鼎尖学案

新课标·高中同步

鼎尖系列丛书之二

人教B版 数学

必修⑤

师生同修 学教互动 DING JIAN XUE AN

个性化学案

· 课前预习

· 课堂笔记

· 课后作业

师生同修 学教互动 DING JIAN XUE AN

丛书主编：尹治理 黄俊葵
马揄虎 刘芳芳

延边教育出版社

沉淀七年　浓情奉献　个性教辅　鼎尖学案

开创中国教辅个性化新时代

新课程改革要求教师在尊重学生差异性的前提下，利用和发挥自身特长，体现自身特色，采用相应的教学模式，提倡教学模式的个性化、多样化。

如何顺应新课程改革的要求，实现教学模式多样化和教辅图书个性化，一直是我们近年来研究的课题。

2001 年 6 月，在国家义务教育课程改革伊始，延边教育出版社“世纪鼎尖教育研究中心”便成立了专门的课题组，开始着手研究如何实现教辅图书个性化这一问题。

2002 年，继上海市自主命题高考以后，北京市成为第二个自主命题的省份，随后，高考自主命题的范围不断扩大，高考模式多样化特征日益明显。

2004 年秋，新课程改革开始在高中稳步推进；2007 年，山东、广东、海南、宁夏开始首轮新课标高考。2008 年，高中新课标的省份不断增加。

教材版本的多样化和高考的地方化，要求我们必须推进教辅图书的地方化和个性化。同时，国家新课程改革，对教辅图书的个性化也提出了许多新的要求。

新课程改革不断推进的七年，是教师对于个性化教辅的需求不断增加的七年，也是我们密切关注新课程改革动向、不断深入研究的七年。经过七年的不断研究、探索与实践，2008 年 4 月，我们推出了沉淀了七年的研究成果：《鼎尖教案》《鼎尖学案》系列丛书。

《鼎尖学案》系列丛书，以资料性、工具性、完备性的教师用书《鼎尖教案》为基础，按照一般的教学规律，将教学过程分为“课前预习”“课堂教学”“课后作业”三个阶段，将课程类型划分为“新授课”“讲评课”“复习课”三种基本类型。使用时，可依据不同教师的教学习惯和学生的差异性，结合每个教学环节的实际要求，将课程类型划分为不同的模式。

教师在《鼎尖教案》基础上，根据自身的教学习惯和学生的实际情况，可以将不同课程类型的不同模式进行组合，选择自己需要的学案模式。我们可根据不同地区、不同教师的不同需求进行制作，提供个性化教辅。这样，教师通过对“教案”内容的选择使用，与自选学生用书的“个性化学案”模式一起进行个性化教学，由此实现教辅图书的个性化。

最后，我们衷心地感谢七年以来，在推进教学模式多样化和教辅图书个性化的过程中，给予我们热情支持和无私帮助的广大一线教师和教育专家。同时，也希望有更多的一线教师和教育专家在使用本书之后，提出宝贵意见，与我们共同探索更多、更实用的学案模式，促进本系列丛书的不断完善与发展。

北京世纪鼎尖教育研究中心

第一章　解三角形

第二章　数列

第一章
解　三　角　形

1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1　正弦定理(2课时)

课堂　导入

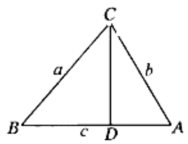
在雷达兵的训练中,有一个项目叫"捉鬼"(战士语),即准确地发现敌台的位置.在该项目训练中,追寻方的安排都是两个小组作为一个基本单位去执行任务,用战士的话说就是两条线(即两台探测器分别探出了敌台的方向)一交叉就把敌人给叉出来了,想藏想跑门都没有.其实这里面不仅仅是两线交叉确定交点的问题,还隐藏了一个数学问题,即两个探寻小组之间的位置是已知的,它们和敌台构成了三角形,在战士探明了敌台方向的时候,也就是知道了该三角形的两个内角,再利用正弦定理就可以算出敌人的准确位置.

第1课时　正弦定理

课前　预习

自主学习

1. $\triangle ABC$中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别用小写字母______、______、______来表示.
2. 在$Rt\triangle ABC$中,c是斜边,则$\angle C=$______;$\sin C=$______.
3. 若三角形的三边分别是$a=3,b=4,c=5$,则$\sin A=$______;$\sin B=$______;$\sin C=$______.
4. 在$Rt\triangle ABC$中,c是斜边,$\frac{a}{\sin A}=$______,$\frac{b}{\sin B}=$______,$\frac{c}{\sin C}=$______;此时的c是$Rt\triangle ABC$的外接圆的______.
5. 如右图,$CD=a\cdot\sin B=b\cdot$______,$\frac{a}{\sin A}=$______.



6. 三角形的三个角和它的对边分别叫做三角形的______.
7. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做______.
8. 三角形中,大边所对的角______.

问题发现

课堂　笔记

知识点一　正弦定理及其推导

情景激疑

1. 正弦定理的意义以及公式结构的推导过程是什么?
2. 正弦定理能解决什么样的问题?

知识点归纳

典例剖析

【例1】 已知在$\triangle ABC$中,$c=10,\angle A=45°,\angle C=30°$,求$a$、$b$和$\angle B$.

解析　本题属于用正弦定理解三角形的第一类问题(即已知两角和一边,求另两边和一角).

【变式训练1】 在$\triangle ABC$中$a=3, c=3\sqrt{3}, \angle A=30^\circ$，求$\angle C$及$b$.

