

SUPER

无敌®

蓄势待发 • 全力出击 • 决胜升学最大战役

紧贴新课程标准 围绕考试大纲 结合各版本教材

高考数学决胜版



超

级有效的学习方法：
全范围多角度梳理必备知识

功

效强劲的应考绝招：
把握进取性备战高考的秘诀

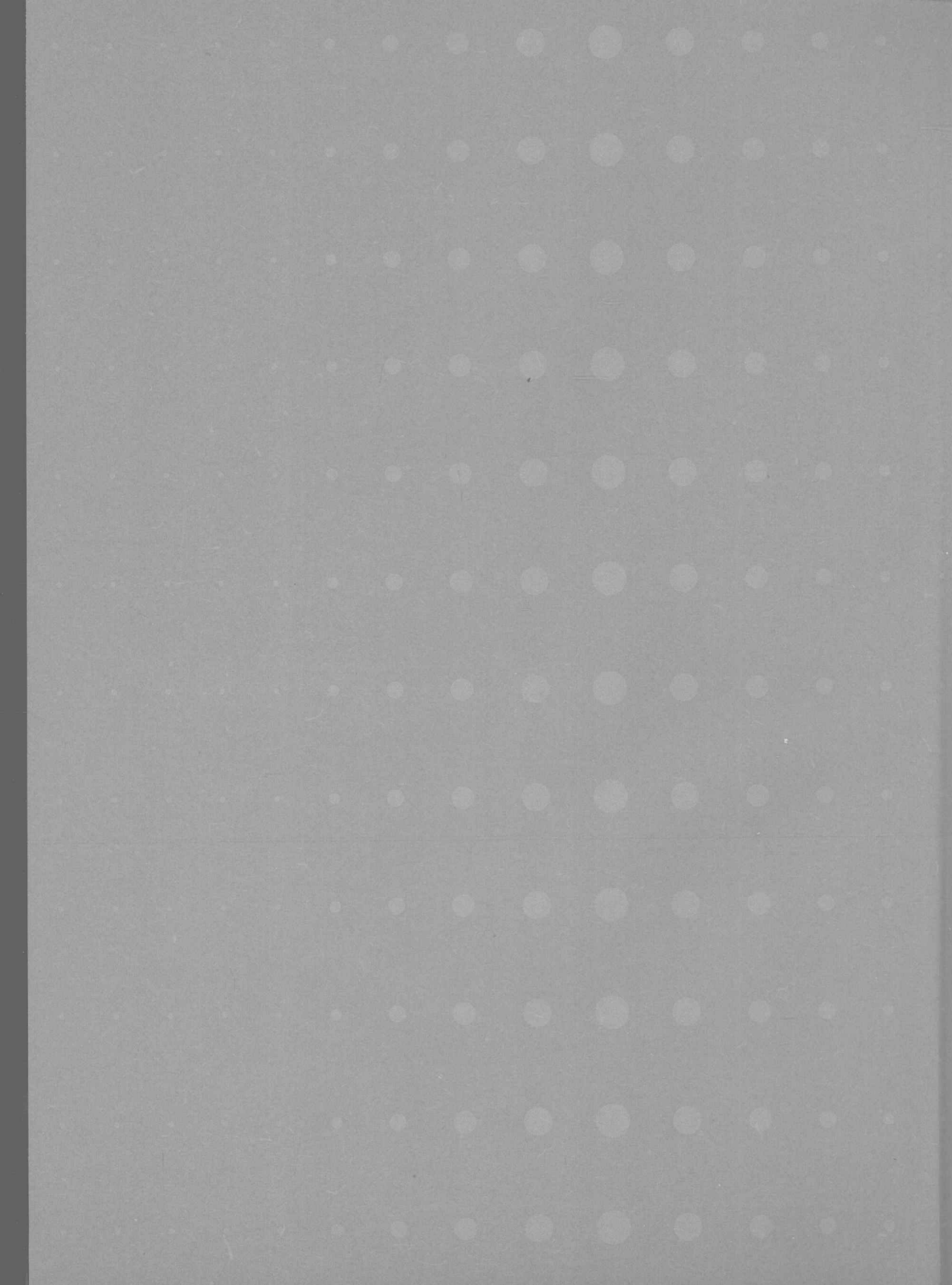
能

力提升的最佳途径：
学会深度分析知识内在规律



外文出版社
FOREIGN LANGUAGES PRESS

光照学海
知识无敌

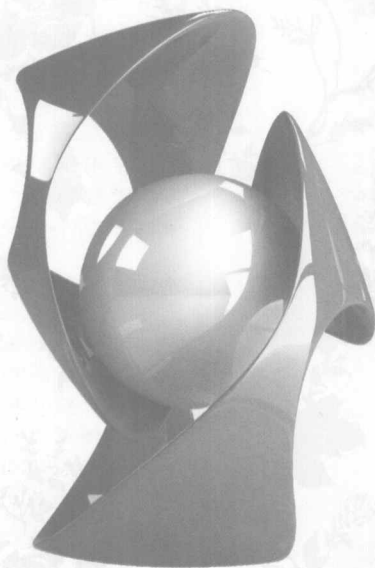


SUPER

无敌®

高考数学

决胜版



外文出版社
FOREIGN LANGUAGES PRESS

无敌®

高考数学决胜版

图书在版编目(CIP)数据

无敌高考数学:决胜版/周建军等编著. —北京:外文出版社, 2008

(无敌升学应考系列)

ISBN 978-7-119-05586-2

I. 无… II. 周… III. 数学课—高中—升学参考资料

IV. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第189465号

2009年1月第1版

2009年1月第1版第1次印刷

- 出 版 外文出版社·北京市西城区百万庄大街24号
邮编: 100037
- 责任编辑 吴运鸿
- 经 销 新华书店/外文书店
- 印 刷 北京市京津彩印有限公司
- 印 次 2009年1月第1版第1次印刷
- 开 本 1/16, 700×960mm, 20印张
