

显然，$y_1[k]\neq y[k-1]$，所以该系统为时变系统。

(8) 因为

$$y_1[k]=T\{x[k-k_0]\}=kx[k-k_0]$$
$$y[k-k_0]=(k-k_0)x[k-k_0]\neq y_1[k]$$

所以该系统为时变系统。

1-9　已知某线性非时变连续系统，当其初始状态 $y(0^-)=2$ 时，系统的零输入响应$y_{zi}(t)=6\mathrm{e}^{-4t}$，$t>0$。而在初始状态 $y(0^-)=8$ 以及输入激励 $x(t)$ 共同作用下产生的系统完全响应 $y_1(t)=3\mathrm{e}^{-4t}+5\mathrm{e}^{-t}$，$t>0$。试求：

(1) 系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$；

(2) 系统在初始状态 $y(0^-)=1$ 以及输入激励为 $3x(t-1)$ 共同作用下产生的系统完全响应 $y_2(t)$。

解：(1) 由于已知系统在初始状态 $y(0^-)=2$ 时，系统的零输入响应 $y_{zi}(t)=6\mathrm{e}^{-4t}$，$t>0$。根据线性系统的特性，则系统在初始状态 $y(0^-)=8$ 时，系统的零输入响应应为 $4y_{zi}(t)$，即为 $24\mathrm{e}^{-4t}$，$t>0$。而且已知系统在初始状态 $y(0^-)=8$以及输入激励 $x(t)$ 共同作用下产生的系统完全响应为 $y_1(t)=3\mathrm{e}^{-4t}+5\mathrm{e}^{-t}$，$t>0$。故系统仅在输入激励 $x(t)$ 作用下产生的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 为