【例2】 在$\triangle ABC$中，已知$a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, \angle B=45^\circ$，求$\angle A$、$\angle C$和$c$.

解析 本题属于用正弦定理解三角形的第二类问题(已知两边和其中一边的对角，求三角形其他边与角).

【变式训练2】 已知三角形中的两边及其一边的对角，先判断三角形是否有解，有解的作出解答.

$b=10, c=5\sqrt{6}, \angle C=60^\circ$.

知识点二 三角形解的讨论

情景激疑

数形结合判断三角形解的个数有的同学觉得不好理解，其实利用正弦定理直接解答，根据结果就可以判断解的情况，如：$\triangle ABC$中，$a=3, b=2, \angle B=45^\circ$，有几个解？

解答：由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

$\therefore \sin A=\dfrac{a\cdot\sin B}{b}=\dfrac{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

根据所求$\sin A$的值你能判断此题解的情况吗？

知识点归纳

典例剖析

【例3】 根据下列条件，判断解三角形时是否有解，若有解，有几个解.

(1)$a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, \angle A=120^\circ$；

(2)$a=60, b=48, \angle B=60^\circ$；

(3)$a=7, b=5, \angle A=80^\circ$；

(4)$a=14, b=16, \angle A=45^\circ$.

【变式训练3】 已知下列各三角形中的两边及其一边的对角，判断三角形是否有解，有解的作出解答.

(1)$a=10, b=20, \angle A=80^\circ$；

(2)$a=2\sqrt{3}, b=6, \angle A=30^\circ$.

本课小结

课堂训练

1. 在$\triangle ABC$中，若$\sqrt{3}a=2b\sin A$，则$\angle B$为 ( )

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$

2. 在$\triangle ABC$中，$a=20, b=10, \angle B=29^\circ$，则此三角形解的情况是 ( )

A. 无解　　B. 有一解

C. 有两解　　D. 有无数个解

3. 在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{b}$，则$\angle B$的值为 ( )

A. 30°　B. 45°　C. 60°　D. 90°

4. 在$\triangle ABC$中，$b=8, c=8\sqrt{3}, S_{\triangle ABC}=16\sqrt{3}$，则$\angle A$等于 ( )

A. 20°　　B. 60°

C. 30°或150°　　D. 60°或120°

5. 在$\triangle ABC$中，若$\angle A=30^\circ, a=\sqrt{3}$，则$\dfrac{a+b-c}{\sin A+\sin B-\sin C}$等于 ( )

A. 2　B. $\frac{1}{2}$　C. $2\sqrt{3}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 在$\triangle ABC$中，若此三角形有一解，则a、b、$\angle A$满足的条件为__________.

7. 在$\triangle ABC$中，$a=2, \angle A=30^\circ, \angle C=45^\circ$，则$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}$等于______.

课后作业

1. 在$\triangle ABC$中，下列关系中一定成立的是 ( )

A. $a>b\sin A$　　B. $a=b\sin A$

C. $a<b\sin A$　　D. $a\geq b\sin A$

2. 在$\triangle ABC$中，已知$a=5\sqrt{2}, c=10, \angle A=30^\circ$，则$\angle B$等于 ( )

A. 105°　B. 60°　C. 15°　D. 105°或15°

3. $\triangle ABC$中，p：$\sin A<\sin B$和q：$\angle A<\angle B$推出情况是 ( )

A. $p\Rightarrow q$

B. $q\Rightarrow p$

C. $p\Leftrightarrow q$

D. $p\nRightarrow q, q\nRightarrow p$

4. 在△ABC中,已知$a=8$,$\angle B=60°$,$\angle C=75°$,则b等于( )

A. $4\sqrt{2}$　B. $4\sqrt{3}$　C. $4\sqrt{6}$　D. $\frac{32}{3}$

5. 在△ABC中,若$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}$,则△$ABC$是 ( )

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰或直角三角形

D. 等腰直角三角形

6. 不解三角形,确定下列判断中正确的是 ( )

A. $a=7,b=14,\angle A=30°$,有两解

B. $a=30,b=25,\angle A=150°$,有一解

C. $a=6,b=9,\angle A=45°$,有两解

D. $b=9,c=10,\angle B=60°$,无解

7. 在△ABC中,若$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$,则△$ABC$是 ( )

A. 等腰直角三角形

B. 等边三角形

C. 顶角为120°的等腰三角形

D. 以上均不正确

8. △ABC中,若$AB=1,BC=2$,则$\angle C$的取值范围是________.

9. △ABC中,若$b=2a$,$\angle B=\angle A+60°$,则$\angle A=$________.

10. 已知△ABC中,$a=x,b=2,\angle B=45°$,若三角形有两解,则x的取值范围是 ( )

A. $x>2$　B. $x<2$

C. $2<x<2\sqrt{2}$　D. $2<x<2\sqrt{3}$

11. (2007·山东潍坊)△ABC中,若$\frac{a^2}{b^2}=\frac{\tan A}{\tan B}$,则△$ABC$的形状为________.

12. 在△ABC中,已知$a^2-a=2(b+c)$,$a+2b=2c-3$.

若$\sin C:\sin A=4:\sqrt{13}$,求$a,b,c$.

第2课时　正弦定理的应用

课前　预习

自主学习

1. △ABC中,公式$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$称为________,其比值又等于△$ABC$的外接圆半径的________倍.