- 书 号 978-7-119-05586-2
- 定 价 34.80元
- 总 监 制 张志坚
- 作 者 周建军 成丽君 曾建川 范永春
- 创意制作 无敌编辑工作室
- 总 编 辑 吴锴鋆
- 主 编 陈 茜
- 执行责编 金会芳
- 文字编辑 杨丽坤
- 美术编辑 李可欣 王晓京
- 美术设计 李子奇
- 行销企划 北京光海文化用品有限公司
北京市海淀区车公庄西路乙19号北塔六层
邮编: 100048
- 集团电话 (010) 88018838 (总机)
- 发 行 部 (010) 88018956 (专线)
- 订购传真 (010) 88018952
- 读者服务 (010) 88018838转53、10 (分机)
- 选题征集 (010) 88018958 (专线)
- 网 址 <http://www.super-wudi.com>
- E - mail service@super-wudi.com
- “无敌”商标专用权经国家工商行政管理局商标局核准由北京光海文化用品有限公司享有。
- 本书图文与版型设计非经书面授权不得使用; 版权所有, 侵权必究。

精心架构

科学辅导

本书以《新课程标准》为编写依据,并以巩固学生数学基础知识和基本技能,全面提高学生的数学能力和数学素养为宗旨。

本书在例题选择上注重创新,以少而精的例题全面覆盖高考知识点和高考主要解题技巧,在解题分析中注重总结数学思想,提升数学能力。

本书涵盖了新教材必修部分的全部内容以及选修部分中理科必选内容,在结构组成上以新教材为主,同时参照旧教材中合理的组织架构,进行知识讲解,从而更适用于高三学生进行系统复习。

本书由三部分组成:

