TURING 图灵数学·统计学丛书 35

CAMBRIDGE

A Course of Pure Mathematics Centenary Edition

纯数学教程

(纪念版)

[英] G. H. Hardy 著

张明尧 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 35

A Course of Pure Mathematics
Centenary Edition

纯数学教程
（纪念版）

[英] G. H. Hardy 著
张明尧 译

人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

纯数学教程：纪念版/(英)哈代(Hardy, G. H.)著；张明尧译. —北京：人民邮电出版社, 2009. 7

(图灵数学·统计学丛书)

ISBN 978-7-115-20820-0

Ⅰ. 纯… Ⅱ. ①哈… ②张… Ⅲ. 高等数学-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 066026 号

内容提要

本书以简洁易懂的数学语言，全面系统地介绍了基础数学的方方面面，并对许多经典的数学论证给出了严谨的证明. 本书共分 10 章，在介绍了实数、复数的概念后，从第 4 章和第 5 章引入了极限的概念，较之一般书的处理方法更为轻松自然、易于接受. 另外，本书每章后面配有大量有代表性的杂例，供读者参考练习以巩固所学知识.

本书适合每位学习数学以及对数学感兴趣的人学习和阅读.

图灵数学·统计学丛书

纯数学教程（纪念版）

◆ 著 [英] G. H. Hardy
译 张明尧
责任编辑 明永玲
执行编辑 边晓娜

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址：http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000 1/16
印张：31.75
字数：632 千字 2009 年 7 月第 1 版
印数：1–3 000 册 2009 年 7 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号 图字：01-2008-5237 号

ISBN 978-7-115-20820-0/O1

定价：79.00 元

读者服务热线：(010)51095186 印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010)67171154

版 权 声 明

译 者 简 介

张明尧　1987 年于中国科学院数学研究所获博士学位, 1988—1990 年应邀到中国科技大学做博士后, 随后留中国科技大学工作, 主要承担数学系、少年班及其他各系的数学教学及研究生培养工作. 1994 年获教授职称, 自 1996 年至今, 一直为华东理工大学理学院教授, 研究生导师.

在多年的研究工作中, 曾承担了多项国家自然科学基金、教育部博士点基金、中国科学院博士后基金以及其他省部级科研项目, 获得国内外同行高度评价.

自 1990 年起被美国数学会聘为美国《数学评论》(*Mathematical Reviews*) 杂志评论员, 并于 1994 年被选入第 12 版《世界名人录》, 1995 年被选入美国传记研究所的《世界 5000 名人录》, 同年成为国务院公布的享受政府特殊津贴专家.

译 者 序

英国著名数学家 G. H. Hardy 所著《纯数学教程》一书是 20 世纪初奠定了当时数学分析课程基础的一部经典代表作, 从第 1 版出版至今刚好经过了整整一个世纪. 这部著作对于今天的数学分析这一重要的数学基础课程的部分内容 (主要是一元函数的微分学和积分学) 作了系统的阐述, 并且书中还引用了当年英国剑桥大学荣誉学位考试所采用的许多试题作为给本书读者的练习. 作者精彩的讲述与富有思考价值的例子以及习题相得益彰, 使本书直到今天依然是每个现代数学分析课程的初学者乃至教师应该参考的有价值的经典著作. 本书译者 45 年前也曾是千千万万个由于迷恋数学而沉醉于学习这部著作的读者之一. 我有幸在文化革命结束后的 1978 年进入中国科学院研究生院重新获得学习数学的机会, 并于 1982 年初毕业后回到我当初就读的大学数学系工作. 我惊奇地发现, 与我同住一间宿舍的一位年轻教师拿在手里刻苦研读的正是这部英文版的《纯数学教程》. Hardy 这部名著对于中国数学界的长久而深远的影响由此可见一斑.