2. 已知三角形的任意两个角与________边,或已知三角形中的任意________边和其中一边的对角,应用正弦定理,可以求出这个三角形的其余的边和角.

3. 三角形中,大边所对的角________.

4. △ABC中,若$\angle A<90°$,且$b<a$,这时$\angle B$必是________角.

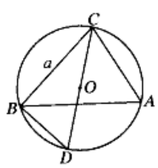
问题发现

课堂　笔记

知识点一　正弦定理与三角形外接圆

情景激疑

如右图,△ABC的外接圆⊙O的半径是R,CD是⊙O的直径,$\angle A=\angle D$,则$\sin A$______ $\sin D$______$\frac{a}{2R}$,即$a=$______$\cdot\sin A$.



知识点归纳

典例剖析

【例1】 在△ABC中,已知$\cos A=\frac{4}{5}$,$\cos B=\frac{5}{13}$.求$a:b:c$.

解析 要求$a:b:c$,只需求$\sin A:\sin B:\sin C$.由已知易求$\sin A,\sin B$,再利用三角恒等变换求$\sin C$即可.

【变式训练1】 在△ABC中,已知$a=\sqrt{2}$,$A=45°$,求$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$.

【例2】 (2007·潍坊模拟)在△ABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且$c=10$,又知$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$,求$a,b$及△$ABC$的内切圆的半径.

解析 将已知条件“$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$”中两边的比转化为角的比，从而判断出三角形的形状.

【变式训练 2】 在$\triangle ABC$中，求证：$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0$.

知识点二 利用正弦定理判断三角形形状

情景激疑

(1)由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos B}$你能得出什么结论？

(2)由$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}$你能得出什么结论？

知识点归纳

典例剖析

【例 3】 在$\triangle ABC$中，若$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{b}=\frac{\cos C}{c}$，则$\triangle ABC$是什么三角形？

解析 与正弦定理的变形$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$相比较，可以得出角之间的关系，从而确定$\triangle ABC$的形状.

【变式训练 3】 在$\triangle ABC$中，如果$\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，并且$\angle B$为锐角，试判断此三角形的形状特征.

知识点三 利用正弦定理解决几何问题.

情景激疑

(1)利用诱导公式在$\triangle ABC$中，你能得出什么结论？

(2)两个互补(余)的角的正、余弦值有何关系？

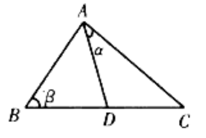
知识点归纳

典例剖析

【例 4】 已知$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线.

求证：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

【变式训练 4】 如下图所示，D是直角$\triangle ABC$斜边BC上一点，$AB=AD$，记$\angle CAD=\alpha$，$\angle ABC=\beta$.



(1)证明：$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$.

(2)若$AC=\sqrt{3}DC$，求β的值.

【例 5】 在$\triangle ABC$中，若$\angle B=60°$，$2b=a+c$，试判断$\triangle ABC$的形状.

【变式训练 5】 等腰三角形ABC的底边$BC=1$，底角B的平分线BD交AC于D，求BD的取值范围.

本课小结

课堂讲练

1. 在$\triangle ABC$中，若$\angle C=90°$，$a=6$，$\angle B=30°$，则$c-b$等于 ( )

A. 1　　B. -1

C. $2\sqrt{3}$　　D. $-2\sqrt{3}$

2. 已知两线段$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，若以a、b为边作三角形，则边a所对的角A的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$

C. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$

3. 在一个三角形中，有一个内角不小于120°，那么这个三角形的最长边与最短边之比 ( )

A. 不小于$\sqrt{3}$　　B. 小于$\sqrt{3}$

C. 不大于$\sqrt{3}$　　D. 大于$\sqrt{3}$

4. $\triangle ABC$中，若$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，则$a:b:c=$________.

5. 在$\triangle ABC$中，$b:c=2:\sqrt{3}$，$\angle B-\angle C=\frac{\pi}{6}$，则$\sin A=$________.

课后作业

1. (2007·烟台模拟)若$\angle A$为$\triangle ABC$的内角，则下列一定为正的是 ( )

A. $\sin A$　　B. $\cos A$

C. $\frac{1}{\tan A}$　　D. $\tan A$

2. 在$\triangle ABC$中，若$b=2a\sin B$，则$\angle A$等于 ( )

A. 30°或60°　　B. 45°或60°

C. 120°或60°　　D. 30°或150°

3. 在$\triangle ABC$中，若$\angle C=90°$，则三边的比$\frac{a+b}{c}$为 ( )

A. $\sqrt{2}\cos\frac{A+B}{2}$　　B. $\sqrt{2}\cos\frac{A-B}{2}$

C. $\sqrt{2}\sin\frac{A+B}{2}$　　D. $\sqrt{2}\sin\frac{A-B}{2}$

4. 有一长为1公里的斜坡，它的倾斜角为20°，现要将倾斜角改为10°，则坡底要伸长 ( )

A. 1公里　　B. sin 10°公里

C. cos 10°公里　　D. cos 20°公里

5. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=30°$，$\angle C=105°$，$b=8$，则a等于 ( )

A.　　B. $\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{5}$

6. 在$\triangle ABC$中，若$b=2$，$\angle B=30°$，$\angle C=135°$，则$a=$________.

7. 在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$\angle C=30°$，则$AC+BC$的最大值是______.

8. 在$\text{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，则$\sin A\cdot\sin B$的最大值是____.

