YINGYONG SHUXUE

应用数学

（第二册）

主编 刘 青 张富勤 李开友

西南交通大學出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

应 用 数 学

（第二册）

主编　刘　青　张富勤　李开友

主审　裴　俊　杨武松

编写者　（按姓氏笔画为序）

王太英　李开友　刘　青

吕祥凤　张富勤　周洪萍

黄　恂

西南交通大学出版社

·成都·

内容简介

本教材根据应用型人才对数学知识的实际要求，坚持“以应用为目的，以够用和必需为度”，力求做到“打好基础，突出应用，强化能力”．本书分为第一册、第二册出版．第二册内容有：微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分与曲线积分、级数模块．

本教材可供高职高专院校、成人业余大学、成人函授大学、五年制大专学生使用，也可供普通专科学校的学生使用．

图书在版编目（CIP）数据

应用数学．第2册／刘青，张富勤，李开友主编．一成都：西南交通大学出版社，2009.1

ISBN 978-7-5643-0137-8

Ⅰ．应…　Ⅱ．①刘…②张…③李…　Ⅲ．应用数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．029

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第209319号

应用数学
（第二册）

主编　刘　青　张富勤　李开友

*

责任编辑　张宝华
封面设计　翼虎书装
西南交通大学出版社出版发行
（成都二环路北一段111号　邮政编码：610031　发行部电话：028-87600564）
http://press.swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：185 mm×260 mm　印张：12.875
字数：320千字　印数：1—3 000册
2009年1月第1版　2009年1月第1次印刷
ISBN 978-7-5643-0137-8
定价：21.50元

前　　言

应用数学课程是按照教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》、《高职高专教育专业人才培养目标及规格》以及高等职业教育工科类专业的特点和实际需要而精心编写的.

本教材十分重视技术应用型人才对数学知识的实际要求，突出数学知识的基础性地位和工具性作用，坚持“以应用为目的，以够用和必需为度”，力求做到“打好基础，突出应用，强化能力”. 编者们根据教学改革的实际情况，为适应高职数学教学的需要，结合多年的教学经验、参阅了大量的国内外相关丛书及团队在数年来对《应用数学》精品课程的研究与改革成果而写成的.

在教材的编写中遵循了强化数学概念、注重实际应用、培养实践能力的原则，突出了数学工具的作用，淡化了数学理论的推导，降低了理论难度，不过分追求复杂的运算和变换. 对欲讨论的问题，大多通过生活中的实例引入，以展示数学应用的广泛性，使读者初步了解建立数学模型的方法. 对数学概念注意根据问题的实际背景来引入，注意了学生的综合数学素质和应用能力的培养.

本教材强调了数学与计算机应用的结合，书中的数学实验简要介绍了“mathematica 软件”以及教材编写组研制的“数学运算可视化系统”的使用方法. 教师应安排适当时间组织实验教学，将有利于学生掌握用计算机来进行数学的运算、绘图等问题.

本教材注意了与高中阶段数学教学内容的衔接，教材还在附录中给出了“初等数学课程运算中的常用公式和重要结论”，以便于读者查阅. 针对高等职业教育的实际情况，本教材对传统高等数学内容进行了整合，削枝强干.

本教材由刘青、张富勤、李开友主编. 参加本教材编写的人员与任务是：刘青副教授负责全书的统稿和绘图；张富勤副教授负责各模块的小结、自检题、阅读材料的编写；李开友副教授负责第四模块和数学实验的编写；吕祥凤副教授负责第五模块的编写；周洪萍副教授负责第六模块的编写；黄恂高级讲师负责第七模块的编写；王太英副教授负责第八模块的编写. 本教材由裴俊副教授、杨武松副教授主审.

由于编者水平有限和时间仓促，错误之处在所难免，恳请使用本教材的广大师生批评指正，以便修订提高.

编　者

2008 年 10 月

目　　录

第四模块　微分方程

微积分研究的对象是函数关系，函数关系是客观事物的内部联系在数量方面的反映，利用函数关系可以对客观事物的规律性进行研究，因此函数关系在实践中具有重要意义. 但在物体的冷却、人口的增长、琴弦的振动、电磁波的传播等许多实际问题中，往往很难直接找到所需的函数关系，然而却比较容易建立起所需函数及其导数或微分的方程，即微分方程. 因此，微分方程是数学联系实际，并应用于实际的重要途径和桥梁，是各个学科进行科学研究的强有力工具. 本模块主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用解法.

