# 数理逻辑基础

张振华 编著

$$B_1 \vee B_2 \cdots\cdots \vee B_n$$

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y (Fx_1 \to (Gy \to Fx_2))$$

$$B_1: Fx_0 \to (Gx_1 \to Fx_0)$$

$$B_2: Fx_0 \to (Gx_2 \to Fx_1)$$

$$B_3: Fx_1 \to (Gx_3 \to Fx_0)$$

$$C_3: (Fx_0 \to (Gx_1 \to Fx_0)) \vee (Fx_0 \to (Gx_2 \to Fx_1)) \vee (Fx_1 \to Gx_3 \to Fx_0)$$

辽宁大学出版社

# 数 理 逻 辑 基 础

张振华　编著

辽宁大学出版社

一九九〇年·沈阳

责任编辑　郭胜鳌
封面设计　陈景泓
责任校对　王晓红


**数理逻辑基础**

张振华　编著

*

辽宁大学出版社出版发行（沈阳市崇山中路66号）
沈阳铁路局印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　　印张：6.75字数：150千
1990年9月第1版　　1990年9月第1次印刷
印数：1—500

*

ISBN 7-5610-0971-2
B·45　定价：3.00元

# 前　言

数理逻辑是从传统的形式逻辑中分化出来的一门新兴科学。它虽然只有三百多年的历史，但它日趋繁盛，特别是本世纪三十年代以来得到蓬勃发展，成为内容丰富、理论严密、分支众多、系统完整的学科体系。随着现代科学发展，它的研究领域、应用范围逐渐扩大。不仅已普遍应用于数学、计算机科学、控制论、生物学等自然科学领域，而且在哲学、语言学、教育学、考古学、管理科学等学科中也取得了积极成果。这无疑是数理逻辑应用于社会科学的引人注目而又意义深远的发展趋势。

近年来，我国逻辑学界在数理逻辑的教学和科研方面都取得了巨大成绩。但我们也应看到，面对现代科学技术的迅猛发展和各门学科对数理逻辑需求的趋势，我们对数理逻辑的研究和普及还是远远不够的。特别是我国高等院校哲学专业急需普及数理逻辑更显得日益迫切。为了提高我国数理逻辑教学和科研水平，为了推进高等院校哲学专业普及数理逻辑，作者不揣浅陋编写了本书。

本书是为高等院校哲学专业提供的数理逻辑教材。本书从哲学专业的需要出发，以朴素直观特点，用较为通俗的语言，深入浅出地介绍了广大文科学生及其它文科工作者迫切需要掌握的基础理论。本书在编写过程中得到各方面的支持和帮助。在此，谨向为本书付出心血的各位同志表示衷心感谢。

现在呈现给读者的这本书，自知存在许多缺点和不足，恳切希望读者及逻辑学界的专家们批评指正。

编　者

一九九〇年六月



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook

# 目 录

# 第一章 命题逻辑：命题逻辑基本概念

## 1.1 命题和变元

自然语言是人们交流思想的工具，它能表达极其丰富而深刻的思想，这在交流思想方面是非常合适的，但它也具有含糊性、歧义性，这些将阻碍我们对逻辑推理做精确研究。为此，我们将建立一种严格的人造语言，一种形式语言。为了与自然语言相区别，我们把形式语言称为对象语言，而把自然语言称为元语言。对象语言和元语言是两种不同层次的语言。前者是正在被加以讨论的语言；后者是用来进行讨论的语言。在我们的对象语言中，命题是一个最基本的语言单位。

