



21世纪普通高等教育基础课规划教材

INSTRUCTOR
OF
HIGHER MATHEMATICS

高等数学

学习指导 第2版

张润琦 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



21 世纪普通高等教育基础课规划教材

高等数学学习指导

第 2 版

主 编 张润琦
参 编 毛京中 张 楠



机械工业出版社

本书是成人高等学校《高等数学》的学习指导书,根据教育部颁布的“全国成人高等教育本科高等数学课程教学基本要求”编写。

本书的主要内容是一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程和无穷级数。在每一章中,明确了教学基本要求,对重点内容作了系统扼要的叙述,指出了学习中应注意的问题,并对典型例题作了详尽的分析解答。

本书从成人教育的特点和现状出发,根据近年来远程教育的教学经验,特别强调基础知识及相应训练。在附录中给出10份近年来某远程教育学院实用的高等数学期末试卷。

本书也可以作为专升本复习考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/张润琦主编.—2版.—北京:机械工业出版社,2008.12

21世纪普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-11966-1

I. 高… II. 张… III. 高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第203801号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

责任编辑:郑 玫 版式设计:霍永明 责任校对:张莉娟

封面设计:张 静 责任印制:杨 曦

三河市国英印务有限公司印刷

2009年2月第2版·第1次印刷

169mm×239mm·22.5印张·434千字

标准书号:ISBN 978-7-111-11966-1

定价:32.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
销售服务热线电话:(010) 68326294

购书热线电话:(010) 88379639 88379641 88379643

编辑热线电话:(010) 88379711

封面无防伪标均为盗版

前 言

本书编写的依据是教育部颁布的“全国成人高等教育本科高等数学课程教学基本要求”。最近教育部全国高校网络教育考试委员会颁发了统考课程“高等数学”的考试大纲，对考试内容作了详细说明，给出了试卷结构和题型。按照大纲要求，本书第2版调整了相关内容“*”号的章节内容和例题、习题不是统考大纲要求的内容，读者可按自己的情况予以取舍。

高等数学是成人高等教育各专业必修的重要基础理论课，本书是帮助学生掌握该课程内容的学习辅导书。在本书的各章中明确了教学基本要求，对重点内容作了系统扼要的叙述，并对典型例题作了详尽的分析解答。这有助于学员整体地理解各章的内容，明了解题的思路和方法，全面深入地理解高等数学的基本概念、理论和方法，更有利于培养分析问题、解决问题的能力。

根据多年来成人高等数学教学的经验，针对当前成人教育的实际状况，本书特别强调对高等数学基本内容的学习和相关训练。在本书的附录中给出了10份试卷，这是历年来现代远程教育学院的实用试卷。试卷中的内容反映了对学员的基本要求。认真学习试卷，分析思考这些试卷所体现的对于重点内容的要求，对学好高等数学会有较大帮助。

本书可以作为高等教育自学考试的数学复习书，也可以作为成人教育专升本考试的数学复习书。由于编者水平有限，错误和不足之处恳请读者、同行、专家批评指正。

编 者

目 录

前言

第一章 函数	1
一、教学基本要求	1
二、重点内容叙述及应注意的问题	1
三、典型例题	3
习题一	7
第二章 极限与连续	9
一、教学基本要求	9
二、重点内容叙述	9
三、应注意的几个问题	12
四、典型例题	13
习题二	21
第三章 导数与微分	25
一、教学基本要求	25
二、重点内容叙述	25
三、应注意的几个问题	27
四、典型例题	28
习题三	46
第四章 导数的应用	50
一、教学基本要求	50
二、重点内容叙述及应注意的问题	50
三、典型例题	54
习题四	66
第五章 不定积分	69
一、教学基本要求	69
二、重点内容叙述及应注意的问题	69
三、典型例题	72
习题五	85
第六章 定积分及其应用	89
一、教学基本要求	89
二、重点内容叙述及应注意的问题	89

三、典型例题	93
习题六	113
*第七章 向量代数与空间解析几何	118
一、教学基本要求	118
二、重点内容叙述	118
三、典型例题	125
习题七	138
第八章 多元函数微分学	143
一、教学基本要求	143
二、重点内容叙述	143
三、典型例题	148
习题八	166
第九章 重积分	170
一、教学基本要求	170
二、重点内容叙述	170
三、典型例题	174
习题九	194
*第十章 曲线积分与曲面积分	198
一、教学基本要求	198
二、重点内容叙述	198
三、典型例题	202
习题十	208
*第十一章 无穷级数	210
一、教学基本要求	210
二、重点内容叙述	210
三、典型例题	220
习题十一	239
第十二章 常微分方程	244
一、教学基本要求	244
二、重点内容叙述	244
三、典型例题	249
习题十二	267
附录 A 习题答案与提示	270
附录 B 试卷及其解答	313
参考文献	351