第一部分为基础篇:由**考生必备**、**考试内容和题解考点**三部分组成。

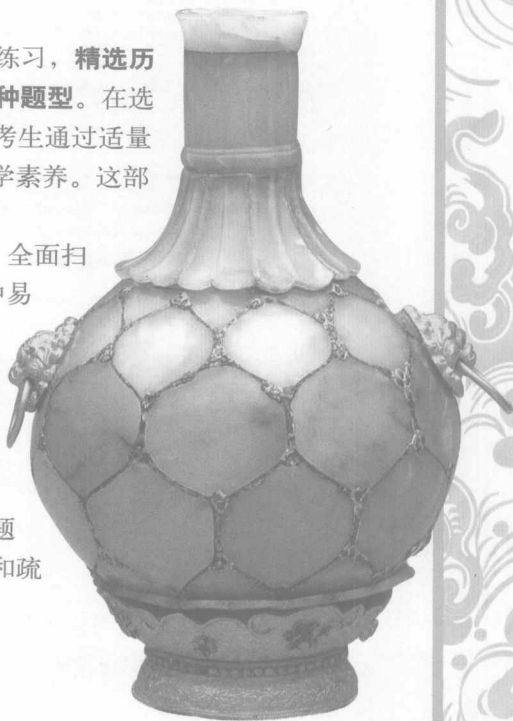
“考生必备”可谓最精华部分,以最简洁的语言总结各个章节考纲和课标内容,便于考生高屋建瓴把握考试内容,抓住问题的核心。“考试内容”可谓最基础部分,详细介绍了《新课程标准》和《高考考试大纲》涉及的数学知识以及在本章节中涉及的数学思想方法和解题技巧,这可以帮助考生全面复习,扫除知识盲点。“题解考点”则精选适量的典型例题,力争以最典型、最具代表性的例题覆盖全部重点知识和技巧,解析中也突出高考重点知识和技能分析,达到巩固知识和技巧的目的,促进考生能力的全面提升。

第二部分为练战篇:这是紧扣第一部分所设计的练习,**精选历年高考中的典型试题**,有**选择题、填空题和解答题三种题型**。在选题上注意知识覆盖和解题技能的训练,精选精练,让考生通过适量的练习掌握数学知识和解题技巧,提高应试能力和数学素养。这部分练习题也可用于课堂训练和测试。

第三部分为决胜篇:特别设置**高考数学概念解析**,全面扫描高考重点知识、技能和数学思想。对于各个知识点中易错问题进行全面分析,对各省市高考常考内容做重点分析和讲解。考生通过这部分内容的学习可以更细致地掌握高考知识和技巧,夯实基础,从而保证在高考中稳定发挥,尽可能地避免失误。

在本书编写过程中,我们努力做到章章推敲,题题把关,历时数月,反复审校,但仍难免存在一些错误和疏漏,恳请读者朋友批评指正。

周建军



使用说明

本书特点

- 1 本书以《新课程标准》为依据,以提高数学能力和素养为宗旨。
- 2 例题选择注重创新,全面覆盖高考知识点和高考主要解题技巧。
- 3 本书在知识的组织架构上以新教材为主,同时参照旧教材合理部分。
- 4 从考生必备、考试内容到题解考点,高考应试要求和要点一览无余。
- 5 第三部分高考数学概念解析是本书最大特色,确保应试稳定发挥,避免失误。



1 考生必备

提供高考考纲中对每一章节内容的考查要求,包括程度和范围

抽象函数问题是函数学习中一类比较特殊的问题,常常用变量代换、换元、赋值等方法解答,应熟练掌握它们的这些特点.解决这类问题只能从定义出发,通过换元构造定义所必须的条件.

第4章 基本初等函数及其应用

考生必备

- ① 理解指数函数的意义,掌握幂的运算.
- ② 理解指数函数的概念和意义,了解指数函数的单调性与特殊点.
- ③ 理解对数的概念及其运算性质,能用换底公式将一般对数转化成自然对数或常用对数.
- ④ 理解对数函数的概念,了解对数函数的单调性与特殊点.
- ⑤ 理解反函数的概念和求反函数的方法,了解指数函数和对数函数互为反函数.
- ⑥ 了解幂函数的概念和幂函数的基本性质.
- ⑦ 结合二次函数的图象,了解一元二次方程根的分布性及根的个数,从而了解函数的零点与方程根的联系.