9. 已知三角形的两角分别为45°、60°，它们的夹边长为1，求最小边长.

10. (2007·山东模拟)在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$对应的边分别为a，b，c，$\angle A=2\angle B$，$\cos B=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1)求$\sin C$的值；

(2)若$\angle A$的内角平分线AD的长为2，求b的值.

1.1.2　余弦定理(2课时)

课堂导入

前节学习正弦定理，可以解决三角形中的两类问题：已知两角及一边，求其余边角；已知两边和其中一边的对角，求其余边角.那么在三角形中的其他情况和由三边能否求其余边角？由两边和夹角呢？

第1课时　余弦定理

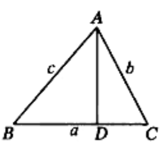
课前预习

自主学习

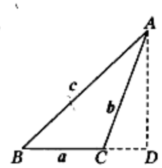
$\triangle ABC$中，已知边a，b及$\angle C$.

1. 若$\angle C=90°$，则$c^2=$________.

2. 若$\angle C$是锐角，如右图，作$AD\perp BC$于D，于是$AD=$________$\cdot\sin C$，$CD=b\cdot$________，$BD=a-$________.



3. 若$\angle C$为钝角，如右图，作$AD\perp BC$，与BC的延长线相交于D，此时$AD=$________$\cdot\sin(\pi-C)=b\cdot$________，$CD=b\cdot\cos$________$=-b\cos C$.



4. 无论$\angle C$是锐角还是钝角，总有$BD=BC+CD=a-$________.

问题发现

课堂笔记

知识点一 余弦定理及推导

情景激疑

(1)直角三角形中的勾股定理能否应用在一般三角形中？

(2)一般三角形三边有何关系？(用向量表示)

知识点归纳

典例剖析

【例1】 在$\triangle ABC$中，$a=1,b=1,\angle C=120°$. 求边c的长.

解析 已知两边及夹角，完全符合余弦定理的形式，可用余弦定理求解.

【变式训练1】 已知在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，最大边和最小边的长是方程$3x^2-27x+32=0$的两实根，求边BC的长.

知识点二 余弦定理的应用

情景激疑

余弦定理可解决哪些三角形问题？

知识点归纳

典例剖析

【例2】 已知$\triangle ABC$的三边长$a=3,b=4,c=\sqrt{37}$，求三角形的最大内角.

【变式训练2】 在$\triangle ABC$中，已知$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，求$\triangle ABC$的最大内角.

【例3】 在$\triangle ABC$中，$\angle A>\angle B>\angle C$，且三边的长为连续的自然数，且$a=2\cdot c\cdot \cos C$，求$\sin A:\sin B:\sin C$的值.

【变式训练3】 已知钝角$\triangle ABC$中，$\angle B>90°$，$a=2x-5$，$b=x+1$，$c=4$，求x的取值范围.

知识点三 利用余弦定理解几何问题

情景激疑

在题中给出的条件应如何应用正、余弦定理进行相互转化？

知识点归纳

典例剖析

【例 4】 在$\triangle ABC$中,已知$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$,且$\sin A=2\sin B\cdot\cos C$,试确定$\triangle ABC$的形状.

解析 首先根据条件$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$,利用余弦定理求出一个角,再利用另一个条件,得到另外两个角的关系即可判断.

【变式训练 4】 已知$\triangle ABC$,$5(b^2+c^2-a^2)=6bc$,求$\dfrac{\sin 2A+2\sin^2 A}{1+\tan A}$的值.

本课小结

课堂训练

1. (2007·山东模拟)已知$\triangle ABC$中,$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$,则$\cos A:\cos B:\cos C$为 ( )
A. 2:3:4　B. $\sqrt{3}:\sqrt{8}:\sqrt{15}$
C. 14:11:(-4)　D. 14:11:4
2. 在$\triangle ABC$中,已知$a=5,b=4,\angle C=120°$.则c为 ( )
A. $\sqrt{41}$　B. $\sqrt{61}$
C. $\sqrt{41}$或$\sqrt{61}$　D. $\sqrt{21}$
3. (2007·山东青岛)在$\triangle ABC$中,已知$\angle A=60°$,最大边长和最小边长恰好是方程$x^2-7x+11=0$的两根,则第三边的长为 ( )
A. 2　B. 3　C. 4　D. 5
4. 已知$\triangle ABC$的三边长分别为$AB=\sqrt{a^2+b^2}$,$AC=\sqrt{a^2+c^2}$,$BC=\sqrt{b^2+c^2}$,其中$a,b,c\in(0,+\infty)$,则$\triangle ABC$是 ( )
A. 钝角三角形　B. 直角三角形
C. 锐角三角形　D. 以上三种情况均有可能