第一节　微分方程的基本概念

在物理学、力学、经济管理学等领域中，函数关系有时需要用未知函数及其导数（或微分）与自变量的关系的等式来体现. 例如，$y'=3x+1$，$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-20)$，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=g$，$\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\frac{\mathrm{d}t}{m}$ 等，像这样的方程就是现在要介绍的微分方程.

一、微分方程的概念

定义 4.1　凡含有未知函数的导数（或微分）的方程，称为**微分方程**.

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数（或微分）的阶数，称为**微分方程的阶**.

未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**，未知函数是多元函数的微分方程称为**偏微分方程**. 本书仅讨论常微分方程，并简称为微分方程.

下列方程都是微分方程：

(1) $y'=5x+2$；　(2) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-x^2y=\sin x$；

(3) $(y+2xy)\mathrm{d}x-x^3\mathrm{d}y=0$；　(4) $m\cdot v'(t)=mg-k\cdot v(t)$；

(5) $y''-2y'+y=0$；　(6) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin y=0$（$g$，$l$ 为常数）.

其中，方程 (1)～(4) 为一阶微分方程，方程 (5)～(6) 为二阶微分方程.

一般地，n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0.$$

其中 x 为自变量；$y=y(x)$是未知函数；$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \cdots,\ y^{(n)})$是已知函数，且方程中一定含有 $y^{(n)}$.

二、微分方程的解

定义 4.2　任何代入微分方程后，使其成为恒等式的函数，都叫做微分方程的**解**. 若微

分方程的解中含有的任意常数的个数与方程的阶数相同，且任意常数之间相互独立，则称此解为微分方程的**通解**（或一般解）．通解中的各任意常数都取特定值时得到的解，称为微分方程的**特解**.

注：这里所说的相互独立的任意常数，是指它们不能通过合并而使得通解中的任意常数的个数减少.

许多实际问题都要求寻找满足某些附加条件的解，此时，这类附加条件就能确定通解中的任意常数．这类附加条件称为**初始条件**，也称为**定解条件**.

带有初始条件的微分方程称为**微分方程的初值问题**.

通常一阶微分方程的初始条件是 $y|_{x=x_0}=y_0$．二阶微分方程的初始条件是 $y|_{x=x_0}=y_0$ 与 $y'|_{x=x_0}=y'_0$.

例如，方程 $y'=2x$ 的解 $y=x^2+C$（见图 4—1）中含有一个任意常数，且与该方程的阶数相同，因此，这个解就是方程的通解．如果求满足条件 $y(0)=0$ 的解，则将 $y(0)=0$ 代入通解中，得 $C=0$．那么 $y=x^2$ 就是方程 $y'=2x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

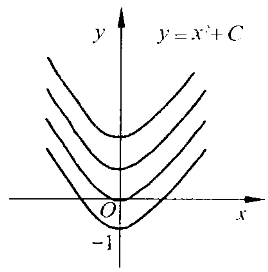

图 4—1

例 1 验证方程 $3y-xy'=0$ 的通解为

$$y=Cx^3 \quad (C\text{ 为任意常数}),$$

并求满足初始条件 $y|_{x=1}=\dfrac{1}{3}$ 的特解.

解 由 $y=Cx^3$ 得

$$y'=3Cx^2.$$

将 y 及 y' 代入方程 $3y-xy'=0$ 的左边，有

$$\text{左边}=3Cx^3-3Cx^3=0.$$

从而函数 $y=Cx^3$ 满足原方程．又因为该函数含有一个任意常数，所以 $y=Cx^3$ 是一阶微分方程 $3y-xy'=0$ 的通解.

将初始条件 $y|_{x=1}=\dfrac{1}{3}$ 代入通解，得 $C=\dfrac{1}{3}$，故所求特解为 $y=\dfrac{1}{3}x^3$.

例 2 验证函数 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$（C_1，C_2 为任意常数）为二阶微分方程

$$y''-3y'+2y=0$$

的通解，并求该方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 的特解.

解 由 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 得

$$y'=C_1e^x+2C_2e^{2x},$$
$$y''=C_1e^x+4C_2e^{2x}.$$

将 y、y'、y'' 代入方程 $y''-3y'+2y=0$ 的左边，其结果为0．所以函数 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 是所给微分方程的解．又因为这个解中有两个独立的任意常数，与方程的阶数相同，所以它是所给微分方程的通解.

