“十一五”高等数学辅导教材

高等数学学习指导

（理工类）

主　编　张圣勤
副主编　赵宁军　刘三明

（上下册合订本）

复旦大学出版社

“十一五”高等数学辅导教材

高等数学学习指导

（理工类）

主　编　张圣勤
副主编　赵宁军　刘三明

復旦大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导（理工类）/张圣勤主编．—上海：复旦大学出版社，2009.3
"十一五"高等数学辅导教材
ISBN 978-7-309-06499-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．张…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 019247 号

高等数学学习指导（理工类）
张圣勤　主编

出版发行　复旦大學 **出版社**　上海市国权路 579 号　邮编 200433
86-21-65642857（门市零售）
86-21-65100562（团体订购）　86-21-65109143（外埠邮购）
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com

责任编辑　白国信
出 品 人　贺圣遂

印　　刷　浙江省临安市曙光印务有限公司
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　19.5
字　　数　499 千
版　　次　2009 年 3 月第一版第一次印刷

书　　号　ISBN 978-7-309-06499-5/O·424
定　　价　29.00 元

内 容 提 要

本书是根据国家教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，面向大专院校理工科的本、专科学生编写的针对高等数学教材的学习指导书，是上海市教委2006年批准的本科《高等数学》重点课程建设项目的一个组成部分. 参照的高等数学教材是同济大学应用数学系主编的《高等数学》.

本书共分12章，分别是函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数. 每章是由内容要点回顾、典型例题选讲、A,B,C三级练习题练习、自测试题测试等5部分组成. 其中，内容要点回顾的重点放在如何理解相应内容和应注意事项，以及揭示知识的内在联系上，可以帮助学生更好地复习和巩固本章的知识；在例题和习题的选择上，既注意了知识的覆盖面，又注意突出了各章的基本要求，题目内容基本符合全国理工科类本科院校《高等数学》课程的教学基本要求. 所以无论读者使用何种理工科高等数学教材都可以使用本指导书.

FOREWORD 前言

欢迎使用这本高等数学的学习指导书.

本书是根据2004年国家教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》,面向大专院校理工科的本、专科学生编写的针对高等数学教材的学习指导书,是上海市教委2006年批准的本科《高等数学》重点课程建设项目的一个组成部分.参照的高等数学教材是同济大学应用数学系主编的《高等数学》.

随着世界范围内计算工具和计算技术的发展,工程技术领域早已脱离了繁琐复杂的手工计算,代之而起的是计算机众多的计算软件——MATLAB, Mathmetica, MathCAD, SSPS……甚至可以毫不夸张地说:在21世纪,谁不懂得计算机及其计算软件,谁就不懂得工程计算!因此,理工科《高等数学》课程学什么、怎么学的问题一直是高教界目前议论最多的问题之一.加强数学概念的教学,领会其思想及内涵,能够举一反三地运用数学知识建立实际计算问题的数学模型,是所有数学从业者对数学教育的共识.我们编写这本《高等数学学习指导》的目的,就是通过本书的学习使学生能够通过对数学概念的理解,领会高等数学的思想及内涵;通过对例题的学习和习题的练习,学会高等数学的一些计算方法,从而能够用高等数学的方法解决实际问题.本书是通过内容要点回顾、典型例题选讲、A,B,C三级练习题练习、自测试题测试的方法提供辅导的,典型例题、各级练习题、测试题的选择都基本符合全国理工科院校《高等数学》课程的教学基本要求,所以不管读者使用何种理工科高等数学教材

都可以使用本指导书.

本书共分12章,分别是函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数.全书共收集典型例题两百余道,各类练习题、自测题共九百余道.在编写过程中,考虑到当前在工程上的数学计算基本全部采用计算软件的事实,摒弃了一些过难、过偏、过时的习题,努力使例题、练习题为理解数学思想和概念、掌握计算方法服务为主.因此在各章的内容要点和典型例题之后,我们编写了3种类型的练习题.其中,练习题A是为理解本章概念、掌握本章计算方法而设,是最基本,也是最简单的;练习题B是为锻炼综合知识的运用,也是一般高校期终考试的难度;练习题C基本是各年度考研试题,是为准备考研的同学复习而编写的;各章最后有一份自测题,供学习者自我测试本章学习情况用的.练习题A,B及自测题附有参考答案,练习题C附有详细参考解答.考虑到理工科各高校数学一般都开设两个学期,在各学期后都附有学期综合测试试卷A,B两份,并附有参考答案.为了使读者了解各种数学概念的由来,在每章练习题后附有数学家的简单介绍,也使读者艰苦学习之余轻松地读一点数学的轶闻趣事.