课后作业

1. $\triangle ABC$中,已知$a=5,b=4,\angle C=120°$,则边c为 ( )
A. $\sqrt{41}$　B. $\sqrt{61}$
C. $\sqrt{41}$或$\sqrt{61}$　D. $\sqrt{21}$
2. 已知$\triangle ABC$的三边长分别为$AB=\sqrt{a^2+b^2}$,$AC=\sqrt{a^2+c^2}$,$BC=\sqrt{b^2+c^2}$,其中$a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则$\triangle ABC$是 ( )
A. 钝角三角形　B. 直角三角形
C. 锐角三角形　D. 都有可能
3. 以下关于余弦定理的叙述或变形正确的是 ( )
A. 在$\triangle ABC$中,若$a^2+b^2>c^2$,则$\triangle ABC$必为锐角三角形
B. 在$\triangle ABC$中,必有$a=\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos(B+C)}$成立
C. 在$\triangle ABC$中,$a^2=b^2+c^2+kbc$(k为字母系数)成立的一个充要条件是$|k|\leqslant 2$
D. 在$\triangle ABC$中,$\sin A=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$成立
4. 在$\triangle ABC$中,$BC=3,AB=2$,且$\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{2}{5}(\sqrt{6}+1)$.则$\angle A=$______.
5. $\triangle ABC$中,若$a=5,b=3,\angle C=120°$,则$\sin A$的值为______.
6. 已知锐角三角形的边长分别为1,3,a,则a的范围是______.
7. 在$\triangle ABC$中,已知$a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$,且$S_{\triangle ABC}=\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+3)$,解此三角形.
8. 在$\triangle ABC$中,$\angle A=120°$,$b=3,c=5$.求:
(1)$\sin B\sin C$;
(2)$\sin B+\sin C$.
9. 在$\triangle ABC$中,$\angle A,\angle B,\angle C$所对的边分别为$a,b,c$,且$\cos A=\dfrac{1}{3}$,若$a=\sqrt{3}$,求$bc$的最大值.

第2课时 余弦定理的应用

课前预习

自主学习

1. 在△ABC中，已知边a、b及∠C，由$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$可得$\cos C=$________.
2. 结论"三角形任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍"，称为__________.
3. 根据$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$可知，当$a^2+b^2<c^2$时，△$ABC$是________三角形.
4. 若△ABC是锐角三角形，则a^2+b^2 ________ c^2.

问题发现

课堂笔记

知识点一 利用余弦定理解几何问题

情景激疑

(1)互补的两个角的正余弦值有何关系？
(2)互余的两个角的正余弦值有何关系？

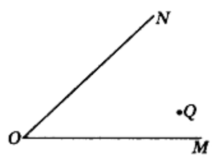
知识点归纳

典例剖析

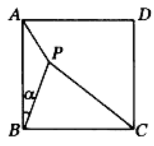
【例1】 在三角形ABC中，若$CB=7$，$AC=8$，$AB=9$，求AB边的中线长.

【变式训练1】 在△ABC中，若$c=4$，$b=7$，BC边上的中线AD长为$\dfrac{7}{2}$，求边长a.

【例2】 如右图，已知∠$MON=60°$，Q是∠MON内一点，它到两边的距离分别是2和11，求OQ的长.



【变式训练2】 如右图，设P是正方形$ABCD$内部的一点，P到顶点A，B，C的距离分别是1，2，3，求正方形的边长.



知识点二 利用定理判断三角形形状

情景激疑

由$\sin A=\sin B$(A、B为△ABC的顶角)，你能得到什么结论？$\sin^2A=\sin^2B$呢？

知识点归纳

典例剖析

【例3】 根据下列条件，判断三角形形状.

(1)在△ABC中，$\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$；

(2)在△ABC中，$\dfrac{\sin A}{\cos B}=2\sin C$；

(3)在△ABC中，∠A+∠C=2∠B，$b^2=ac$.

解析 本题均涉及三角形的边角关系，在这种情况下，经常利用正、余弦定理及其变形来解题.

【变式训练3】 在$\triangle ABC$中,a、b、c分别是$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$的三边长.已知a,b,c满足$b^2=ac$,且$a^2-c^2=ac-bc$,求$\angle A$的大小及$\frac{b\sin B}{c}$的值.

知识点三 正余弦定理与三角形面积关系

情景激疑

如何得出$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$?

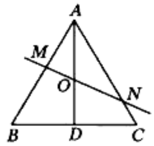
知识点归纳

典例剖析

【例4】 已知圆内接四边形$ABCD$的边长分别为$AB=2$,$BC=6$,$CD=DA=4$,求四边形$ABCD$的面积.

解析 四边形$ABCD$的面积可以转化为$\triangle ABD$与$\triangle BCD$的面积和.

【变式训练4】 如右图所示,在等边三角形ABC中,$AB=a$,O为中心,过O的直线交AB于M,交AC于N,求$\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$的最大值和最小值.



本课小结

课堂训练

1. 在$\triangle ABC$中,$AB=3$,$BC=\sqrt{13}$,$AC=4$,则边AC上的高为 ( )

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

2. 在$\triangle ABC$中,三边a、b、c与面积S的关系式为$S=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$,则角$C$为 ( )

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

3. $\triangle ABC$中,若$a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$,则$\angle C$的度数是 ( )

A. 60° B. 45° C. 135° D. 45°或135°

4. 在$\triangle ABC$中,若$\angle B=30°$,$AB=2\sqrt{3}$,面积$S=\sqrt{3}$,则$AC=$________.

5. AD是$\triangle ABC$的角平分线,已知$AC=2$,$AB=3$,$\angle A=60°$,$AD=$________.

课后作业

1. 在$\triangle ABC$中,$AB=5$,$BC=6$,$AC=8$,则$\triangle ABC$的形状是 ( )

A. 锐角三角形 B. 直角三角形

C. 钝角三角形 D. 非钝角三角形

2. 在$\triangle ABC$中,$a^2-c^2+b^2=ab$,则角C等于 ( )

A. 60° B. 45°或135°

C. 120° D. 30°

3. 在$\triangle ABC$中,$a=1$,$\angle B=45°$,$S_{\triangle ABC}=2$,则$\triangle ABC$外接圆的直径为 ( )

A. $4\sqrt{13}$ B. 60 C. $5\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$

4. $\triangle ABC$中,a,b,c分别为$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$的对边,如果a,b,c成等差数列,$\angle B=30°$,$\triangle ABC$的面积为$\frac{3}{2}$,那么b等于 ( )

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ B. $1+\sqrt{3}$ C. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ D. $2+\sqrt{3}$

5. (2007·山东烟台)在$\triangle ABC$中,已知$a=7$,$b=8$,$\cos C=\frac{13}{14}$,则最大角为________.