按照逻辑学观点，命题是指具有真假的语句。在二值逻辑中，要求这种语句具有唯一性，即它可以为真，也可以为假，但不能同时既为真又为假，也不能有时真有时假。

在语句中，陈述句总是具有真假的，因此，它表达命题。另一些语句如疑问句、感叹句、祈使句等，不在命题之列。例如：

(a) 你身体好吗？

(b) 请勿吸烟！

(c) 中国是属于第三世界的国家。

(d) $2+3=6$

(e) 一九九〇年一月四日那天，沈阳曾经下了雪。

(f) 任何大于2的偶数都可以表示为两个素数之和。

(g) 人们将在二〇〇〇年去火星旅游。

根据我们对命题所做的规定，可知（a）、（b）不是命题，而（c）、（d）、（e）、（f）、（g）均是命题。其中（c）是真命题。（d）是假命题。（e）是对过去事情的判定，虽然我们一时无法确定其真假，但到底沈阳那天是否下过雪，是客观存在的事实，如果查到沈阳地区天气记录，那么这句话的正确性与否就不难确定了。（f）是哥德巴赫猜想，数学家从他们的研究中，估计它大概是真的，但是，至今还没有能给予证明。因此，还不能立即断定它的真假，但随着科学发展，它必定会被证明是真的或是假的。（g）是对将来事情进行的断定，由于所断定的事情还未发生，因此，我们现在还无法确定这句话的真假。但无论如何，我们认为这句话是可以判断其真假的，因为至多再过十几年，这个事情必定是发生或不发生，从而这句话必定或真或假。

命题虽然和语句相应，但不完全相同。语句是按既定规则所形成的具有一定含义的一组声音或笔画，只表达命题的语言形态，它属于语言范畴；而命题则属于思维范畴。语句是由主语、谓语、宾语、定语……等构成；而命题则是由个体词、谓词……等构成。语句可以是陈述句、疑问句、感叹句、祈使句；而命题只与那些用来表达真的或假的的陈述句相应。

至于判断，是对思维对象有所断定的语句，是为断定者所主观断定了的命题。判断与反映的事实内容相关；而命题则不注重事实内容，它只具有真或假两种意义。

命题可分为两类：简单命题（也称原子命题）和复合命

题。

简单命题是由一个主谓结构简单句表达的命题，它不能再以其它命题作为组成成份。例如：

(a) 亚里士多德是逻辑学的创始人。

(b) 北京是中华人民共和国首都。

简单命题是命题逻辑中最基本的逻辑单位，这里我们不再去分析简单命题的内部结构。但是，我们需由简单命题，通过某些联结词来复合成新的命题。这种新命题就称作复合命题。组成复合命题的命题称为成份命题。联结词是把几个命题联结起来从而构成复合命题的词项。例如：

(a) 地球在金星和火星之间，并且是以椭圆轨道公转。

(b) 或者你进来，或者他出去。

(c) 如果蔑视辩证法，那么就要受到惩罚。

数理逻辑用形式化的方法来研究逻辑推理，首先要将命题符号化。以小写英文字母 $p$、$q$、$r$、$s$、$p_i$、$q_i$、$r_i$、$s_i$ 等 ($i=1,2,3,\cdots\cdots$) 作为简单命题符号。这些符号一般是代表任意的非特定的简单命题，因而被称为命题变元。命题有真有假，真和假都称为命题的真值。真是命题的真值，假也是命题的真值。命题的真值可分别以“1”或“T”表示“真”，以“O”或“F”表示“假”。因此，一个给定的命题变元可以看成取下列真值之一：T或F。

命题逻辑是以简单命题为基本单位，以未解析的命题之间的形式结构及逻辑规律为主要对象的。命题逻辑的主要特征就在于研究和考察逻辑形式时，把一个复合命题分析到其中所包含的简单命题为止，而不再进行分析组成简单命题的主词、谓词及量词等其他各种成份。事实表明，由命题逻辑这种分析的特点所显示出的一些颇为重要的逻辑形式，更别

具重要意义。

## 1.2 真值联结词

联结词是按照既定规则联结几个简单命题而构成复合命题的词项。一定的联结词反映借以联结的各成份命题之间的关系。

命题逻辑所关心的是命题间的真假关系，一个命题非真即假。简单命题的真假取决于它是否如实地反映客观情况。现在问，既然复合命题是由简单命题组成的，那么复合命题的真假能否由构成它的简单命题的真假来决定呢？回答是肯定的。当一个复合命题由某种联结词与若干简单命题构成时，无论简单命题的真假如何，该复合命题的真假完全取决于这些简单命题的真假。但是，日常语言中联结词往往含有内容上和心理上的因素，从而使一个复合命题很难由其成份命题的真假来确定其真假，为此，需要引进真值联结词去代替日常语言中的联结词，从而使得复合命题的真假由成分命题的真假来确定。