- ⑧ 能利用两角的余弦公式导出两角和的余弦、两角和与差的正弦、正切公式以及二倍角的正弦、余弦、正切公式,了解它们的内在联系.
- ⑨ 能运用上述公式进行简单的恒等变换,包括导出积化和差、和差化积、半角公式,但对这三组公式不要求记忆.

考试内容

两角和与差的三角函数公式

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta; \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta;$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

上述公式可变形为:

(1) 降次公式: $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$

(2) 半角公式: $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}, \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}.$

2 考试内容

具体呈现高考应试需要掌握的数学知识,层级清晰,知识精炼

3 题解考点

划分不同考点,分别举出典型例题,提供详细的参考答案

不等式,所以又称为线性的约束条件. $z=2x+y$ 是要求最大值或最小值所涉及的变量 x, y 的解析式,叫做目标函数. 又由于 $z=2x+y$ 是 x, y 的一次解析式,所以又叫做线性目标函数. 一般地,求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题,统称为线性规划问题. 满足线性约束条件的解 (x, y) 叫做可行解,由所有可行解组成的集合叫做可行域. 在上述问题中,可行域就是阴影部分表示的三角形区域. 其中可行解 $(5, 2)$ 和 $(1, 1)$ 分别使目标函数取得最大值和最小值,它们都叫做这个问题的最优解.

题解考点

简单不等式的求解问题

不等式组 $\begin{cases} x^2-1 \leq 0, \\ x^2-3x < 0 \end{cases}$ 的解集是().

① 参考解答
解: 选 C.
原不等式等价于 $\begin{cases} x^2-1 \leq 0 \\ x(x-3) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 1.$

② 要点精析
解题关键是对各个不等式正确进行求解,然后求它们解集的交集.

③ 不等式 $\frac{x-1}{x-3} > 0$ 的解集为().
A. $\{x|x > 1\}$ B. $\{x|x > 3\}$ C. $\{x|x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$ D. $\{x|1 < x < 3\}$

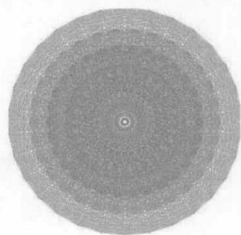
④ 参考解答
解: 选 C.
不等式 $\frac{x-1}{x-3} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0, \therefore 1 < x < 3.$
故原不等式的解集为 $\{x|x < 1 \text{ 或 } x > 3\}.$

⑤ 要点精析
简单的分式不等式的解法是高中数学中常用的求范围问题的工具. 分式不等式主要的解法就是分子分母同乘或同除以分母.

⑥ (1) 不等式 $(1+\alpha)(1-\alpha) > 0$ 的解集是().
A. $\{x|0 < x < 1\}$ B. $\{x|x < 0 \text{ 且 } x < -1\}$ C. $\{x|-1 < x < 1\}$ D. $\{x|x < 1 \text{ 且 } x > -1\}$