6. $\triangle ABC$中,三边的长为连续自然数,且最大角为钝角,这个三角形的三边长分别为________.

7. 锐角三角形ABC中,边a,b为方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两根,$\angle A$,$\angle B$满足$2\sin(A+B)-\sqrt{3}=0$,求角C,边c及$S_{\triangle ABC}$.

8. 在$\triangle ABC$中,a,b,c分别是$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$所对的边,且$8\sin^2\frac{\angle B+\angle C}{2}-2\cos 2A=7$.

(1)求$\angle A$的大小;

(2)若$a=\sqrt{3}$,$b+c=3$,求b和c的值.

1.2　应用举例(2课时)

课堂　导入

2006年10月12日,中国宣布了自己的探月计划:中国将在2007年把"嫦娥一号"绕月卫星送入太空,2012年实现发射软着陆器登陆月球.路透社报道:中国将在2024年把人送上月球.

登陆月球如此困难,除了存在很多科学难题外还因为月球与地球相距很远,有38万公里.很久以前,数学家们就测量计算出了这个距离.你知道他们是如何计算的吗?这就要利用解斜三角形的知识.

第1课时　距离的测量

课前　预习

自主学习

1.在同一铅直平面内,在低处向上观察某物体(视线在水平线之上),视线与水平线的夹角叫做______角;在高处向下观察某物体(视线在水平线之下),视线与水平线的夹角叫做______角.

2.要对于某一正方向而言,该方向与某一正方向所成的水平角,如东偏南30°,叫做______角,方向角的取值范围是______.

3.某船沿方位角为223°的方向航行,则该船航行的方向是南偏西______度,方位角的取值范围是______.

4.坡角指的是坡面与______面的夹角.

5.坡面的铅直高度h和水平宽度l的比叫做坡度(或坡比),设坡角为α,则$\frac{h}{l}=$______.

问题发现

课堂　笔记

知识点一　测量高度

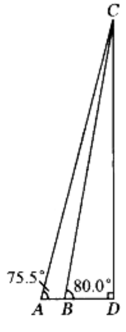
情景激疑

唐代著名诗人王之涣有一首诗:"白日依山尽,黄河入海流;欲穷千里目,更上一层楼".诗中所说的"千里",泛指远处,从数学的角度考虑,要在一幢高楼上看到1 000里外的景物,这幢楼至少要多高?这样的高楼在现实生活中存在吗?

知识点归纳

典例剖析

【例1】　为了测量上海东方明珠塔的高度,某人站在A处测得塔尖的仰角为75.5°,前进38.5 m后,到达B处测得塔尖的仰角为80.0°.试计算东方明珠塔的高度(精确到1 m).



解析　如右图,塔高为CD,只要能计算出BC或AC的长度,就可以计算出塔高,所以应在$\triangle ABC$中,利用正弦定理求BC的长.

【变式训练1】　要测量河对岸的烟囱高,而测量者不能到达它的底部,如何解决?

知识点二　测量距离

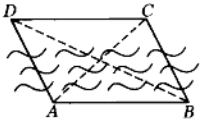
情景激疑

在海里有两座岛屿,如何通过测量仪器在不登陆岛屿的前提下,测出两岛屿的距离?

知识点归纳

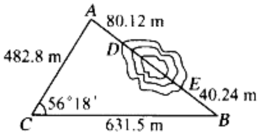
典例剖析

【例2】　如右图,为了测量河对岸两个建筑物C,D之间的距离,在河岸这边选取点A、B,测得$\angle BAC=45°$,$\angle DAC=75°$,$\angle ABD=30°$,$\angle DBC=45°$,又已知$AB=\sqrt{3}$ km,A、B、C、D在同一平面内,试求C,D之间的距离.



解析　欲求 CD,可将 CD 组织在某一三角形中求解,如 $\triangle ACD$($\triangle BCD$ 也可),按确定三角形的条件知,还需求解两个条件——AD、AC. 于是又需解 $AD(AC)$ 所在的 $\triangle ABD$($\triangle ABC$).

【变式训练2】　为了开凿隧道,要测量隧道 D、E 间的距离,为此在山的一侧选取适当的点 C(如右图),测得 $CA=482.8$ m,$CB=631.5$ m,$\angle ACB=56°18'$,又测得 A、B 两点到隧道的距离 $AD=80.12$ m,$BE=40.24$ m(A、D、E、B 在一直线上),计算隧道的长(精确到 0.1 m).



