谢明文 ● 编著

普通高等经济类院校系列教材

概率统计简明教程

GAILü TONGJI JIANMING JIAOCHENG

西南财经大学出版社

普通高等经济类院校系列教材

概率统计简明教程

GAILü TONGJI JIANMING JIAOCHENG

谢明文 ● 编著

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率统计简明教程/谢明文编著．—成都：西南财经大学出版社，2009.3

ISBN 978-7-81138-182-5

Ⅰ．概… Ⅱ．谢… Ⅲ．①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第198796号

概率统计简明教程

谢明文 编著

责任编辑：李雪
封面设计：杨红鹰
责任印制：封俊川

出版发行：	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址：	http://www.xcpress.net
电子邮件：	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码：	610074
电　　话：	028-87353785　87352368
印　　刷：	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸：	170mm×240mm
印　　张：	9.75
字　　数：	190千字
版　　次：	2009年3月第1版
印　　次：	2009年3月第1次印刷
印　　数：	1—3000册
书　　号：	ISBN 978-7-81138-182-5
定　　价：	17.80元

前　言

为了适应我国高等学校的新形势，作者根据教育部颁布的《经济数学》大纲的最新要求，编写了一套经济数学系列教材．这套教材共分《微积分学简明教程》、《线性代数简明教程》和《概率统计简明教程》三个分册，本书是第三分册．

鉴于读者的实际水平和财经专业的实际需要，作者在编写这套教材时，自始至终贯彻了把《大纲》要求与学生实际相结合，把抽象概念与直观描述相结合的基本意图．

由于概率统计的思维形式与其它数学学科的差异较大，其因果关系也不像其它数学学科那样显而易见，而是需要根据其具体的概率涵义来作结论，所以部分初学者感到比较困难．鉴于感到困难的根本原因，就在于基本概念不清、基本理念薄弱，故此作者在编写本分册时，总是力求突出以下几个特点：

(1) 突出对学生进行基本概念、基本理论和基本方法的灌输，旨在培养学生具备概率统计的基本理念，善于把文字语言转化为概率语言的能力．

(2) 突出对学生进行思维形式和基本功底的训练，旨在培养学生能够按照概率统计的基本理念，去独立处理一些具体问题的实际能力．

(3) 突出对学生进行综合能力的培养，旨在提高学生的自学能力、分析能力和决断能力．

(4) 本书摒弃了按章配备习题的传统思想，采取了按节配备习题、书末备有答案的方法，以供学生使用．

总之，本书在写作过程中，既继承了传统理念的精华，又注入了作者多年的教学经验和学术思想；力图达到表面通俗易懂、实际境界可人的效果．

为了方便教学，笔者建议："三本"学生，可以选用没有 * 号的内容，估计需要 48 学时；"二本"学生，可以选用没有 * 号的内容和部分或全部带有 * 号的内容，估计最多需要 64 学时；跳过 * 号内容，亦不影响本书体系．

在本书初稿完成以后，涪陵师范学院前数学系主任、校长简大权先生审阅了全书，并提出了一些建设性意见，笔者在此深致谢意．

由于时间仓促、水平有限，缺点错误，在所难免，所以敬请同仁、读者，不吝赐教，笔者必将感激至诚．

谢明文①

2007 年 1 月　于成都．

---

① 联系方式：(1) 电子邮件：xiemw@swufe.edu.cn；(2) 电话交流：(028)87354242

目录

第一章　随机事件及其概率

人们在实践活动中，经常会遇到各种不同的现象. 在这些现象中，有些在一定条件下只有一种可能结果，在条件实现以前，就知道它必然会发生(例如，上抛一石，必然下落；异性电荷，必然相吸等)，或者必然不发生(例如，公鸡下蛋，日出西方等)，我们称之为确定性现象或必然现象. 有些在一定条件下具有多种可能结果，在条件实现以前，任何一种结果都可能发生、也可能不发生(例如，上抛硬币，"正面朝上"；抛掷骰子，"5 点出现"等)，我们称之为随机现象或偶然现象.

从表面看来，随机现象难以捉摸. 但是，科学与实践均已证明：在相同的条件下，只要进行大量地重复观测或试验，任何随机现象的任何一种可能结果的出现，都会呈现出一定的统计规律性.

概率论与数理统计就是研究大量随机现象的统计规律性的一门数学学科. 它不仅是近代数学的重要组成部分，而且也是研究经济问题的有力工具.

本章的宗旨，就是要介绍概率论的基本概念，研究在特殊场合下的某个或某些可能结果出现的概率大小的计算方法.