4 要点精析

对典型例题进行要点精析,巩固重点知识,点拨各类技巧和方法



1 基础篇：高考数学必备知识 011

第一章 集合与函数 012

【第1节】集合 012

【第2节】函数的概念 018

【第3节】函数的性质 023

【第4节】基本初等函数及其应用 029

第二章 三角函数、三角恒等变换及解三角形 039

【第1节】三角函数 039

【第2节】三角恒等变换 048

【第3节】解三角形 053

第三章 平面向量 058

【第1节】平面向量的概念及运算 058

【第2节】平面向量的应用 064

第四章 数列 070

【第1节】数列的概念 070

【第2节】等差数列、等比数列 078

【第3节】数列综合 085

第五章 不等式 094

【第1节】解不等式 094

【第2节】基本不等式及不等式的应用 102

第六章 立体几何 110

【第1节】空间几何体 110

【第2节】点、线、面的位置关系 116

【第3节】空间的角、空间距离和
空间坐标系的应用 124

第七章 解析几何 139

【第1节】直线与圆的方程 139

【第2节】圆锥曲线 148

第八章 算法、统计、概率 163

【第1节】算法 163

【第2节】统计、概率 173

第九章 选修内容选讲 183

【第1节】排列组合与二项式定理 183

【第2节】随机变量的分布列 192

【第3节】导数、定积分及应用 202

【第4节】逻辑、推理与证明、复数 215

2 练战篇：高考 数学实战演练 227

第一章 集合与函数 228

第二章 三角函数、三角恒等变换
及解三角形 233

第三章 平面向量 237

第四章 数列 239

第五章 不等式 242

第六章 立体几何 244

第七章 解析几何 248

第八章 算法、统计、概率 250

第九章 选修内容选讲 253

参考答案 259

3 决胜篇：高考 数学概念解析 285

第一章 集合与函数 286

第二章 三角函数、三角恒等变换
及解三角形 292

第三章 平面向量 294

第四章 数列 295

第五章 不等式 297

第六章 立体几何 299

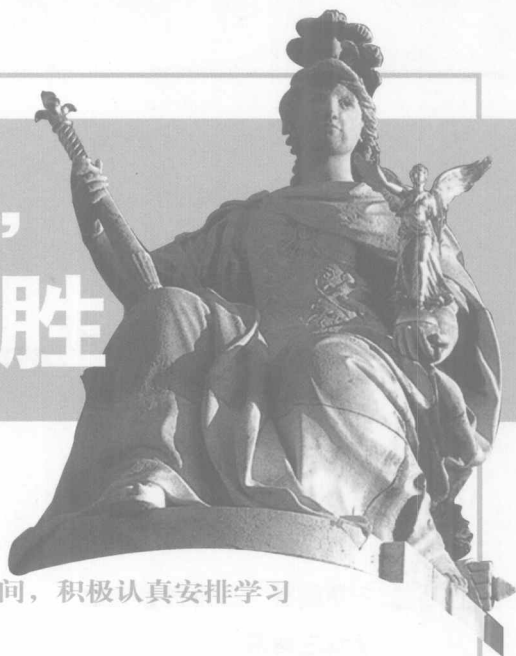
第七章 解析几何 302

第八章 算法、统计、概率 308

第九章 选修内容选讲 312



super 战役， 带你全面决胜



Study

学习

合理有效利用时间，积极认真安排学习



Understand

理解

系统整理知识考点，深入理解应考规律



Prepare

准备

完善准备复习细节，成竹在胸备战高考



Exercise

锻炼

科学锻炼脑力体力，积蓄能量爆发潜力



Rest

休息

规律作息劳逸结合，争取最佳备战状态

1

基础篇：高考数学必备知识



第一章

集合与函数

集合部分包含集合的定义与表示法、集合的基本运算两部分内容. 原来集合的基本运算是教学的重点,但随着将起点降低的社会大环境的影响,此部分的重点正向集合表示法转移. 这表面上看似降低了要求,但由于集合的表示法中蕴涵了数学解题的四大原则性思想(直观化、简单化、熟悉化、具体化),在出题时也总将集合的基本运算与表示法的转化结合在一起,因此对能力的要求实质上是明降暗升. 学习集合时要把握三点:一是集合的三个基本性质,二是集合的表示方法,三是集合的基本运算.