真值联结词是反映复合命题和成份命题之间真假关系的联结词。它们和日常语言里的联结词是有所不同的，它们只是日常语言里的联结词的逻辑抽象。鉴于真值联结词不再表现与逻辑研究无关的命题的具体内容和心里因素，和避免与不确定的普通联结词混淆，我们将采用专门的表意符号来表示五个真值联结词。它们是：

$\neg$ 表示“并非……”

$\wedge$ 表示“……并且……”

$\vee$ 表示“……或……”



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$\rightarrow$　表示“如果…那么……”

$\longleftrightarrow$　表示“……当且仅当……”

真值联结词确定后，我们就可以写出一般的复合命题的形式结构，即真值形式。所谓真值形式就是复合命题相应的由真值联结词构成的形式结构。命题逻辑里的公式均为真值形式。基本真值联结词有五个，因此相应的真值形式也有五种：

| | |
|---|---|
| $-p$ | 否定式 |
| $p\wedge q$ | 合取式 |
| $p\vee q$ | 析取式 |
| $p\rightarrow q$ | 蕴涵式 |
| $p\longleftrightarrow q$ | 等值式 |

这是五个基本真值形式，由它们可以组成更为复杂的真值形式。下面我们将逐一定义五个基本真值联结词及相应的真值形式。

否定式

一个命题p的否定，我们把它写成“$-p$”，读作“非p”。其中，“非”称作否定词，“非p”称作否定式。仅当p真时，$-p$为假，否则$-p$为真。我们用下表加以刻划：

| p | $-p$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

这张表给出了真值联结词否定的定义。否定是一个一元的联结词，因为它只联结一个命题，它是命题逻辑中唯一的一个单元联结词。

在自然语言中，除了“非”表示否定词外，还有这样的表达方式：

(a) 不是p

(b) p不成立

(c) p是假的

(d) 永不p

(e) 绝不p

尽管它们的含义并不完全相同，但除否定外没有其他的逻辑内容，因此都可用－p表示。

合取式

如果p、q为命题，则“p并且q”可写成“$p \wedge q$”，读作“p并且q”。其中“$\wedge$”称作合取词，$p \wedge q$称作合取式。仅当p、q全真时，$p \wedge q$为真，否则$p \wedge q$为假。为了明显地体现这种关系，我们构造下列表格：

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

这张表显示出了真值联结词合取定义。在自然语言中，诸如下面的句子联结词也可用“$\wedge$”表示：

(a) ……和……

(b) 即……又……

(c) 虽然……但是……

(d) ……同时……

我们必须注意，当我们用真值联结词表示命题之间合取关系时，不再有与逻辑无关的含义，而仅表示一种真值关系。但日常语言中“并且”除了真值关系外，还可表示转折关系，递进关系、并列关系等。例如，在日常语言中，就不

会用“并且”联结这么两个内容上根本无关的句子，即“雪是白的”和“3加3等于6”，但是，“$\wedge$”可以联结任何语句。另外，“$\wedge$”具有交换性，“$p \wedge q$”与“$q \wedge p$”在逻辑上是等值的。但日常语言中的“并且”或与相应联结词很多情况下没有这种交换性，“屡战屡败”并不同于“屡败屡战”。

析取式

如果p，p为命题，则“p或q”可表示为“$p \vee q$”，读作“p或q”。其中“$\vee$”称作析取词，$p \vee q$称为析取式。在汉语中，人们对“或”这个词的标准用法有两种：p或q可以意指相容的，也可以意指相排斥的。为了保证我们符号语言精确性，我们必须选取其中之一作为我们符号$\vee$的意义。我们选择了前者。即仅当p、q至少有一个为真时，$p \vee q$为真，否则$p \vee q$为假。相容析取定义用表构造如下：