§1.1　随机事件与样本空间

为了研究随机现象的统计规律性，就必须建立一套有利于研究的基本概念，为使用高等数学的手段来研究随机现象创造条件.

一、随机试验与随机事件

为了研究随机现象的统计规律性，通常都需要对我们所关心的、具有某一(或某些)特征的现象进行观察或实验. 在概率论中，人们把对现象的某一(或某些)特征所进行的观测或实验，统称为**试验**. 若一个试验满足：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但能事先知道试验的所有可能结果；

(3) 在试验之前，无法预知哪一个结果会出现；

则称该试验为随机试验，也简称**试验**，并记为 E.

今后，凡说"试验"，均指这种"随机试验".

在概率论中，我们把根据试验目的和要求所确定的一次试验的、最基本的可能结果，称为该试验的**基本事件**，并记为 $\omega_i (i = 1,2,\cdots)$；而把基本事件的集合，称为**随机事件**，简称**事件**，并用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示.

例 1 掷一颗骰子,观察其出现的点数.

显然,掷一颗骰子是一次试验. 由于该试验的可能结果有六个:出现 1 点、2 点、…、6 点,所以它有 6 个基本事件.

若把"出现 i 点" $\triangleq \omega_i$ 或" i ",则基本事件为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6$ 或 1,2,3,4,5,6.

于是,基本事件的集合 $A = \{1,3,5\}$, 就表示"出现奇数点"这个事件;基本事件的集合 $B = \{1,2\}$, 就表示"出现点数不超过 2"这个事件;基本事件的集合 $C = \{3\}$, 就表示"出现点数为 3"这个事件.

在这里,我们必须指出:

(1) 在一次试验中,若事件 A 中有一个基本事件出现,则称事件 A **发生**. 否则,称事件 A **不发生**.

例如,在例 1 中,若试验的结果是"3 点出现",则称事件 A 或 C 发生;若试验的结果是"2 点出现",则称事件 B 发生.

(2) 在每次试验中必定要发生的事件,称为**必然事件**,记为 Ω; 而把每次试验中必定不发生的事件,称为**不可能事件**,记为 ϕ. 从本质上来说,必然事件和不可能事件已经不具有任何随机性. 但是,为了研究问题方便起见,我们仍将它们视为随机事件的两个特例.

例如,在例 1 中,"点数 <7"为必然事件,可以记为"点数 <7"$=\Omega$;"点数 >6"为不可能事件,可以记为"点数 >6"$=\phi$.

二、样本点与样本空间

为了使概念的描述更加准确、事件的关系更加直观,就需要引入样本点和样本空间的概念.

在概率论中,我们把试验 E 的每个基本事件,称为试验 E 的一个**样本点**,并记为 $\omega_i(i=1,2,\cdots)$; 而把试验 E 的全体样本点所构成的集合,称为试验 E 的一个**样本空间**,并记为 Ω.

在例 1 中,由于试验的样本点为: $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6$ 或 $1,2,\cdots,6$,所以其样本空间就为 $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$ 或 $\Omega = \{1,2,\cdots,6\}$.

例 2 抛一枚硬币,观察其正、反面的出现情况.

显然,掷一枚硬币是一次试验. 由于该试验的可能结果有两种:"出现正面"和"出现反面",所以若令 H="出现正面"、T="出现反面",则该试验的样本点就为 H 和 T, 样本空间就为 $\Omega = \{H,T\}$.

例 3 将一枚硬币连抛两次,观察其正、反面的出现情况.

显然,"将一枚硬币连抛两次"是一次试验. 由于在每次试验中出现"正面"和"反面"的顺序不同,就是两个不同的试验结果,所以该试验的结果(基本事件或样本点)应该用二元有序数组的形式来描述.

若令 H="出现正面"、T="出现反面",则该试验的样本点就为 (H,H), (H,T), (T,H), (T,T), 样本空间为 $\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$.

若 A="两次出现同一面"，B="至少出现一次反面"，C="两次异面"，则由事件 A 包含的样本点为 (H,H) 和 (T,T) 知，事件

$$A=\{(H,H),(T,T)\}.$$

由事件 B 包含的样本点为 (H,T)、(T,H)、(T,T) 知，事件

$$B=\{(H,T),(T,H),(T,T)\}.$$

由事件 C 包含的样本点为 $\{H,T\}$ 和 (T,H) 知，事件

$$C=\{(H,T),(T,H)\}.$$

例 4 在一批灯泡中任取一只，测试其寿命.

设 t="灯泡的寿命"，则 t 可为一切非负实数.