函数部分是高中数学及高考的重难点. 此部分主要有以下几个重点:如何判断是否为函数与是否为同一函数;函数的单调性;函数的奇偶性;反函数的定义与性质的应用及判断,此处常常结合具体的函数(指数函数、对数函数、幂函数)考查;函数的应用. 函数的应用侧重于两点:一是方程实数根的分布(体现了函数与方程中数形结合、分类讨论与等价转化三大数学思想),二是函数在实际问题中的应用. 函数部分难,主要难在习题与考试中,函数的单调性、值域与最值不仅仅局限于一般的通性通法,更侧重于特殊方法上,因此在学习时,要在这些该引申的地方适当引申.

第1节

集合

考生必备

- ① 了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系、集合元素的性质以及集合的表示方法.
- ② 理解集合之间包含与相等的含义,理解子集、真子集、空集和特殊集合的含义与表示,会判断简单的集合相等.
- ③ 会进行交集、并集和补集运算,能用韦恩图(Venn)表达集合间的关系及运算.

考试内容

1

集合的含义与表示方法

- ① 集合的含义:某些指定的对象集在一起就成为一个集合.

(1)集合中的研究对象统称为元素.若 a 是集合 A 的元素,记作 $a \in A$;若 b 不是集合 A 的元素,记作 $b \notin A$.

(2)集合中的元素必须满足确定性、互异性与无序性.

②集合的表示方法:表示一个集合可用列举法、描述法或图示法.

2

集合的包含关系

①若集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素,则称 A 是 B 的子集(或 B 包含 A),记作 $A \subseteq B$;若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则称 A 等于 B ,记作 $A=B$;若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$.

②简单性质:(1) $A \subseteq A$;(2) $\emptyset \subseteq A$;(3)若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$;(4)若集合 A 是 n 个元素的集合,则集合 A 有 2^n 个子集,其中真子集有 2^n-1 个,非空真子集有 2^n-2 个.

3

集合间的基本运算

1. 交集与并集

①交集: $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且} x \in B\}$, 并集: $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或} x \in B\}$.

②简单性质

(1) $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A$;

(2) $A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A, A \cup A = A$;

(3) $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$;

(4) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$;

(5) $\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B), \complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$.

2. 全集与补集

①全集: 包含了我们所要研究的各个集合的全部元素的集合, 记作 U .

②若 S 是一个集合, $A \subseteq S$, 则 $\complement_S A = \{x | x \in S, \text{且} x \notin A\}$ 称为 S 中子集 A 的补集.

③简单性质: (1) $\complement_S(\complement_S A) = A$; (2) $\complement_S S = \emptyset$; (3) $\complement_S \emptyset = S$.

题解考点

1

集合的表示

例1 已知集合 $M = \{x | x = 3m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{y | y = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$, 若 $x_0 \in M, y_0 \in N$, 则 $x_0 y_0$ 与集合 M, N 的关系是_____.

参考答案

方法一 文字描述法

$M = \{\text{被3除余数为1的整数}\}, N = \{\text{被3除余数为2的整数}\}$, 余数为1 $\times$ 余数为2 $\rightarrow$ 余数为2, 故 $x_0 y_0 \in N, x_0 y_0 \notin M$.

方法二 列举法

$M=\{\cdots, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \cdots\}$, $N=\{\cdots, -1, 2, 5, 8, 11, \cdots\}$. M 中一个元素与 N 中一个元素相乘一定在 N 中, 故 $x_0y_0 \in N$, $x_0y_0 \notin M$.

方法三 直接验证

设 $x_0=3m+1$, $y_0=3n+2$, 则 $x_0y_0=9mn+6m+3n+2=3(3mn+2m+n)+2$, 故 $x_0y_0 \in N$, $x_0y_0 \notin M$.

要点精析

描述法和列举法是表示集合的两种方法. 描述法表示集合是以后章节和考试中出现的主要形式, 要准确解决问题必须理解表达式的含义, 方法一就是从这个角度来解决问题的; 列举法在数学学习中也是一种很好的方法, 它体现了从具体到抽象的过程, 可以帮助我们理解抽象的概念和数学表达式; 方法三是直接通过代数式的运算得到的, 这里比较难想到的是将运算结果中3的倍数都结合起来, 这需要理解题设中集合描述的对象, 即 $M=\{\text{被3除余数为1的整数}\}$, $N=\{\text{被3除余数为2的整数}\}$. 本题也很好地体现了数学解题的四大原则性思想.