第一章 函 数

函数是高等数学的主要研究对象，初等函数是本课程中最常见的函数。因此，本章内容是基础知识。

一、教学基本要求

- 1) 理解一元函数的概念及函数的简单性态。
- 2) 掌握五类基本初等函数及它们的图形。
- 3) 理解复合函数的概念。
- 4) 了解初等函数，会把初等函数分解为基本初等函数的四则运算与复合。
- 5) 了解分段函数。
- 6) 会求函数的反函数。

二、重点内容叙述及应注意的问题

1. 函数概念

设 x 和 y 是两个变量， X 是实数集 R 的子集，如果对任意 $x \in X$ ，变量 y 按照一定的规则有一个确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y = f(x)$ 。称 X 为该函数的定义域。

函数的两个要素是对应规则和定义域。只有二者都相同的函数才是相同的函数。

函数是高等数学讨论的对象。主要讨论初等函数，也涉及非初等函数。常用分段函数研究一些重要概念。对中学学习过的五类基本初等函数要十分熟悉，特别要具备由函数图像观察函数某些特性的能力。

2. 函数的几种特性

(1) 有界性

设函数的定义域为 D ，数集 $X \subset D$ 。如果存在正数 M ，使得对于任意的 $x \in X$ ，都有不等式



$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 否则, 称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

要注意函数有界与函数有最大值和最小值之间的区别和联系. 函数在 X 上有最大值和最小值, 则函数在 X 上有界. 反之不一定成立.

(2) 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义 (I 是函数的定义域或者是定义域的一部分). 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 皆有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加 (单调减少).

(3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的. 如果对于任意的 $x \in D$, 皆有

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数 (奇函数).

(4) 周期性

对函数 $y=f(x)$, 如果存在正常数 T , 使得对于定义域内的任何 x 皆有

$$f(x+T) = f(x)$$

成立, 则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数, 称 T 为 $f(x)$ 的周期.

函数的有界性是中学里未学过的性质, 要通过较多的练习才能真正理解. 其他三个性质, 要和函数的图像联系在一起, 在高等数学的运算中灵活运用.

3. 复合函数

设 $y=f(u)$, $u \in U$, 而 $u=\varphi(x)$, $x \in D$. 若 $\varphi(x)$ 的值域与 U 的交集非空, 则 y 通过 u 的联系而成为 x 的函数 $y=f(\varphi(x))$ 称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 称 u 为中间变量.

定义中要求 $\varphi(x)$ 的值域与 U 的交集非空, 即要求 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域非空. 这只要存在 $\varphi(x)$ 的值属于 $f(u)$ 的定义域 U .

今后常用的是把初等函数分解为基本初等函数的四则运算、复合.

4. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的函数, 统称为初等函数.

分段函数的对应规则不能用一个公式表达. 它一般不是初等函数, 只有绝对值函数例外, 因为

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

可看成幂函数的复合. 分段函数以后常见到.

按实际问题的要求建立函数关系式是个重要问题. 以后用高等数学方法解决实际问题时, 第一步就要建立相应的函数关系式. 因此, 应通过较多的练习, 逐



步掌握建立函数关系的基本方法.

本章内容多在中学学过,但这些内容是基础,要熟练掌握,不可忽视.

三、典型例题

填空题

例1 函数 $y = \arcsin \frac{x}{2}$ 的定义域为 _____; 它的值域为 _____.

解 由 $\left| \frac{x}{2} \right| \leq 1$, 得 $-2 \leq x \leq 2$. 即定义域为 $[-2, 2]$.

$y = \arcsin \frac{x}{2}$ 的值域是主值区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

例2 函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 的值域为 _____.

解 反三角函数的值域为主值区间. 所以 $y = \operatorname{arccot} x$ 的值域为 $(0, \pi)$.

例3 设 $f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq 3 \\ 4 & 3 < x \leq 6 \end{cases}$, 则 $f(2x+1)$ 的定义域为 _____.

解 由 $f(2x+1) = \begin{cases} 2 & 0 \leq 2x+1 \leq 3 \\ 4 & 3 < 2x+1 \leq 6 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 2 & -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 4 & 1 < x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

知定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right]$.

若仅求定义域可以直接解不等式.

由 $0 \leq 2x+1 \leq 6$, 得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$.

例4 函数 $f(x) = \cos 2x + \tan \frac{x}{3}$ 的周期为 _____.