在使用本指导书的时候,建议读者先看一下每章的内容要点和例题,按照先做练习题A再做练习题B和C的顺序练习,最后做自测题检查自己这一章的学习情况.学期结

束时,再做综合测试的试卷.

本书由上海电机学院数学教研室编写,并由张圣勤老师担任主编,赵宁军、刘三明老师担任副主编,各章的编写人员为:函数与极限部分为迟晓丽老师,导数与微分部分为王玲老师,微分中值定理与导数的应用部分为崔汉哲老师,不定积分部分为欧阳庚旭老师,定积分部分为刘三明、黄杰老师,定积分的应用部分为董鸽、黄杰老师,微分方程部分为王云娟老师,空间解析几何与向量代数部分为李珉老师,多元函数微分学及其应用部分为赵宁军老师,重积分部分为张圣勤老师,曲线积分与曲面积分部分为朱泰英、董鸽老师,无穷级数部分为周钢老师.

在编写本书过程中,我们参考了下列教材:同济大学应用数学系编写的《高等数学》,交通大学应用数学系曹敏谦编译的吉米多维奇《数学分析习题集题解》,历年研究生入学考试高等数学试卷,有关数学家传记及其照片则来自一些数学网站,在此谨向有关人员表示衷心的感谢.

编者力图想把高等数学中的种种奇妙的思想和方法解释得更通俗易懂一点,力图把高等数学的学习变得更容易一些,并力图照顾到各种读者的需要,但由于水平有限,时间的限制,书中的错误疏漏之处在所难免,恳请读者指正,以便以后进一步完善提高.

编　者

2008 年 9 月

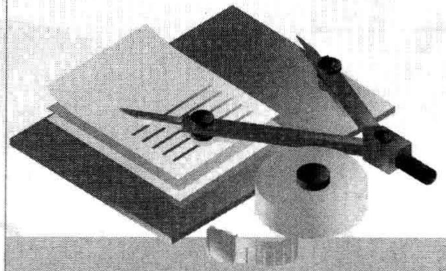
CONTENTS 目录

上册

下 册

“十一五”高等数学辅导教材　高等数学学习指导

理工类

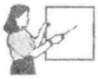


上册

第 1 章

函 数 与 极 限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象. 所谓函数关系，就是变量之间的依赖关系. 极限方法，则是研究变量的一种基本方法. 本章将介绍变量、函数和极限的概念，以及它们的基本性质. 本章内容统称为极限论(或分析引论)，包括 3 个部分，函数、极限与连续. 极限知识是微积分学的基础，也是研究导数、各种积分、级数等内容的基本工具，既是教学的重点，又是难点. 高等数学的主要任务是研究微积分学，微积分的基础是函数、极限和连续. 可以这样简单地描述它们在高等数学中的地位：函数是研究的主要对象，极限是研究的工具，连续是研究问题的桥梁. 本章主要加深对函数、极限和连续概念的理解，并要求熟练掌握求极限的常用方法.



内 容 要 点

1. 函数

1.1　函数的概念

设 $D \subset \mathbf{R}$，函数为特殊的映射：$f: D \to f(D) \subset \mathbf{R}$，其中 D 为定义域，$f(D) = \{y \mid y = f(x)\}, x \in D$ 为值域.

函数一般记为 $y = f(x)$，x 称为函数的自变量，y 称为因变量或函数. 当自变量 x 在其定义域 D 内取定某一数值 x_0 时，因变量 y 的数值 $f(x_0)$ 称为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 点的函数值.

在平面直角坐标系中，点集 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图像. 因此，函数的表示方法有 3 种：解析法、图像法和表格法. 解析法就是将函数 y 与自变量 x 的关系用一个关于变量 x, y 的解析式表示；图像法就是将函数 $y = f(x)$ 用一个平面图形表示；表格法就是将 $y = f(x)$ 的关系用一个二维表格中一系列数据表示.

1.2　函数的性质

有界性：若存在 $x \in D$，总有 $|f(x)| \leqslant M$，则 $f(x)$ 有界；否则无界.

单调性：若存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$，且 $x_1 < x_2$，总有 $f(x_1) < f(x_2)$，则 $f(x)$ 在(a, b) 上单调增加；否则，$f(x)$ 在(a, b) 上单调减少.

奇偶性：若 $x \in (-a, a)$，总有 $f(-x) = -f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数；若 $x \in (-a, a)$，总有 $f(-x) = f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数.