例2

设集合 G 中的元素是所有形如 $a+\sqrt{2}b$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$)的数, 求证:

(1) 当 $x \in \mathbb{N}$ 时, $x \in G$;

(2) 若 $x \in G$, $y \in G$, 则 $x+y \in G$, 而 $\frac{1}{x}$ 不一定属于 G .

参考答案

证明: (1) 在 $a+\sqrt{2}b$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$)中,

令 $a=x \in \mathbb{N}$, $b=0$, 则

$$x = x+0 \times \sqrt{2} = a+\sqrt{2}b \in G, \text{ 即 } x \in G.$$

(2) $\because x \in G, y \in G$,

$$\therefore x = a+\sqrt{2}b \ (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}), y = c+\sqrt{2}d \ (c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}).$$

$$\therefore x+y = (a+\sqrt{2}b) + (c+\sqrt{2}d) = (a+c) + \sqrt{2}(b+d).$$

$$\because a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore (a+c) \in \mathbb{Z}, (b+d) \in \mathbb{Z}.$$

$$\therefore x+y = (a+c) + \sqrt{2}(b+d) \in G.$$

又 $\because \frac{1}{x} = \frac{1}{a+\sqrt{2}b} = \frac{a}{a^2-2b^2} + \sqrt{2} \cdot \frac{-b}{a^2-2b^2}$, 且 $\frac{a}{a^2-2b^2}$, $\frac{-b}{a^2-2b^2}$ 不一定是整数, $\therefore \frac{1}{x}$ 不一定属于 G .

要点精析

证明一个元素属于指定的集合, 可将元素变形、化简, 反映出集合元素的特征. 要说明一个元素不属于指定的集合, 要确定元素与集合元素的特征不吻合, 对本题中(2)的证明, 也可以给出具体的 a, b 来说明与题设描述的集合元素的特征不符, 例如 $a=2, b=1$.



例3

已知 $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, 求满足条件的集合 A 的个数.

✎ 参考答案

方法一 A 中一定含有 1, 2, 这样将 A 分成三类: 仅有 1, 2 时, $A = \{1, 2\}$; 含有 3, 4 中之一时, $A = \{1, 2, 3\}$ 或 $\{1, 2, 4\}$; 3, 4 都含有时, $A = \{1, 2, 3, 4\}$. 综上所述, $A = \{1, 2\}$ 或 $\{1, 2, 3\}$ 或 $\{1, 2, 4\}$ 或 $\{1, 2, 3, 4\}$, 共 4 个.

方法二 A 中一定含有 1, 2, A 中其他元素组成的集合是集合 $\{3, 4\}$ 的子集, 共有 $\{3\}$ 、 $\{4\}$ 、 $\{3, 4\}$ 、 $\emptyset$ 4 个子集, 所以 $A = \{1, 2\}$ 或 $\{1, 2, 3\}$ 或 $\{1, 2, 4\}$ 或 $\{1, 2, 3, 4\}$, 共 4 个.

✎ 要点精析

本题考查子集的概念和子集的计数方法. 当分类多时, 可以先说明分几种情况, 再对每种情况进行分类计数, 以免计算时出现遗漏或重复.

例4

已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的范围.

✎ 参考答案

解: 分 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 两类讨论.

$$B = \emptyset \text{ 时, } 2m-1 < m+1, m < 2; B \neq \emptyset \text{ 时, 有 } \begin{cases} m+1 \leq 2m-1, \\ -2 \leq m+1, \\ 2m-1 \leq 5. \end{cases} \quad \text{解得 } 2 \leq m \leq 3.$$

$$\therefore m \leq 3.$$

✎ 要点精析

在研究集合关系时要特别注意 $\emptyset$ 与其他集合的关系. 在数集上进行集合运算时, 可借助数轴来表示.