解 由 $\cos 2x$ 的周期为 π , $\tan \frac{x}{3}$ 的周期为 3π , 知 $f(x)$ 的周期为 3π .

例5 函数 $f(x) = \sin \frac{x}{5} + \cot \frac{x}{3}$ 的周期为 _____.

解 由 $\sin \frac{x}{5}$ 的周期为 10π , $\cot \frac{x}{3}$ 的周期为 3π , 知 $f(x)$ 的周期为 30π (即 10π 和 3π 的最小公倍数).

例6 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $f(x+1) - f(x) =$ _____.



$$\text{解 } f(x+1) = \begin{cases} 1 & x+1 < 0 \\ 2 & x+1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ 2 & x \geq -1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x < 0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ 1 & -1 \leq x < 0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{得 } f(x+1) - f(x) &= \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & x < -1 \text{ 或 } x \geq 0 \\ 1 & -1 \leq x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例7 函数 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \lg(x-1)$ 的定义域是_____.

解 $f(x)$ 由两项构成, 先求每项的定义域, 再求其交集.

$$D_1 = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}, D_2 = \{x \mid x > 1\}$$

则 $f(x)$ 的定义域为 $D = D_1 \cap D_2 = \{x \mid 1 < x \leq 2\}$. 也可以记为区间的形式 $(1, 2]$.

填空题大多是较简单的计算题, 但是计算时要十分认真仔细, 才能保证计算结果准确.

选择题

例8 函数 $f(x) = 2x^2 + e^{x^2}$, $-1 \leq x \leq 2$, 是 ()

- (A) 偶函数 (B) 奇函数
(C) 单调增函数 (D) 非单调函数

解 函数虽然满足 $f(-x) = f(x)$, 但是区间 $[-1, 2]$ 关于原点不对称, 因此 (A) 和 (B) 都不正确.

又当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 即 $f(x)$ 单调减.

而当 $0 < x_1 < x_2$ 时, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x)$ 单调增.

由上知 (C) 不正确, 只有 (D) 正确. 故选 (D).

解此例的方法称为排除法. 先用所学知识容易地排除错误选项, 把三个选项都排除了, 剩下的一个就是要选的项. 解此题时, 实际上只要说明当 $-1 \leq x < 0$ 时, $f(x)$ 单调减, 就排除了选项 (C).

解选择题时, 还可以用直接法、验证法和图像法. 一般是根据具体情况选用相应的解法, 或是几种解法结合使用.

例9 函数的定义域关于原点对称是函数成为奇函数的 ()

- (A) 充分但不必要条件 (B) 必要但不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

解 可用奇函数定义直接判断 (即“直接法”), 应选 (B).



解答题

例10 证明 $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是奇函数.

$$\begin{aligned}\text{证 } f(-x) &= \lg(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \lg \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= -\lg(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -f(x)\end{aligned}$$

由奇函数定义, 知 $f(x)$ 为奇函数.

此例为简单证明题, 做此题时只要对函数概念真正理解了, 按奇函数定义, 运用代数式变形, 就易于证得结论. 关于偶函数、周期函数的证明题与此类似.

例11 函数 $y = \frac{x}{1+x^2}$, $-\infty < x < +\infty$, 是有界函数吗? 说明理由.

解 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 是有界函数.

由 $(1 - |x|)^2 \geq 0$, 知 $1 + x^2 \geq 2|x|$, 故 $\frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1$, 得 $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$.

用函数有界的定义, 取 $M = \frac{1}{2}$, 则 $|y| \leq M$. 即函数 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有界.

函数的有界性是个新概念, 真正理解它要通过较多的练习和深入的思考. 函数 $f(x)$ 的有界性与要讨论的区间 I 有关. 例如 $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 是无界的, 而它在 $(0, 1)$ 内是有界的, 可取 $M = 1$. 函数的有界性与函数有最大值和最小值是不同的. 例如 $y = x^2$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 但它在 $(0, 1)$ 内没有最大值, 也没有最小值. 函数的最大值或最小值是惟一的, 而函数的界不惟一. 例如 $y = x^2$ 在 $(0, 1)$ 内的界可取 $M_1 = 1$, 也可取 $M_2 = 2$. 其实, 所有大于 1 的实数都可以是 $y = x^2$ 在 $(0, 1)$ 内的界.

一个定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的单调函数也可以有界. 例如函数 $y = \arctan x$, $-\infty < x < +\infty$, 是有界的, 因为 $|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2}$, 即 $M = \frac{\pi}{2}$ 是它的界.

例12 把函数 $y = \sqrt{\lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ 分解为基本初等函数的四则运算和复合.