由初始条件 $y(0)=0$ 得

$$C_1+C_2=0.$$

由初始条件 $y'(0)=1$ 得

$$C_1+2C_2=1.$$

所以 $C_1=-1$，$C_2=1$．于是满足所给初始条件的特解为 $y=-e^x+e^{2x}$.

例 3　设一物体从 A 点出发作直线运动，在任意时刻的速度大小为运动时间的 4 倍．求物体的运动方程.

解　建立坐标系：取 A 点为坐标原点，物体运动方向为坐标轴的正方向（见图 4－2）．设物体在时刻 t 到达 M 点，其坐标为 $s(t)$．显然，$s(t)$ 是时间 t 的函数，它表示物体的运动规律，是本题中待求的未知函数．$s(t)$ 的导数 $s'(t)$ 就是物体运动的速度 $v(t)$．由题意知

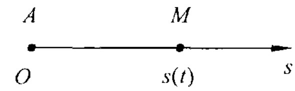

图　4－2

$$v(t)=4t, \tag{1}$$

以及

$$s(0)=0. \tag{2}$$

因为 $v(t)=s'(t)$，因此求物体的运动方程便化成了求解初值问题：

$$\begin{cases} s'(t)=4t, \\ s\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

积分后得通解

$$s(t)=2t^2+C.$$

再将初始条件（2）代入通解中，得 $C=0$．故初值问题的解为

$$s(t)=2t^2,$$

即本题所求的物体运动方程.

例 4　已知曲线上任意一点 $P(x,y)$ 处切线斜率（$x\neq0$）与切点的横坐标的平方互为倒数，且曲线通过点（1，3），求该曲线的方程.

解　根据导数的几何意义及本题所给出的条件，有

$$y'=\frac{1}{x^2},$$

两边积分得

$$y=-\frac{1}{x}+C.$$

又由已知曲线过点（1，3），代入上式，解得 $C=4$．故所求此曲线的方程为

$$y=-\frac{1}{x}+4.$$

三、通解和特解的几何意义

一般地，微分方程的每一个解都是一个一元函数，其图形是一条平面曲线．我们称它为微分方程的**积分曲线**．通解是含有任意常数为参数的函数，其图形是平面上的一族曲线（见图 4－3），称为**积分曲线族**．特解的图形是积分曲线族中一条确定的曲线．这就是微分方程的通解和特解的**几何意义**.

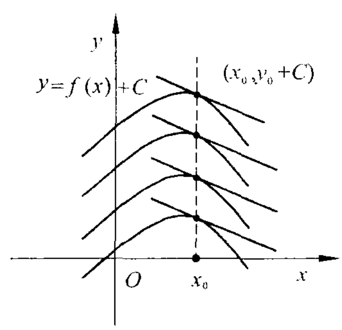

图　4－3

习　题　4—1

1. 指出下列微分方程的阶数.

(1) $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$；　　(2) $x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 5xy = 0$；

(3) $\cos(y'') + \ln y = x + 1$.

2. 验证函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 是微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ 的解，并求满足初始条件 $x|_{t=0} = 2$，$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$ 的特解.

3. 验证函数 $y = (x^2 + C)\sin x$（C 为任意常数）是方程 $\frac{dy}{dx} - y\cot x - 2x\sin x = 0$ 的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$ 的特解.

4. 设一物体的温度为 100℃，将其放置在空气温度为 20℃的环境中冷却. 物体温度的变化率与物体和当时空气温度之差成正比 $\left(\frac{dT}{dt} = -k(T - 20)\right)$（$k>0$），求物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T = T(t)$.

第二节　一阶微分方程

微分方程的类型是多种多样的，它们的解法也各不相同. 从本节开始我们讨论部分简单的微分方程的求解，并根据微分方程的不同类型，给出相应的解法.

一般地，一阶微分方程的形式为

$$F(x, y, y') = 0.$$

下面介绍两种常用的一阶微分方程的解法.

一、可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

的微分方程，称为**可分离变量方程**. 这里 $f(x)$、$g(y)$ 分别是变量 x、y 的已知连续函数，且 $g(y) \neq 0$. 根据这种方程的特点，我们可通过两边积分的方法来求解. 求解可分离变量方程的方法称为**分离变量法**. 具体解法如下：

(1) **分离变量**　将方程整理为

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

的形式，使方程两边都只含有一个变量.