Hardy 是 20 世纪世界著名的数学家, 他单独或者与他人合作写过多部数学史上不朽的经典著作, 而且许多著作至今仍极有参考价值. 此外, 他还在数学的众多分支特别是数论这个分支的研究中取得过超出同时代的数学家们的杰出成就, 他的数学创造和思想至今仍是当代数学家们研究的对象和源泉. 例如他和印度数学家 S. A. Ramanujan 等人所创立的圆法就是解决许多解析数论重大难题的强有力的方法之一. 此外, Hardy 对于中国数学界的影响还远不止他的著作和研究工作产生的间接影响. 众所周知, 由于美国著名数学家、控制论创始人、曾是 Hardy 学生的 N. Wiener 的推荐, 华罗庚于 1936 年受到 Hardy 的邀请到剑桥大学作访问学者. 华罗庚在剑桥得到以 Hardy 为核心的数学研究集体中许多年轻一代数学家的帮助. 华罗庚在与他们的交流中获益匪浅, 并且在此期间发表了至少 15 篇论文. 这一历史表明, 对于华罗庚个人的学术成就, 以及他后来培养整整一代新中国数学家的贡献, Hardy 本人是有重大而直接的影响的. 从这个意义上说, 我们中国数学界应该大大地感谢 Hardy.

这部书的英文版中有少量的印刷错误, 书中所用的个别数学名词与今天通用的名词有点不同, 并且书中的某些论证在今天的读者看来也许不够严格, 甚至有值得商榷之处. 但无论如何, 我认为 Hardy 的这部著作仍然是一本值得所有热衷学习现代数学的年轻人一读的好书. 译者尽自己所能纠正了所发现的错误, 并对少数问题加了适当的注解, 希望能对现在的读者有所帮助. 如有因为我的理解错误而产生译

文不当或谬误之处, 请读者不吝赐教.

在本书翻译过程中, 我得到了世纪纪念版前言作者、剑桥大学 T. W. Körner 教授的热心帮助, 并且我的儿子张凡以及我的夫人盛筱平女士也分别审看了部分译稿. 对于以上各位所给予的极有价值的帮助, 在此表示我衷心的感谢! 此外, 图灵公司的编辑在本书翻译以及编辑过程中也给予了许多帮助, 谨在此一并致谢!

张明尧
2008 年 10 月 1 日夜
于上海市闵行区莲花新苑

世纪纪念版前言

T. W. Körner

我手头的这本 Hardy 所著的 *Pure Mathematics* 是第 8 版, 印行于 1941 年. 它一定属于我父亲还是英格兰的一文不名的穷学生时所购买的首批书之一, 书中用铅笔所作的注解表明他读了这本书的绝大部分. 它也是我试图要读完的第一本真正的数学书, 尽管书中内容我多已遗忘, 但我仍然记得在读到 Dedekind 分割给出实数的构造时令人激动的感觉. 从它第一次出版至今已经 100 年过去了, 剑桥大学出版社出版了这个世纪纪念版, 不只是一种表示景仰的举动, 而更是因为 *A Course of Pure Mathematics* 仍然是一本畅销书, 新时代每位数学工作者都需要购买并阅读它.

在 19 世纪的大多数时间里, 数学在剑桥的诸多研究学科中占有至高无上的地位. 学习数学的绝对真理是智力教育的一个必不可少的部分. 最有能力的学生可以与他们的对手在数学考试 (剑桥大学的 Tripos) 中进行较量, 这种考试对学生的反应速度、准确性以及解题能力作最严峻的测试. 不过, 这完全是为本科生教学而设计的系统. 在德国和法国, 像柏林、哥廷根以及巴黎这样的学术中心有一些研究型的学校. 而在英国, 像 Henry Smith 和 Cayley 这样的大数学家虽然受人尊敬, 但却形单影只.

产生出 Maxwell, Kelvin, Rayleigh 以及 Stokes 的教育体系是不可能轻易解体的, 但是任何专注于教学和考试的数学学校都会有落后于时代的危险 (想一想我们今天大学的总体情况). 即使在应用数学方面, 那时剑桥的教学方法也有可能正在落后于欧洲. 可以肯定的是, 除了少数引人注目但却是个别的例外情形, 纯粹数学的研究在英国已经几乎不存在了. Hardy 曾经很乐于重复一位未指名的欧洲同行的评判, 说英国数学的特点是曾有过 "偶然出现的思想的闪光, 有个别足以表明真实存在能力的孤立成就, 不过大部分只是业余的、无学问可言的和微不足道的而已."

当 Hardy 作为一名学生来到剑桥时, 改革的气氛已经相当浓厚.