例5

设集合 $M = \{x | x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$, $T = \{x | x = 4k \text{ 或 } x = 4k+1, k \in \mathbb{N}\}$, 求证: $M \not\subseteq T$.

✎ 参考答案

证明: 任取 $a \in M$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $a = n_0^2$.

① 若 n_0 为奇数, 设 $n_0 = 2m+1 (m \in \mathbb{N})$, $\therefore a = 4(m^2+m)+1$. $\because m^2+m \in \mathbb{N}$, $\therefore a \in T$.

② 若 n_0 为偶数, 设 $n_0 = 2m (m \in \mathbb{N})$, $\therefore a = 4m^2$. $\because m^2 \in \mathbb{N}$, $\therefore a \in T$.

综合①②知 $a \in T$, $\therefore M \subseteq T$.

$$\therefore \begin{cases} 5 \in T, \\ 5 \notin M, \end{cases} \quad \therefore M \neq T, \text{ 由此得 } M \not\subseteq T.$$

✎ 要点精析

本题是关于集合的包含关系的问题, 解答的关键是正确理解问题中的集合以及子集的具体意义, 理解得越准确越有利于问题的解决, 然后才能正确选择解答方法.



例 6

已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$, 且 $A \cap B = B$, 求实数 m 的取值范围.

◆ 参考答案

解: 化简条件得 $A = \{1, 2\}$, $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$.

根据集合中元素个数对集合 B 进行分类讨论: $B = \emptyset$, $B = \{1\}$, $B = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$.

当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = m^2 - 8 < 0$,

$$\therefore -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}.$$

当 $B = \{1\}$ 或 $B = \{2\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 0, \\ 1 - m + 2 = 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \Delta = 0, \\ 4 - 2m + 2 = 0, \end{cases}$ m 无解.

当 $B = \{1, 2\}$ 时, $\begin{cases} 1 + 2 = m, \\ 1 \times 2 = 2, \end{cases}$

$$\therefore m = 3.$$

综上所述, $m = 3$ 或 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

◆ 要点精析

分类讨论是中学数学的重要思想, 全面地挖掘题中的隐藏条件是解题素质的一个重要方面, 如本题当 $B = \{1\}$ 或 $B = \{2\}$ 时, 不能遗漏 $\Delta = 0$. 另外要充分理解集合的运算特点以及集合 A 和 B 的交、并、补和集合 A 、 B 之间的关系.

例 7

设集合 $A = \{x | x^2 - 2x + 2m + 4 = 0\}$, $B = \{x | x < 0\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

◆ 参考答案

方法一

$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow$ 方程 $x^2 - 2x + 2m + 4 = 0$ 至少有一个负实数根.

设 $M = \{m | \text{关于 } x \text{ 的方程 } x^2 - 2x + 2m + 4 = 0 \text{ 两根均为非负实数}\}$, 则

$$\begin{cases} \Delta = 2^2 - 4(2m + 4) \geq 0, \\ x_1 + x_2 = 2 > 0, \\ x_1 x_2 = 2m + 4 \geq 0. \end{cases} \quad \text{解得 } -2 \leq m \leq -\frac{3}{2}.$$

$$\therefore M = \left\{ m \mid -2 \leq m \leq -\frac{3}{2} \right\}.$$

$$\text{设全集 } U = \{m | \Delta \geq 0\} = \left\{ m \mid m \leq -\frac{3}{2} \right\},$$

$\therefore m$ 的取值范围是 $\complement_U M = \{m | m < -2\}$.

方法二

$$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{方程的小根 } x = 1 - \sqrt{-2m - 3} < 0 \Rightarrow \sqrt{-2m - 3} > 1 \Rightarrow -2m - 3 > 1 \Rightarrow m < -2.$$