于是，该试验的样本空间为 $\Omega=\{t\mid t\geqslant 0, t\in R\}$.

若 A="灯泡的寿命正好为 500 小时"，则 $A \triangleq \{t=500\}$；

若 B="灯泡的寿命在 300 到 500 小时之间"，则 $B \triangleq \{300\leqslant t\leqslant 500\}$.

三、事件的关系和运算

由于样本空间的引入，使随机事件进入了集合这个乐园，因此事件之间的关系和运算，实质上就是把集合之间的关系和运算赋予特定的概率涵义.

1. 事件的包含与相等

定义 1.1 若事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称事件 A **含于** B 或 B **包含** A，并记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

在例 1 中，若事件 C 发生，即"出现 3 点"发生，则必然导致事件 A 发生，即"出现基数点"发生. 于是，由定义 1.1 知：$C\subset B$.

定义 1.2 若事件 A 与 B 满足：$A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B **等价**或**相等**，并记为 $A=B$.

显然，相等的两个事件，它们所包含的样本点完全相同.

2. 事件的和与积

定义 1.3 若事件 C="事件 A 与 B 至少有一个发生"，则称 C 为"**事件 A 与 B 之和(或并)**"，并记为 $C=A+B$（或 $C=A\cup B$）.

在例 2 中，样本空间 Ω，就是事件 H 和 T 之和，即 $\Omega=H+T$ ($=H\cup T$).

定义 1.4 若事件 C="事件 A 与 B 同时发生"，则称 C 为"**事件 A 与 B 之积（或交)**"，并记为 $C=AB$（或 $C=A\cap B$）.

在例 1 中，若 D="出现 1 点"，则 $D=AB=\{1,3,5\}\cap\{1,2\}$.

3. 事件的互斥与对立

定义 1.5 若在一次试验中，事件 A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与 B **互斥**或**互不相容**.

由定义 1.5 可知：

(1) 事件的互斥现象，是针对一次试验而言的.

(2) A 与 B 互斥或互不相容与 $AB=\phi$ 等价.

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任意两个不同事件都互斥，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **互不相容**或**两两互斥**.

在例 3 中，事件 A 与 C 就是两个互斥事件或互不相容事件.

定义 1.6　若 A 与 B 满足 $AB=\phi$ 且 $A+B=\Omega$，则称 A 与 B **互为对立事件**或称 A 与 B **互为逆事件**，并记为 $A=\bar{B}$ 或 $B=\bar{A}$.

在例 1 中，由 $A=\{1,3,5\}$ 知，其对立事件 $\bar{A}=\{2,4,6\}$；在例 4 中，若记 $C=\{t\leqslant 250\}$，则其对立事件 $\bar{C}=\{t>250\}$.

根据上述定义，关于互逆事件（或对立事件），尚须注意下面**几个结论**：

（1）在一次试验中，A 和 $\bar{A}$ 不会同时发生，但 A 和 $\bar{A}$ 又必有一个发生. 因此，A 和 $\bar{A}$ 必然满足：$A\cdot\bar{A}=\phi$，且 $A+\bar{A}=\Omega$.

（2）由于 A 和 $\bar{A}$ 为互逆事件，因此 A 和 $\bar{A}$ 必然满足：$\bar{\bar{A}}=A$.

（3）若 A 与 B 互逆，则 A 与 B 一定互斥. 但是，此命题的逆命题，不一定成立.

4. **两个事件的差**

定义 1.7　若事件 $C=$“A 发生且 B 不发生”，则称 C 为“**事件 A 与 B 的差事件**”，并记为 $C=A-B$.

由定义知：

（1）“$A-B$ 的样本点”=“A 的全部样本点”去掉“属于 B 的样本点”；

（2）由于 $A\bar{B}$ 也表示“A 发生且 B 不发生”，所以 $A-B=A\bar{B}$.

关于事件之间的关系和运算的几何直观，请读者见图 1－1.

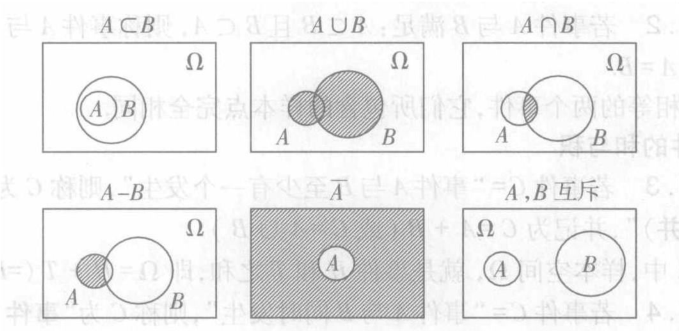

图 1－1

5. **事件运算的简单性质**

与集合运算类似，事件运算有以下简单性质：

（1）交换律：$A+B=B+A$，　$AB=BA$.