> 就像每一位未来的数学家所经历的那样, 我在中学当然就已经发现了, 我常常可以比我的老师做得要好得多; 即便是在剑桥, 虽然这样表现的机会要少得多, 但我也发现有时我能做得比大学老师们还要更好一些. 但是, 即便是到参加剑桥的荣誉学位考试时, 我实际上对于花费了毕生精力所从事研究的这些学科还是相当无知的, 我仍然把数学视为本质上是 "竞赛性

> 的”的学科. Love 教授第一次让我开了眼界, 他教了我几个学期, 给了我第一个重要的分析概念. 但是我从他那里受惠最大的是——毕竟他主要是一位应用数学家——他建议我阅读 Jordan 的名著 *Cours d'analyse*. 我永远忘不了阅读这部了不起的著作时内心的惊叹, 这是我这一代众多数学家的第一次感悟, 当我阅读这本书时才第一次知道数学真正的含义是什么.
>
> 《一位数学家的自白》

自 Newton 以来, 数学家们一直挣扎着要将微积分建立在与 Euclid 几何一样坚实的基础之上. 但是, 究竟什么才是微积分得以奠基的基本公理呢? 怎样定义像可微函数这样的概念呢? 哪些定理是“显然的”, 哪些定理又是“难以理解的”呢? 在这些问题有了明确答案之前, 所有微积分的教科书都只能把精确的论证和含糊的表达混在一起. 有时作者明知道有漏洞, 却只能硬着头皮坚持, 希望谎言重复多次就成为真理.” 更为常见的是, 作者和读者手牵着手梦游般地穿越困难——大多数的教师都有了经验: 要想让听众相信一个有错误的证明是多么地容易, 只要你自己相信这个证明就成了.

Jordan 著作的第 1 版 (1882~1887) 属于这种老的传统, 但是第 2 版 (1893~1896) 就已经融合了 Weierstrass 这样的严格化数学家的成果, 给出了微积分的一个完整而令人满意的解释. Jordan 以及新生的欧陆学派的分析学家对于剑桥的影响是巨大的. Young 和 Hobson 曾经指望自己一生都在本科生的教学工作中悠闲轻松地度过, 却突然都投身于研究工作, 更为令人称奇的是, 他们都成了了不起的数学家.

这种影响可以在今天仍然印行的三本书中读到. 现在我们可以看到它们的各种版本, 但是它们第一次出版时都是由决心向百年传统发起挑战的年轻人写就的. 第一本是 Whittaker 的 *A Course of Modern Analysis*(1902)(后来的版本是由 Whittaker 和 Watson 合著的), 这本书把作为旧的分析学的皇冠上的宝石的特殊函数用现代的方法做出了最好的处理. 第二本是 Hobson 的 *The Theory of Functions of a Real Variable*(1907), 它为专业数学家建立了新的分析学. 第三本是现在的这本教科书, 它第一次出版于 1908 年, 是写给“能力达到或者接近……学术水准的一年级大学生”看的.

这样一部教科书的思想对于那些管理今天的庞大大学系统的人, 以及对于那些是由 *Brideshead Revisited*①或者 *Sinister Street*②塑造出其旧式大学系统的观点的人来说, 可能显得同样地不可理喻. 尽管大多数剑桥的学生家境宽裕, 不过还是有一些学生来自比较贫寒的家庭, 需要将自己与富有的同学区别开来, 而他们的某些富有的同学也希望自己有别于贫寒的同学. 大多数数学能力强的学生都来自少数几所学校, 他们在那些学校接受了很好的数学教育. (例如, 你可以读一读 Littlewood 在

① 英国作家 Evelyn Waugh 所写的一部小说, 出版于 1945 年. —— 译者注
② 英国作家 Compton Mackenzie 所写的一部小说, 出版于 1913~1914 年. —— 译者注

A Mathematician's Miscellany 中关于他的数学教育的介绍.)

Hardy 意想中的本书读者面小, 这就不奇怪剑桥大学出版社要他自己掏 15 英镑来付校对费了. 然而, 这些读者带有完全来自学习 Euclid 几何的习惯, 不但习惯于遵循其推理过程, 而且更重要的是习惯于构造出这样的推理链条. 他们在解代数和微积分的题时, 在运算的快速和精确性方面也是训练有素的. 现代的分析学初等教程的作者面对的读者则相当缺乏证明方面的经验, 代数熟练性也要低得多, 且很少有应用微积分来解决有趣的力学以及几何学问题的经验. Spivak 的 *Calculus* 是一本出色的书, 但是相比较而言, Hardy 会用丰富得多的练习来解说自己的教材. (读者应该注意到, 像例 1.1 这样作为简单的命题出现的问题实际上是吸引你来证明这些命题的.)