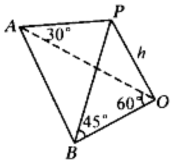
本课小结

课堂训练

1. 某人在山外一点测得山顶的仰角为 42°,然后退后 30 米,测得山顶的仰角为 39°,则山高为($\sin 42°=0.6691$,$\sin 39°=0.6293$,$\sin 3°=0.0523$)　(　　)

A. 180 米　　B. 214 米　　C. 242 米　　D. 266 米

2. 如图,地面上有一根旗杆 OP,为了测得它的高度 h,在地面上取一基线 AB,AB 长 20 米,在 A 处测得 P 点的仰角 $\angle OAP=30°$,在 B 处测得 P 点的仰角 $\angle OBP=45°$,又测得 $\angle AOB=60°$. 则旗杆的高度为　(　　)



A. $20(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ 米　　B. $\dfrac{20}{\sqrt{4-\sqrt{2}}}$ 米

C. $\dfrac{20}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}$ 米　　D. $10(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ 米

3. 有一长为 100 m 的斜坡,它的倾斜角为 45°,现打算把倾斜角改成 30°,则坡底要伸长________ m(精确到1 m).

4. (2007·山东潍坊)某舰艇在 A 处测得遇险渔船在北偏东 45° 距离为 10 n mile 的 C 处,此时得知,该渔船沿北偏东 105° 方向,以每小时 9 n mile 的速度向一小岛靠近,舰艇时速 21 n mile,则舰艇到达渔船的最短时间是________.

课后作业

1. 在某次测量中,在 A 处测得同一方向的 B 点的仰角为 60°,C 点的俯角为 70°,则 $\angle BAC$ 等于　(　　)

A. 10°　　B. 50°　　C. 120°　　D. 130°

2. 有一长为 1 公里的斜坡,它的倾斜角为 20°,现要将倾斜角改成 10°,则斜坡长为　(　　)

A. 1　　B. $2\sin 10°$　　C. $2\cos 10°$　　D. $\cos 20°$

3. 在 200 m 高的山顶上,测得山下一塔顶和塔底的俯角分别是 30°,60°,则塔高为　(　　)

A. $\dfrac{400}{3}$ m　　B. $\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$ m

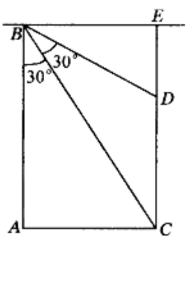
C. $\dfrac{200\sqrt{3}}{3}$ m　　D. $\dfrac{200}{3}$ m

4. 甲、乙两人在同一地平面上的不同方向观测 20 m 高的旗杆,甲观测的仰角为 50°,乙观测的仰角为 40°,用 d_1,d_2 分别表示甲、乙两人离旗杆的距离,那么有　(　　)

A. $d_1>d_2$　　B. $d_1<d_2$

C. $d_1>20$ m　　D. $d_2<20$ m

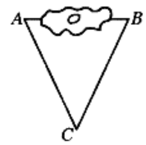
5. 一飞机沿水平方向飞行,在位置 A 处测得正前下方地面目标 C 的俯角为 30°,向前飞行 10 000 m,到达位置 B 时测得 C 的俯角为 75°,求这时飞机与地面目标的距离.



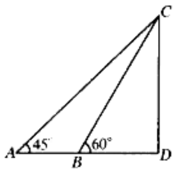
6. 一树干被台风吹断,折断部分与残存树干成 30°角,树干底部与树尖着地处相距 5 米,则树干原来的高度为____________.

7. 甲、乙两楼相距 20 m,从乙楼底望甲楼顶的仰角为 60°,从甲楼顶望乙楼顶的俯角为 30°,则甲、乙两楼的高分别是__________.

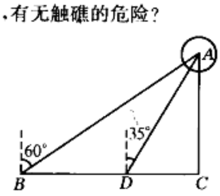
8. 如右图所示,为了测量两点 A,B(这两点间不能通视)间的距离,在地面上选择适当的点 C,测得 $AC=213.4$ m,$BC=252.1$ m,$\angle ACB=50°13'$,则 $AB=$______.



9. 如下图所示,在平地上有一点 A,测得一塔尖 C 的仰角为 45°,向前行进 a m 到 B 处又测得塔尖 C 的仰角为 60°,则塔高是______.



10. (2007·山东潍坊)如图,海中有一小岛 A,它周围 8 海里内有暗礁,渔船跟踪鱼群自西向东航行,在 B 点测得小岛 A 在北偏东 60°,航行 12 海里后到达 D 处,又测得小岛在北偏东 35°,如果渔船不改变航向继续前进,有无触礁的危险?

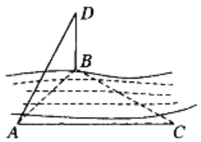


第2课时　角度的测量

课前　预习

自主学习

1. A,B两栋住宅楼相距100 m,若甲站在较低的A楼顶上,想知道B楼有多高,那么他只要测出观察B楼顶的______角和测出观察B楼底的______角,就可以知道B楼的高度了.
2. 如右图,在河岸的一侧AC上,测量河对岸的烟囱BD的高度,选定AC为基线,且假设A、B、C在同一水平面上,则只要测量出∠______,∠______,∠______即可.



问题发现

课堂　笔记

知识点一　角度的测量

情景激疑

在海上航行时人们常用方向角来判断两艘船的相对位置,有时也采用方位角,在有高度差时,还用仰角及俯角确定位置,那么我们应该如何理解及应用这些角的概念呢?

知识点归纳

典例剖析

【例1】 甲船在A处观察到乙船在它的北偏东60°方向的B处,两船相距a n mile,乙船向正北方向行驶.若甲船的速度是乙船速度的$\sqrt{3}$倍,问甲船应取什么方向前进才能尽快追上乙船?相遇时乙船已行驶多少海里?