解 令 $y = \sqrt{u}$ 为幂函数, $u = \lg v$ 为对数函数, $v = 1 + \frac{1}{x}$ 为幂函数与常数的和.

此三个函数复合成 $y = \sqrt{\lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$, 其中 v, u 为中间变量.

把一个初等函数分解为基本初等函数的四则运算及复合, 是今后经常遇到的



问题,十分重要,要反复练习.特别是函数的复合,尤其重要.这也是今后学习中的难点之一.

例 13 设 $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = \lg x$, 求 $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$.

解 $f(u) = u^2$, 令 $u = \varphi(x)$, 则 $f(\varphi(x)) = [\varphi(x)]^2 = (\lg x)^2 = \lg^2 x$
 $\varphi(v) = \lg v$, 令 $v = f(x)$, 则 $\varphi(f(x)) = \lg[f(x)] = \lg(x^2)$

例 14 设 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & x < 10 \\ 5 & x > 10 \end{cases}$, 证明 $g(x) = 2f(x-10) + 3$.

证 把 $f(x)$ 右端写成分段函数的形式.

$$\text{由 } f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{得 } f(x-10) = \begin{cases} 1 & x > 10 \\ -1 & x < 10 \end{cases}$$

$$\text{故 } 2f(x-10) + 3 = \begin{cases} 5 & x > 10 \\ 1 & x < 10 \end{cases} = g(x)$$

等式得证.

例 15 函数 $y = \begin{cases} 2-x & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$ 能用一个解析式表示吗? 说明理由.

解 能用一个解析式表示, 即函数为一个初等函数. 若一个分段函数是初等函数, 它一定是与一个绝对值函数相关联, 因此应设法把它和绝对值函数联系起来.

$$\text{由 } y-1 = \begin{cases} 1-x & x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$$

$$= |x-1| = \sqrt{(x-1)^2}$$

$$\text{得 } y = 1 + \sqrt{(x-1)^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

例 16 把半径为 R 的圆形铁片自中心处剪去一扇形后, 卷成一无底圆锥. 试将这圆锥的容积 V 表示为未剪去部分中心角 α 的函数, 并指出其定义区间.

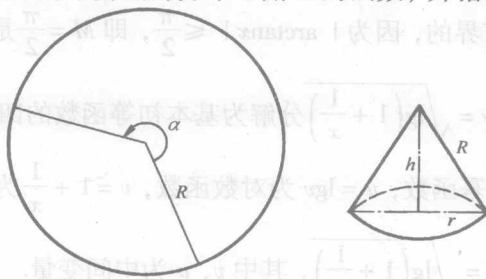


图 1-1



解 如图 1-1 所示, 圆锥底面半径记为 r , 其高记为 h , 圆锥底面周长等于中心角 α 所对的弧长. 圆锥的母线长等于圆片的半径 R , 由此得

$$2\pi r = R\alpha, h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

故容积

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - r^2} \\ = \frac{R^3 \alpha^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}, \text{ 其中 } 0 < \alpha < 2\pi.$$



习题一

一、填空题

1. 函数 $y = \ln(\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x})$ 的定义域是_____.
2. 函数 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 的反函数是_____.
3. 设 $f(x+3) = \frac{x+1}{x+2}$, 则 $f(x) =$ _____.

二、选择题

4. 下列函数中不是周期函数的是().
(A) $|\sin x|$ (B) $x \tan x$ (C) $2\cos(\pi x + 1)$ (D) $\cos^2 x$
5. 设 $f(x) = \ln \frac{3-x}{3+x}$, 下列各式中正确的是().
(A) $f(x) = -f(-x)$ (B) $f(x) = f(-x)$
(C) $f(x+1) = -f(x-1)$ (D) $f(x) = f(x+1)$

三、计算题

6. 设 $\varphi(x) = \sqrt[n]{1-x^n}$, $x > 0$, 求 $\varphi[\varphi(x)]$, 并求 $\varphi(x)$ 的反函数.
7. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f[f(x)]$.

四、证明题

8. 若函数 $y=f(x)$ 以 T 为周期, 试证函数 $y=f(ax)$ ($a > 0$) 以 $\frac{T}{a}$ 为周期.
9. 设 $\varphi(t) = \lg \frac{1-t}{1+t}$, 证明 $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

五、应用题

10. 设有一圆锥形容器, 其底半径为 R (单位为 cm), 高为 H (单位为 cm), 现在向容器内注水. 试把容器中的水的体积 V 表示成水面高 h 的函数 (见图 1-2).