剑桥和牛津都曾经用过 Hardy 的 *Pure Mathematics* 一书, 而这两所大学曾经支配着英国的数学界 (在第二次世界大战以前, 英伦诸岛的几乎每一位数学教授都是由剑桥或者牛津培养出来的). 在接下来的 70 年里, Hardy 的书确定了英国大学的第一门分析课程的教学内容. 其他的分析教科书可能冠以像 "轻松学 Hardy", "Hardy 导引" 或者 "Hardy 简读" 这样的书名. 而 Burkill 的 *First Course in Analysis* 就是一本很出色的简读式教科书.

在最近 40 年里, Hardy 的模式受到了来自两个方向的压力. 大学的扩张将更多的学生带进了数学课堂, 但是这些学生由于自身的原因缺乏足够的准备, 而且也不太乐意学习数学. 显然, "Hardy 浅谈" 不可能适用于这样的学生. 另一方面, 数学研究的前沿在不断推进, 为未来的研究工作者开设的分析课程必须要让他们了解像流形以及无穷维空间这样的概念. Dieudonné的 *Foundations of Modern Analysis* 以及 Kolmogorov 和 Fomin 合著的 *Introductory Real Analysis* 代表了解决这一问题的两种截然不同但同样鼓舞人心的途径.

当新的论题进入到教学大纲之中时, 老的论题就不得不从大纲中删除. 今天, 最优秀的学生往往先学习一门 "Hardy 精简" 的课程, 然后就要学习度量空间和拓扑空间. 这些内容讲授得快速而且高效, 但毕竟是失去了一些东西. 就像高速列车载着你飞速穿越法国, 但却使你与大地和法国人民隔离开来一样. 我们声称要将数学的经验传授给学生, 但是只向他们提供了大量 "常规练习", 而将 "更为困难的证明" 归并到附录之中. 看来后世的数学家们对我们教学的评价, 与 Hardy 及其同时代的数学家对于他们的剑桥前辈的教学评价, 会是同样地尖锐刺耳.

Hardy 的书首先给出实数系的性质. 在该书的第 1 版中这是用公理化方法给出的, 而在第 2 版以及其后各版中, Hardy 从有理数出发来构造实数. Bertrand Russell 说, 有两种表达数学的方法, 即公理化方法和构造性方法, 公理化方法的好处是免除了常规的辛劳, 而一本现代的课程要么将构造推迟到很后面再给出, 要么干脆将其删除. Hardy 允许读者跳过构造, 不过读者应该至少完成第 1 章后面的某些练习.

接下来的两章提供了一些材料, 这些材料现代的大学生在开始学习分析课程之前就应该已经见识过了.

这本教程真正的开始是第 4 章和第 5 章, 其中引进了极限的概念. 它的处理要比现代的导引书中能找到的处理方法更为轻松自然, 但是匆忙阅读这本书的读者会失去聆听一位伟大的分析学家讲授这门课程基础知识的好处. 在一两处地方, 极限记号是用老式的方法定义的 [如同第 71 节的脚注所预示的那样, 发散(divergent) 现在直接用不收敛(not convergent) 来表示]. 不过, 随后很容易转换成现代的记号. 更重要的是, 读者应该注意到第 101 节到第 107 节中的定理要比在它们前面的那些定理深奥得多. 在第 17 节中 Hardy 应用类 L 和 R 的地方, 他都用到了实数的基本性质, 读者应该对其论证加以密切注意.

第 6 章引进了导数和积分. 其中最微妙的论证可在第 122 节中找到, 由它导出第 126 节中的中值定理. 一直到第 161 节之前, Hardy 都把积分看成是求导的逆运算 (尽管在第 148 节中非正式地给出了它与面积的联系), 但是在第 161 节里, 他定义了定积分, 并完成了他对于微积分基础的讲解. 一旦这一基础得以建立, 他就继续发展关于微积分的标准的方法和定理, 并从实的和复的两种情形, 对三角函数、指数函数和对数函数给出一个严格的讨论.