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

相排斥的析取“p要么q”我们可以定义为（$p \vee q$）$\wedge$ -（$p \wedge q$）。

蕴涵式

如果p、q为命题，则“如果p则q”可用“$p \rightarrow q$”表示，读作“如果p则q”或“p蕴涵q”。其中“$\rightarrow$”称作“蕴涵词”，p表示前件，q表示后件，称$p \rightarrow q$为蕴涵式。仅当p真且q假时，$p \rightarrow q$为假，否则$p \rightarrow q$为真。蕴涵式真值表如下：

| p | q | p→q |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

此表揭示出蕴涵式仅在一种情况下是假的，即前件真后件假的时候，这种蕴涵式叫做实质蕴涵。由真值联结词"→"所表达的实质蕴涵与自然语言中的"如果……则……"所表达的形式蕴涵是有区别的。前者要求前件蕴涵后件，即指从前件真可推出后件真，或者说，前件真，后件假是不可能的。而形式蕴涵不仅要求前件蕴涵后件，而且还要求内容方面的条件联系。诸如"如果1＋1＝3则今天下雨"这样的命题总是被认为是无意义的。而在命题逻辑中它却是一个有意义的真命题。

在自然语言中，除了"如果……则……"表示实质蕴涵外，下列形式也可用实质蕴涵p→q表示：

(a) p是q的充分条件

(b) q是p的必要条件

(c) 只有q才p

(d) 只要p就q

(e) p蕴涵q

(f) p推出q

等值式

如果p、q为命题，则"p当且仅当q"可用"p←→q"表示，读作"p当且仅当q"，或"p与q等值"。其中"←→"称作等值词，称p←→q为等值式。仅当p真q亦真，p假q亦假时，p←→q为真，否则p←→q为假。其真值表如下：

| p | q | $p \longleftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

至此，我们的真值联结词已全部列出，同时也给出了最简单的真值形式。虽然，真值联结词的作用不仅在于把简单命题联结成复合命题，而更重要的是它反映了复合命题与其成份命题之间的真值关系。正因如此，真值联结词必须保证：由它联结而成的复合命题的真值完全取决于它们联结的成份命题真值。

## 1.3 赋值和真值表

在命题逻辑中，一个真值形式的真值完全取决于它的成份命题的真值。因此，当真值形式中的每一个命题变元都被赋以确定真值时，真值形式也就得到一个相应的真值。我们把这样的一组对命题变元的赋值称作一组真值指派。使得真值形式为真的指派称作成真指派；使得真值形式为假的指派称作成假指派。赋值方法的具体运用是这样的，假使一个真值形式中的命题变元总共有A、B和C三个，那么一个赋值可能就是对A指派T（即假使A是真的），然后对B指派T，最后把T指派给C，这仅是一个赋值。另一个赋值可能是对A、B和C分别指派F，当然还有其他的可能赋值。当所有命题变元都被赋予相应的真值后，这个真值形式的真值也就确定了。

小写英文字母“v”表示一个任意赋值。v(A)＝T表示

在某赋值中对A指派T，使得A为真。v(A)=F表示在一个赋值中对A指派F，使得A为假。

对于任意命题变元A和B在任何一个赋值v中，它们的真值是这样被决定的：

(a) A被指派T或F，但不能同时被指派T和F；

(b) 当且仅当v(A)=F，那么v(－A)=T，否则v(－A)=F，

(c) 当且仅当v(A)=T，以及v(B)=T，那么v(A∧B)=T，否则v(A∧B)=F，

(d) 当且仅当v(A)=F，v(B)=F，那么v(A∨B)=F，否则v(A∨B)=T，

(e) 当且仅当v(A)=T，v(B)=F，那么v(A→B)=F，否则v(A→B)=T，

(f) 当且仅当v(A)=v(B)，那么v(A←→B)=T，否则v(A←→B)=F。

当一个真值形式A由命题变元$a_1$……$a_n$构成，并且已知v($a_1$)、……v($a_n$)，那么根据上述规则可求出v(A)。例如，设：v(p)=T，v(q)=F，求：－(p∨(－(q∨p)))的真值。推导过程如下：

(1) v(p)=T　　已知

(2) v(q)=F　　已知

(3) v(q∨p)=T　　(1)、(2)根据规则(d)

(4) v(－(q∨p))=F　　(1)、(3)根据规则(b)

(5) v(p∨(－(q∨p)))=T　　(4)根据规则(d)

(6) v－(p∨(－(q∨p)))=F　　(5)根据规则(b)

显然，在上述赋值中，－(p∨(－(q∨p)))是假的。



试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.com