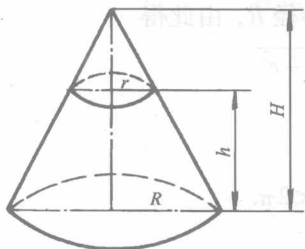


图 1-2

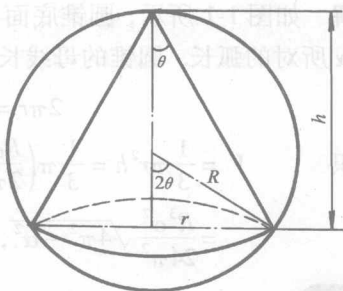


图 1-3

11. 一个顶角为 2θ 的正圆锥内接于半径为 R 的球, 如图 1-3 所示, 试把圆锥的体积表示为 θ 的函数.

第二章 极限与连续

高等数学的研究对象是函数,所用的基本方法是极限方法.微积分的重要概念都是通过极限定义的,重要的运算公式也是用极限导出的.因此极限概念和理论成为高等数学的基石.连续函数是微积分的主要研究对象.它也是用极限定义的,它是一个重要概念.

一、教学基本要求

- 1) 了解极限概念及其基本性质.
- 2) 掌握极限的四则运算法则.
- 3) 了解两个极限存在准则(单调有界准则和夹逼准则),掌握两个重要极限.
- 4) 了解无穷小、无穷大的概念及性质,会用等价无穷小代换求极限.
- 5) 理解函数的连续性概念,会判断间断点的类型.
- 6) 了解闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理),会用介值定理证明方程的根的存在性.

二、重点内容叙述

1. 函数的极限概念

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

几何解释: 要使曲线 $y = f(x)$ 进入带形区域 $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ 内, 只要 x 落入点 a 的 δ 去心邻域中.

类似定义 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$. 极限存在的充分必要条件是左、右极限都存在且相等.

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

几何解释: 要使曲线 $y = f(x)$ 进入带形区域 $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ 内, 只要 x 落入原点的 X 邻域外.



类似定义 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

2. 极限的性质

1) 惟一性: 若 $\lim f(x)$ 存在, 则极限惟一.

2) 局部有界性: 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 a 点的某去心邻域内有界.

3) 局部保号性: 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 且 $A > 0$, 则在点 a 的某邻域内, 有 $f(x) > 0$.
($A < 0$ 时, 结论类似)

4) 夹逼准则: 若在 a 点的某去心邻域内, 有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

5) 单调有界准则: 单调有界数列必有极限.

3. 极限的运算法则

设 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则

1) $\lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$;

2) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;

3) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

自变量 x 的变化趋向可以是 $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow \infty$ 等各种情形.

由 1) 可推出, 若 $f(x)$ 的极限不存在, $g(x)$ 的极限存在, 则 $f(x) \pm g(x)$ 的极限一定不存在. 这在求极限时, 常被应用.

4. 无穷小及无穷小比较, 无穷大

(1) 无穷小

极限为 0 的函数称为无穷小.

无穷小是一个函数, 它与自变量的变化趋向有关.

(2) 无穷小比较

设 α, β 为无穷小, 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = C$ ($C \neq 0$), 则称 α 和 β 为同阶无穷小;

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α 为 β 的高阶无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$;

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 则 α 和 β 是等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$.

(3) 无穷小重要性质

1) 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.

2) 设无穷小 $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ 存在, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

上述性质在求极限时常被应用. 若函数为多个因子的乘积、商, 求其极限



时,可以把因子(若它为无穷小)用与它等价的无穷小代换.“无穷小代换”是求极限时常用的方法.

(4) 无穷大

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$: 对 $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x)| > M$$

称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时为**无穷大量**.

和极限的定义类似,可定义多种形式的无穷大量. 如: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ 等.

若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 若 $f(x)$ 为无穷小, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大 ($f(x) \neq 0$). 该性质对 x 的任何变化趋向都正确.

5. 函数的连续性

(1) 连续概念

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

连续的等价定义: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 其中 $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**间断点**. 存在左极限和右极限的间断点称为**第一类间断点**, 否则称为**第二类间断点**.

和极限概念类似, 可以给出 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续、右连续的概念.

(2) 初等函数的连续性

初等函数在有定义的区间上是连续的.

利用函数的连续性, 可以方便地求某些极限.

(3) 闭区间上连续函数的性质

最值定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取得最大值和最小值.

由此定理可知, 闭区间上的连续函数一定有界.

介值定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, $f(a) \neq f(b)$, 且常数 μ 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \mu$ 成立.

由此定理可得出推论:

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

利用上述推论, 可以证明方程 $f(x) = 0$ 在某区间 (a, b) 内存在根.