在《古今数学思想》一书中, Kline 用 “分析的定理只需要更仔细地加以阐述……严格化所做的一切就是证实数学家一直以来已经知道的事实” 总结严格化, 而对一百年来 Bolzano, Cauchy, Abel, Dirichlet, Weierstrass, Cantor, Peano 以及其他的数学家为使分析严格化所做出的艰苦努力置之不顾. 事实上, 严格化的过程揭示出: 数学家们曾认为成立的结论事实上是错误的. 每一个极大化问题都有解是不正确的, 任何连续函数除了在少数例外点之外都必定可微是不正确的, 一个区域的边界是该区域可以忽略不计的部分是不正确的, 每一个足够光滑的函数都等于它的 Taylor 级数是不正确的……

更为重要的是, 严格化的过程还揭示了实线的基本结构, 并产生出新的工具 (例如第 106 节中的 Heine-Borel 定理) 来研究它的构造. 在 Hardy 写出这部教材的 10 年间, 由 Cantor, Peano, Jordan 和 Borel 对于面积概念的研究在 Lebesgue 的工作中达到了它的顶峰. 由于有了 Lebesgue 积分这个新的工具, 以及人们对于分析基础的透彻理解, 分析进入到一个黄金世纪, 对此 Hardy 贡献出了诸如 Hardy 空间以及 Hardy-Littlewood 极大定理这样的珍品.

> 在……[1900~1910] 期间我写了大量的东西, 但没有什么价值, 我现在仍然能够记得的比较满意的不过只有四五篇论文. 我的事业的真正的转折点出现在 1911 年, 那时我开始了与 Littlewood 的长期的合作, 以及 1913 年我发现 Ramanujan 的时候.
>
> 《一位数学家的自白》

对它的作者以及它的读者来说, *A Course of Pure Mathematics* 代表的不是一个结束, 而是一个开始.

Hardy 发表了大约 350 篇论文, 包含将近 100 篇与 Littlewood 合作的论文, 但是他对数学的贡献并没有在此止步. 他教育并鼓舞了几代从事研究的学生. 正如其中的一位谈到 Hardy 的讲座时所写的那样: "不论什么样的题材, 他都会热情专注地探讨, 使听众感受到他那不可抗拒的魅力. 人们会感觉到 (至少当时如此) 世界上除了那些定理的证明之外别的东西都无足轻重. 对于他人的研究工作, 可能不会有比他更激励人心的导师了. 他总是站在由同事和学生组成的研究队列的前头, 向他们提供永不枯竭的从事研究工作的思想源泉. "Titchmarsh 对此作了如下补充, 其他的人也肯定了这一说法: "他是一位心肠极好的人, 他不能承受他的任何一个学生在研究工作中失败. "

Pólya 回忆起 Hardy 是如何 "重视清晰性的, 然而在数学中他最为重视的还不是清晰性, 而是力量, 这种力量可以克服使别人绝望地放弃的巨大障碍. " Pólya 还回忆起 Hardy 是多么喜欢开玩笑, 并讲了一件逸事, 它展示了 Hardy 性格的这两个侧面.

> 在与 Hardy 一道工作时, 有一次我有了一个想法, 而且他也赞成这个主意. 但是后来我没有努力地去实现这一思想, Hardy 有所不满. 当然, 他也并没有告诉我他的不满. 然而有一天他与 Marcel Riesz 一道在瑞典参观动物园时表露了这种不满. 参观时, 笼子里有一只熊, 笼子的门上着锁. 那熊对着锁嗅了嗅, 用它的爪子击锁, 然后咆哮了一会儿, 转了一圈就走开了. Hardy 说: "它就像 Pólya, 有很好的想法, 但是没有加以实现. "

在 Hardy 于 1928 年在伦敦数学协会所做的主席演讲中, 他可以夸口说, 自从他于 1917 年任协会秘书以来, 他已经耐心地听完了每一篇论文的每一次讨论会的每一次讲演的每一个单词. 他见证了 *Journal of the London Mathematical Society* 的诞生, 并使牛津的 *Quarterly Journal* 重新焕发出生机. 今天, 伦敦数学会有令人满意的经费来源, 这得益于 Hardy 所遗赠的大量的财产以及他的著作的版税.

Hardy 写出了或者与他人合作写出了一些其他的经典文献. 其中最有名的恐怕就是他和 Littlewood 以及 Pólya 合著的 *Inequalities* 一书①. 在这部书里, 三位作者像魔术师般地对于不等式这一处于分析的中心地位但是似乎无法组织的主题提供一种有条理的见解.