【变式训练1】 沿一条小路前进,从A到B,方位角(从正北方向顺时针转到AB方向所成的角)是50°,距离是470 m,从B到C,方位角是80°,距离是860 m,从C到D,方位角是150°,距离是640 m.

计算出从A到D的方位角和距离.

知识点二　正余弦定理在物理中的应用

情景激疑

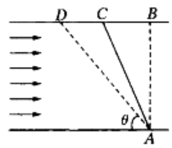
在物理的追及问题及力的分解中,我们也常常可以采用正、余弦定理来解决相关问题.

知识点归纳

典例剖析

【例2】 一条河的两岸平行,河宽为d m,一船从A出发航行到河的对岸,船行速度大小为$|v_1|$,水流速度大小为$|v_2|$,且$|v_1|>|v_2|$,那么$|v_1|$与$|v_2|$的夹角θ多大时船才能垂直到达河岸B处?船航行多少时间(只求出$\sin\theta$即可)?

【变式训练2】 如图所示,设一条河宽800 m,河水流速为4 km/h,A、B两镇隔河相望,C镇位于B镇上游600 m处,某人乘小艇想从A镇去C镇,若小艇的最快航速为10 km/h,则他要在最短时间内到达C镇,应按什么路线航行?并求出最短时间.



本课小结

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

课堂训练

1. 三角形的三边之比为3∶5∶7，则其最大角为　(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{2}{3}\pi$　　C. $\frac{3}{4}\pi$　　D. $\frac{5}{6}\pi$

2. 在不等边$\triangle ABC$中，a为最大边，如果$a^2<b^2+c^2$，则$\angle A$的取值范围是　(　　)

A. $90°<\angle A<180°$　　B. $45°<\angle A<90°$

C. $60°<\angle A<90°$　　D. $0°<\angle A<90°$

3. 在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{15}$，$\angle A=30°$，则c等于　(　　)

A. $2\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{5}$或$\sqrt{5}$　　D. 以上都不对

4. 已知$\triangle ABC$中，$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$，$b\cdot\cos B-c\cdot\cos C=0$，则$\triangle ABC$为　(　　)

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等边三角形

5. 已知$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，且$\angle B=30°$，则$\triangle ABC$的面积等于　(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知两座灯塔A和B与海洋观察站C的距离都等于a km，灯塔A在观察站C的北偏东20°，灯塔B在观察站C的南偏东40°，则灯塔A与灯塔B的距离为　(　　)

A. a km　　B. $\sqrt{3}a$ km

C. $\sqrt{2}a$ km　　D. $2a$ km

课后作业

1. 一货轮航行到M处，测得灯塔S在货轮的北偏东15°，与灯塔S相距20海里，随后货轮按北偏西30°的方向航行30分钟后，又测得灯塔在货轮的东北方向，则货轮的速度为　(　　)

A. $20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$海里/小时　　B. $20(\sqrt{6}-\sqrt{2})$海里/小时

C. $20(\sqrt{6}+\sqrt{3})$海里/小时　　D. $20(\sqrt{6}-\sqrt{3})$海里/小时

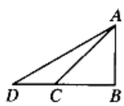
2. (2007·山东青岛)如下图所示，D,C,B在地平面同一直线上，$DC=10$ m，从D,C两地测得A点的仰角分别为30°和45°，则A点离地面的高AB等于　(　　)

A. 10 m

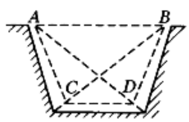
B. $5\sqrt{3}$ m

C. $5(\sqrt{3}-1)$m

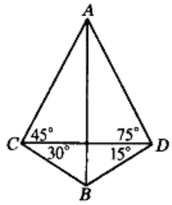
D. $5(\sqrt{3}+1)$m



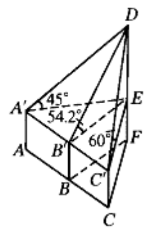
3. 如右图所示，在两山之间修建水坝时，需要测出坝顶A、B之间的距离，选与A、B在同一平面上的C、D两点，测得$\angle ACD=119°10'$，$\angle CDA=28°5'$，$\angle BCD=30°48'$，$\angle BDC=112°11'$，$CD=70.12$ m，试求AB.



4. 我炮兵阵地位于地面A处，两观察所分别位于地面C和D处，已知$DC=6\,000$米，$\angle ACD=45°$，$\angle ADC=75°$，目标出现于地面点B处时，测得$\angle BCD=30°$，$\angle BDC=15°$(如下图所示)，求炮兵阵地到目标的距离(结果保留根号).



5. 如下图，为测量建造中的上海明珠电视塔已到达的高度，李明在学校操场的某一直线上选择A、B、C三点，$AB=BC=60$米，且在A,B,C三点观察塔的最高点，测得仰角分别为45°，54.2°，60°. 已知李明身高1.5米，试问建造中的电视塔已到的高度是多少？(保留一位小数)



6. 一艘船以32.2 n mile/h的速度向正北航行，在A处看到灯塔在船的北偏东20°方向，向北航行0.5小时后，灯塔在船的北偏东65°的方向. 已知距离灯塔6.5 n mile以外的海区为航行安全区域，这艘船可以继续沿正北方向航行吗？

7. 在山脚A测得山顶P的仰角为α，沿倾斜角为β的斜坡向上走a米到B，在B处测得山顶P的仰角为γ，求证：

山高$h=\frac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.