周期性：若对于 $x, x+l \in D$，l 为常数，总有 $f(x+l) = f(x)$，则 $f(x)$ 为周期函数，l 为周期；当 l 为最小的正数时，称为函数 $f(x)$ 的最小正周期，简称周期，记为 T.

1.3 反函数与复合函数

设函数 $f: D \to f(D)$ 为单射,反函数为其逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$.

给定函数 $f: D_1 \to f(D_1)$, $g: D \to g(D) \subset D_1$,则复合函数为 $f \circ g: D \to f[f(D)]$.

注 要记住不是所有函数都有反函数,也不是所有函数都可以放在一起进行复合. 例如函数 $y = x^2$,当 $x \geqslant 0$ 时其反函数为 $y = \sqrt{x}$,当 $x < 0$ 时其反函数为 $y = -\sqrt{x}$,因而其反函数是不存在的. 又如函数 $y = \arcsin u$, $u = x^2 + 2$ 是不能复合成为函数 $y = \arcsin(x^2 + 2)$ 的,因为对于任意的 x 值, $|x^2 + 2| > 1$,而使 $y = \arcsin(x^2 + 2)$ 失去意义.

初等函数:有限个常数及基本初等函数经有限次四则运算或复合而成的可以用一个表达式表示的函数.

1.4 基本初等函数与初等函数

幂函数 $y = x^\mu (\mu \in \mathbf{R})$,指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$,对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$,三角函数 $y = \sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$,反三角函数 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.

由有限个基本初等函数或常数经有限次四则运算或复合而成的、可以用一个表达式表示的函数称为初等函数.

在研究一个函数的时候,我们要确定这个函数的定义域、值域、有界性、单调性、奇偶性和周期性,这是研究一个函数的基本方法. 我们在确立一个函数的时候,要同时确立它的定义域. 一般情况下,如果定义域未做特别说明,则默认为其自然定义域. 但在实际问题中,特别是根据现实生活中的一些经济模型而确定的函数,要特别注意其定义域的确定. 当两个函数的对应法则和定义域相同时,我们就认为这是同一个函数,而与自变量和应变量用什么字母表示无关. 特别要强调的是,如果一个函数是周期性函数,那么这个函数有无数个周期,我们将它所有周期中最小的正的周期称为最小正周期,简称周期.

1.5 分段函数

当一个函数是由几个定义在不同区间上的函数组成时,这样的函数称为分段函数.

2. 极限

2.1 极限概念与性质

2.1.1 数列极限的概念

定义 1(描述性定义) 对于数列 $\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,对应的一般项 x_n 的值无限接近于一个确定的常数 a,则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限.

定义 2(ε-N 定义) 对于任意给定的正数 ε,如果存在一个正整数 N,使得当 $n > N$ 时的一切 n,都能使不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立,则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a\ (n \to \infty)$.

如果一个数列有极限,则称这个数列收敛;否则,称这个数列发散.

直观地说,一个数列有极限,是指当数列的项数无限增大时,数列的一般项,或者说通项 x_n 无限地向一个常数 a 接近. 精确地说,对于一个任意给定的正数 ε,总能找到一个正整数 N,当 $n > N$ 时使 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$,这时从数列的第 $N+1$ 项开始以后的无穷多项都位于 a 点的 ε 去心邻域 $\mathring{U}(a, \delta)$ 内,而在此邻域之外只是数列有限的 N 项.

这里要**注意**的有 3 点:

(1) 正数 ε 是任意的,它刻画了数列 $\{x_n\}$ 接近于 a 的程度,表示无论对于怎样的预先给定的正数 ε,当数列的项数 n 大到一定程度(到达正整数 N)时,不等式 $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ 总是成立的.

(2) 正整数 N 是与 ε 有关的,它随 ε 的确定而确定,但对于一个给定的 ε,正整数 N 不是唯一的,如果 n 到达 N,使不等式 $|x_n-a| < \varepsilon$ 成立,那么对于一切大于 N 的一切正整数也同样能使这一不等式 $|x_n-a| < \varepsilon$ 成立.

(3) 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在与否,极限为何值,与第 N 项以前的各项无关,而只由第 N 项及以后的无穷项所确定.因此,若只改变第 N 项以前的数列各项的数值,该数列的极限是否存在、极限值是多少将不受影响.

2.1.2 数列极限的性质

性质 1(唯一性) 若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,则该极限一定唯一.

性质 2(有界性) 极限存在的数列一定有界.

注 有界的数列不一定有极限,即有界的数列不一定收敛.

性质 3(保号性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,且 $a > b$,则存在一正整数 N,使 $n > N$ 时,$x_n > y_n$.