Hardy 的 *A Mathematician's Apology*(《一位数学家的自白》) 既是一本优秀的数学著作, 也是一部出色的文学作品, 作为对于一位纯粹数学家的一生的反思, 它至今仍是无与伦比的. 它也是在知识分子遭受到严重威胁的那个时代对于理性以及自由生活的辩护书.

然而, 根据我的观点, 他最引人入胜的著作还是 *Number Theory* 一书②(与 E.

① 本书中译本《不等式》已由人民邮电出版社出版. —— 编者注
② 《数论导引》的中译本及影印本均已由人民邮电出版社出版. —— 编者注

M. Wright 合著的). 如果我只能选一本书带到一座荒岛上去的话, 如果我认为我会获救, 我会选取 Zygmund 的 *Trigonometric Series*, 而如果我知道永远不可能从荒岛回来, 我会选取 Hardy 和 Wright 的 *Number Theory*.

了解 Hardy 就是了解一位对于自身能力有充分认识的数学家, 同时他把你视为一个自然的平等对象. 希望这本书能带给你它曾经带给我那般多的愉悦.

T. W. Körner

第 10 版序

本版中的改动如下.

1. 增加了一个索引. Hardy 曾经对 S. Mitchell 教授所编撰的一个索引作过修改, 这一工作现在由 T. M. Flett 博士尽可能按照 Hardy 的思路加以完成.

2. Heine-Borel 定理原来的证明 (第 106 节) 换成由 A. S. Besicovitch 教授提出的另外两种证明.

3. 第 8 章杂例中的例 24 是新添加的.

J. E. Littlewood

1950 年 8 月

第 7 版序

这一版里的改变是第 2 版以来最重大的. 全书重新排版了, 这使得我有机会放手改写它.

我删去了原来的附录 2(关于记号 “$O, o, \sim$”), 并将其中的内容合并到正文中合适的地方. 改写了第 6 章和第 7 章中讨论微分系数的基本性质的部分内容. 在此, 我发现 de la Vallée-Poussin 的 *Cours d'analyse* 一书是一部极好的导引, 我确信本书的这一部分有了很大的改进. 这些重要的改变自然涉及到许多细小的校订.

我从过去 20 年里剑桥数学的学士荣誉学位考试 (Mathematical Tripos) 的论文中选用了大量新的例子, 这对剑桥的学生来说是有用的. 这些例子由 E. R. Love 先生为我搜集, 他还阅读了所有的证明, 并纠正了许多错误.

本书总的方案并未改变. 在 20 年后首次重新阅读这本书的时候, 我常常想尝试在内容以及风格两方面对本书作更大的改变. 这本书是分析在剑桥被人们忽视的年代里写就的, 以现在的眼光来看, 本书的重点以及热衷讨论的题材似乎有点可笑了. 如果现在重新写这本书的话, 我就不应当像 “一个与土著谈话的传教士”(用 Littlewood 教授的比喻) 罗罗唆唆, 而应该采用适当简洁和严谨的写作风格. 此外, 如果写得更精炼一些, 就能包含更多的内容. 这样一来, 这本书就会更像一部标准的分析教程了.

我没有时间来完成这样的工作, 这或许是一大幸事, 否则其结果很可能是我写了一本好得多但却非常缺乏个性的书, 而且这么一本分析学书籍的导引, 是用处不大的, 像这样的书籍, 即便在英国, 现在也并不缺乏.

G. H. H

1937 年 11 月

第 1 版序 (节录)

这本书主要是为有能力达到或者接近常说的 "学术标准" 的大学一年级学生而撰写的. 我希望它也能对其他水平的读者有用, 但前一类读者的需要是我首先要考虑的. 无论如何它都是一本为数学专业学生所写的书, 我未做任何努力去迎合工科学生, 或兴趣主要不在数学的那些学生的需要.

我把这本书视为一部真正的初等教程. 书中有大量很有难度的例题 (主要在各章的末尾), 对于这些难题, 只要篇幅允许, 我都补充了一个概略的解题说明. 不过我也尽了最大的努力来避免将涉及真正艰深思想的任何问题包括到本书之中.

G. H. H

1908 年 9 月

目 录