(2) **两边积分**

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx.$$

(3) **计算上述不定积分得通解**

我们约定在微分方程这一章中，不定积分式表示被积函数的一个原函数，而把积分所带来的任意常数明确的写上.

例 5　求微分方程 $y' = \cos x\sqrt{1-y^2}$ 的通解.

解　分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \cos x\mathrm{d}x .$$

两边积分得
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \int\cos x\mathrm{d}x .$$

求积分得
$$\arcsin y = \sin x + C,$$

即为所求方程的通解.

例 6　求 $y' + xy = 0$ 的通解.

解　方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -xy .$$

分离变量得
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -x\mathrm{d}x .$$

两边积分得
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int x\mathrm{d}x .$$

求积分得
$$\ln|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 .$$

所以
$$|y| = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2+C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2},$$

即
$$y = \pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\quad (C = \pm\mathrm{e}^{C_1}) .$$

故方程通解为

$$y = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\quad (C\text{ 为任意常数}) .$$

注：以后为了方便起见，任意常数部分常用 C 的一个表达式来代替. 此外遇到积分后是对数情形，其真数部分都可不加绝对值来简化处理.

例 7　求方程 $\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = y^2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ 满足初始条件 $y(0) = 3$ 的特解.

解　将方程整理为

$$y(x-1)\mathrm{d}y = (y^2-1)\mathrm{d}x .$$

分离变量得
$$\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x-1} .$$

两边积分得
$$\int\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = \int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x .$$

求积分得
$$\frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln C .$$

化简得
$$y^2 - 1 = C(x-1)^2 .$$

方程的通解为

$$y^2 = C(x-1)^2 + 1 .$$

将初始条件 $y(0) = 3$ 代入，得 $C=8$. 故所求特解为

$$y^2 = 8(x-1)^2 + 1.$$

二、一阶线性微分方程

形如

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{3}$$

的方程称为**一阶线性微分方程**，简称**一阶线性方程**. 其中 $P(x)$、$Q(x)$都是已知连续函数.

一阶线性微分方程的特点是：右边是已知函数，左边的每项中仅含 y 或 y'，且均为 y 或 y' 的一次项.

若 $Q(x) \equiv 0$，则方程（3）成为

$$y' + P(x)y = 0. \tag{4}$$

方程（4）称为**一阶线性齐次微分方程**，简称**线性齐次方程.**

若 $Q(x) \neq 0$，方程（3）称为**一阶线性非齐次微分方程**，简称**线性非齐次方程**. 通常将方程（4）称为方程（3）所对应的线性齐次方程.

1. 一阶线性齐次方程 $y' + P(x)y = 0$ 的解法

由
$$y' + P(x)y = 0$$
变形得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -P(x)y.$$
分离变量得
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x.$$
两边积分得
$$\ln y = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln C.$$
于是可得通解公式

$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \quad (C\text{ 为任意常数}).$$

例 8　求方程 $y' + x^2 y = 0$ 的通解.

解　所给方程是一阶线性齐次方程，且 $P(x) = x^2$，则

$$-\int P(x)\mathrm{d}x = -\int x^2\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x^3.$$

由通解公式可得到方程的通解为

$$y = Ce^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

例 9　求方程 $(y - 2xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 2e$ 的特解.

解　将方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1-2x}{x^2}y = 0.$$

这是一个线性齐次方程，且 $P(x) = \dfrac{1-2x}{x^2}$，则

$$-\int P(x)\mathrm{d}x = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \ln x^2 + \frac{1}{x}.$$

由通解公式得该方程的通解

$$y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

将初始条件 $y|_{x=1}=2\mathrm{e}$ 代入通解，得 $C=2$．故所求特解为

$$y = 2x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

2. 一阶线性非齐次方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解法

由于非齐次方程的左边与齐次方程相同，故可以设

$$y = C(x)y_1$$

是非齐次方程的解，其中 $y_1=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是齐次方程 $y'+P(x)y=0$ 的解.