2.1.3 函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限

定义 1(描述性定义) 对于函数 $f(x)$,如果当 x 的绝对值无限增大时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

定义 2($\varepsilon-N$ 定义) 对于任意给定的正数 ε,如果存在一个正数 N,使得当 $|x| > N$ 时的一切 x,都能使不等式 $|f(x)-A| < \varepsilon$ 恒成立,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

注 这里 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 包括了 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 两个方面,如果 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限不存在或不相等,则 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限不存在.

2.1.4 函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限

定义 1(描述性定义) 对于函数 $f(x)$,如果当 x 无限趋近于常数 x_0 时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限.

定义 2($\varepsilon-\delta$ 定义) 对于任意给定的正数 ε,如果存在一个正数 δ,使得当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时的一切 x,都能使不等式 $|f(x)-A| < \varepsilon$ 恒成立,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限.记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

定义 3(单侧定义) 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左侧的某个邻域有定义,当 x 从左往右趋近于 x_0 点时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限.记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0-0) = A$.

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点的右侧的某个邻域有定义,当 x 从右往左趋近于 x_0 点时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限.记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0+0) = A$.

$f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时,极限存在的等价形式为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-A] = 0 \ (\text{即 } \alpha = f(x)-A \text{ 为无穷小})$$

$$\Leftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0^-) = A$$

$$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}(x_n \neq x_0), x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0, \text{有} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

2.1.5 函数极限的性质

性质 1(唯一性) 若 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时极限存在,则其极限一定唯一.

性质 2(局部有界性) 若 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在,则一定存在正数 δ,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,函数 $f(x)$ 有界.

性质 3(局部保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,且 $A > B$,则一定存在正数 δ,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,函数 $f(x) > g(x)$.

注 当 $x \to \infty$ 时,有同样的性质.

2.2 极限存在准则

单调有界定理:单调有界数列必有极限.

夹逼定理:如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足:

(1) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2.3 无穷小与无穷大

2.3.1 概念

无穷小的**定义** 在自变量 x 的某个变化过程中, $\lim f(x) = 0$,则 $f(x)$ 称为在该变化过程中的无穷小.

无穷大的**定义** 在自变量 x 的某个变化过程中, $\lim f(x) = \infty$,则 $f(x)$ 称为在该变化过程中的无穷大.

无穷小与无穷大的**关系**:在自变量 x 的某个变化过程中,若 $f(x)$ 为在该变化过程中的无穷小,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为在该变化过程中的无穷大;若 $f(x)$ 为在该变化过程中的无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为在该变化过程中的无穷小.

2.3.2 无穷小的性质

性质 1 在同一过程中,有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

性质 3 在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

性质 4 常数与无穷小的乘积是无穷小.

性质 5 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

2.3.3 无穷小的比较

设 α, β 在某一变化过程中都是无穷小,若

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \begin{cases} 0, & \text{则称 } \alpha \text{ 是比 } \beta \text{ 更高阶的无穷小;} \\ \infty, & \text{则称 } \alpha \text{ 是比 } \beta \text{ 低阶的无穷小;} \\ c(\neq 0), & \text{则称 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 是同阶无穷小;} \\ 1, & \text{则称 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 是等价无穷小,记为 } \alpha \sim \beta. \end{cases}$$

2.3.4 常用等价无穷小

$\sin x \sim x$; $\tan x \sim x$; $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$; $\arctan x \sim x$; $\arcsin x \sim x$;

$\ln(1+x) \sim x$; $e^x - 1 \sim x$; $a^x - 1 \sim x\ln a$; $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$

2.4 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \left(或\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad (或\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e)$$

2.5 求极限基本方法要点

(1) $\frac{\infty}{\infty}$的分式函数,用无穷量分出法求极限.

(2) $\frac{0}{0}$的有理分式函数,用因式分解后消去零因子法求极限.

(3) $\frac{0}{0}$的无理分式函数,用分子(分母)有理化后消去零因子法求极限.

(4) 运用两个重要极限求极限.

(5) 利用等价无穷小替换法求极限.

(6) 利用左右极限法求分段函数定义域分界点上的极限.

(7) 运用夹逼准则求极限.

3. 函数的连续性与间断性

3.1 函数连续的定义及其等价形式

定义 1 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义,且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 3 对于任意给定的正数 ε,存在正数 δ,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义,那么它该点连续的等价形式为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\Delta y = 0[\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]$$

$$\Leftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,当 |x-x_0|<\delta时,有 |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

3.2 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的单侧连续性

定义 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果函数在点 x_0 左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果函数在点 x_0 右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) =$