将 $y=C(x)y_1$ 及其导数 $y'=C'(x)y_1+C(x)y_1'$ 代入方程

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

得

$$C'(x)y_1+C(x)y_1'+P(x)C(x)y_1=Q(x).$$

从而

$$C'(x)y_1+C(x)(y_1'+P(x)y_1)=Q(x).$$

又因 y_1 是对应的线性齐次方程的解，故

$$y_1'+P(x)y_1=0.$$

因此

$$C'(x)y_1=Q(x).$$

其中 y_1 与 $Q(x)$ 均为已知函数，通过积分可以求得

$$C(x)=\int\frac{Q(x)}{y_1}\mathrm{d}x+C.$$

将 $C(x)$ 代入 $y=C(x)y_1$ 中，得

$$y=Cy_1+y_1\int\frac{Q(x)}{y_1}\mathrm{d}x.$$

容易验证，上式给出的函数满足线性非齐次方程 $y'+P(x)y=Q(x)$，且含有一个任意常数，所以它是一阶线性非齐次方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解.

在运算过程中，通常取线性齐次方程的一个解为

$$y_1=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

于是，一阶线性非齐次方程的**通解公式**可写成

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right). \tag{5}$$

上述讨论中所用的方法，是将常数 C 变为待定函数 $C(x)$，再通过确定 $C(x)$ 而求得方程解的方法，称为**常数变易法**.

例 10　求方程 $y'+\dfrac{y}{x}-\sin x=0$ 的通解.

解（使用常数变易法求解）　将原方程变形为

$$y'+\frac{y}{x}=\sin x.$$

这是一个线性非齐次方程，它所对应的线性齐次方程为

$$y'+\frac{1}{x}y=0.$$

其通解为

$$y=\frac{C}{x}.$$

设所给线性非齐次方程的解为 $y=\dfrac{C(x)}{x}$，代入原方程得

$$C'(x)=x\sin x.$$

于是

$$C(x)=\int x\sin x\mathrm{d}x=C+\sin x-x\cos x.$$

所以原方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}(\sin x+C)-\cos x.$$

例 11　求解初值问题：

$$\begin{cases}y'=\dfrac{y+x\ln x}{x},\\ y(1)=3.\end{cases}$$

解　将所给的方程改写成

$$y'-\frac{1}{x}y=\ln x.$$

这里 $P(x)=-\dfrac{1}{x}$，　$Q(x)=\ln x$. 则

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(C+\int\ln x\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\\&=\mathrm{e}^{\ln x}\left(C+\int\ln x\mathrm{e}^{-\ln x}\mathrm{d}x\right)=x\left(C+\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\right)\\&=x\left(C+\frac{1}{2}\ln^2x\right)=Cx+\frac{x\ln^2x}{2}.\end{aligned}$$

将初始条件 $y(1)=3$ 代入，得 $C=3$. 所以所求的初值问题的解为

$$y=3x+\frac{x}{2}(\ln x)^2.$$

3. 关于未知函数为 $x=x(y)$ 的一阶线性微分方程 $x'+P(y)x=Q(y)$ 的解法

在微分方程中，两个变量中哪个是自变量，哪个是函数并不是确定不变的，有时可以把变量 y 看做自变量，把变量 x 看做函数. 如果一个微分方程中的变量 x 及导数 x' 都是一次项，则该方程可化为关于 x 的一阶线性微分方程

$$x'+P(y)x=Q(y).$$

类似于关于 y 的一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的求解公式，可得方程

$$x'+P(y)x=Q(y)$$

的通解公式为

$$x=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(C+\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right).\tag{6}$$

例 12　求方程 $y^2\mathrm{d}x+(x-2xy-y^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解　将原方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1-2y}{y^2}x=1.$$

这是一个关于未知函数 $x=x(y)$ 的一阶线性非齐次方程. 其中 $P(y)=\dfrac{1-2y}{y^2}$，　$Q(y)=1$.

代入一阶线性非齐次方程的通解公式，有

$$x = e^{-\int P(y)dy}\left(C+\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy\right) = e^{-\int\frac{1-2y}{y^2}dy}\left(C+\int e^{\frac{1-2y}{y^2}dy}dy\right)$$

$$= y^2 e^{\frac{1}{y}}(C+e^{-\frac{1}{y}}) = y^2(1+Ce^{\frac{1}{y}}).$$

则所求微分方程的通解为

$$x = y^2(1+Ce^{\frac{1}{y}}).$$

习　题　4—2

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y' = -\dfrac{y}{x}$；　(2) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$；

(3) $(1+e^x)yy' = e^x$；　(4) $\dfrac{dy}{dx} + \cos\dfrac{x-y}{2} = \cos\dfrac{x+y}{2}$；

(5) $\dfrac{dy}{dx} = -y(y-2)$.

2. 求下列微分方程的通解.

(1) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$；　(2) $xy' + y = x^2 + 3x + 2$.

3. 求微分方程 $xy' + y = xe^x$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的特解.

4. 求方程 $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\sin x}{x}$，$y(\pi) = 1$ 的特解.

5. 求解初值问题 $\begin{cases} xy' + y = \cos x, \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$

第三节　二阶常系数线性微分方程

求解二阶微分方程时，情况比较复杂，本节讨论二阶线性方程的一些特殊类型. 通过本节的学习可以看到，二阶线性微分方程的求解问题，关键在于如何求得二阶齐次方程的通解和非齐次方程的一个特解.

一、二阶常系数线性微分方程解的性质

定义 4.3　设函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是定义在某区间 I 上的两个函数，如果存在两个不全为 0 的常数 k_1 和 k_2，使

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) = 0$$

在区间 I 上恒成立，则称函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在区间 I 上**线性相关**；否则，称为**线性无关**.

考察两个函数是否线性相关，往往采用另一种简单易行的方法，即看它们的比是否为常数.

事实上，当 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性相关时，有

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) = 0.$$

其中 k_1、k_2 不全为 0. 不失一般性，设 $k_1\neq0$，则

$$\frac{y_1}{y_2}=-\frac{k_2}{k_1},$$

即 y_1 与 y_2 之比为常数. 反之，若 y_1 与 y_2 之比为常数，可设为 $\frac{y_1}{y_2}=\lambda$，则

$$y_1=\lambda y_2,$$

即

$$y_1-\lambda y_2=0.$$

所以 y_1 与 y_2 线性相关. 因此，如果两个函数的比是常数，则它们线性相关；如果不是常数，则它们线性无关.

例如，函数 $y_1=e^{2x}$，$y_2=e^{-x}$，而 $\frac{y_1}{y_2}$ 不为常数，所以它们是线性无关的. 而 $y_1=3x$，$y_2=5x$，由于 $\frac{y_1}{y_2}=\frac{3}{5}$，所以，它们是线性相关的.

定义 4.4　形如

$$y''+py'+qy=0 \tag{7}$$

的方程（其中 p、q 为常数），称为**二阶常系数线性齐次微分方程**，简称为**二阶线性齐次方程.**

定理 4.1（线性齐次方程解的叠加原理）　若函数 y_1，y_2 是线性齐次方程（7）的两个解，则函数

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

也是（7）的解，且当 y_1 与 y_2 线性无关时，$y=C_1y_1+C_2y_2$ 就是方程（7）的通解.

证明　将 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 直接代入方程

$$y''+py'+qy=0$$

的左端，得

$$\begin{aligned}&(C_1y_1''+C_2y_2'')+p(C_1y_1'+C_2y_2')+q(C_1y_1+C_2y_2)\\&=C_1(y_1''+py_1'+qy_1)+C_2(y_2''+py_2'+qy_2)=C_1\cdot0+C_2\cdot0=0,\end{aligned}$$

所以 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是方程 $y''+py'+qy=0$ 的解.

由于 y_1 与 y_2 线性无关，所以 C_1 和 C_2 是两个独立的任意常数，即 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 中所含独立的任意常数的个数与方程（7）的阶数相同，则它是方程（7）的通解.

定义 4.5　形如

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{8}$$

的方程（其中 p、q 为常数，$f(x)\neq0$），称为**二阶常系数线性非齐次微分方程**，简称为**二阶线性非齐次方程**，其中 $f(x)$ 称为微分方程（8）的**自由项.**

定理 4.2（线性非齐次方程解的结构）　若函数 y^* 为线性非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的某个特解，Y 为对应的齐次线性方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，则

$$y=y^*+Y \tag{9}$$

为线性非齐次方程的通解.

证明　将 $y=y^*+Y$ 代入方程（8）的左端，有

$$\begin{aligned}&(y^*+Y)''+p(y^*+Y)'+q(y^*+Y)\\&=(y^{*''}+py^{*'}+qy^*)+(Y''+pY'+qY)=f(x)+0=f(x),\end{aligned}$$

这就是说 $y=y^*+Y$ 确为方程（8）的解.