（2）结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$，　$A(BC)=(AB)C$.

（3）分配律：$A(B+C)=AB+AC$，　$A+BC=(A+B)(A+C)$.

（4）对偶律：$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$　$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$.

上述规则,可以推广到任意有限个或可列个事件的情形.例如:

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \cdots \cdots \cdot \bar{A}_n,$$

$$\overline{A_1 A_2 \cdots A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \cdots + \bar{A}_n.$$

例5 设 A_i =“第 i 次取得合格品”($i=1,2,3$),试用 A_i 表示下列事件:

(1) A =“三次都取得合格品”;

(2) B =“三次中恰有一次取得合格品”;

(3) C =“三次中至少有一次取得合格品”;

(4) D =“三次中最多有一次取得合格品”.

解 由 A_i =“第 i 次取得合格品”知,$\bar{A}_i$ =“第 i 次取得非合格品”($i=1,2,3$).因为“连取三件产品”为一次试验,所以由题意可知:

(1) $A = A_1 A_2 A_3$;

(2) $B = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$;

(3) $C = A_1 + A_2 + A_3$;

(4) $D = \bar{A}_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_3 + \bar{A}_2 \bar{A}_3$(因“合格品数≤1”⇔“不合格品数≥2”).

例6 某人连续三次购买彩票,每次 1 张.若 A,B,C 分别表示第一、二、三次所买彩票中奖.试用文字描述下列事件:

(1) $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$; (2) $AB + AC + BC$; (3) $\bar{A}B\bar{C}$;

(4) $\overline{A + B + C}$; (5) $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$.

解 (1) 事件 $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$ 表示“三次所买彩票恰有 1 次中奖”.

(2) 事件 $AB + AC + BC$ 表示“三次所买彩票至少两次中奖”.

(3) 事件 $\bar{A}B\bar{C}$ 表示“三次所买彩票只有第二次中奖”.

(4) 由于根据对偶律 $\overline{A + B + C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 知,“三次彩票都没有中奖”;根据定义 1.3 和定义 1.6 知,$\overline{A + B + C}$ 表示“三次彩票至少有 1 次中奖不可能”,所以上述两种描述均可.

(5) 由于根据对偶律 $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \overline{ABC}$ 知,$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ 表示“三次都中奖不可能”;根据定义 1.3 知,$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ =“$\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$ 至少有一个发生”⇔“A、B、C 至多有两个发生”,即“三次中最多只有两次中奖”,所以上述两种描述均可.

习题 1.1

1. 写出下列试验的样本空间:

(1) 将一枚硬币连抛 3 次;

(2) 观察在时间 $[0,t]$ 内进入某商店的顾客人数;

(3) 某班考试的平均成绩;

(4) 袋中有 4 球,各有编号,始取不复,共取两次.

2. 将一粒骰子连掷两次，观察其点数. 且事件 A =“两次点数相同”，B =“两次点数之和为 10”，C =“最小点数为 4”.

(1) 写出试验样本空间；

(2) 指出 ABC、A、B、C、$B\bar{C}$、$A+B$、$A-C$ 及 $C-A$ 所含样本点.

3. 设 A,B,C 是三个事件，试用它们表示下列事件：

(1) A 与 B 同时发生；　(2) A 不发生但 B、C 至少有一个发生；

(3) A、B、C 不同时发生；　(4) A、B、C 同时不发生；

(5) A、B、C 都不发生；　(6) A、B、C 中至少有两个发生.

4. 化简下列事件：

(1) $(A-B)+A$；　(2) $(A-B)+B$；

(3) $(A-B)A$；　(4) $(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)$.

§1.2　事件的概率及其性质

为了研究随机现象的统计规律性，我们不仅需要知道每次试验可能产生哪些结果，而且更需要知道我们所关心的那些结果发生的可能性的大小. 因此，如何确定这些结果发生的可能性的大小，便成了概率论的一个基本问题.

本节的宗旨，就是要借助频率的特性，来建立概率的统计定义，并给出概率的常用性质.

一、频率及其性质

定义 1.8　若在 n 次重复试验中，事件 A 出现了 n_A 次，则称比值

$$\frac{n_A}{n} \triangleq f_n(A) \qquad (1-1)$$

为事件 A 在 n 次试验中出现的**频率**.

由此定义可知：在 n 次重复试验中，若 Ω 是试验 E 的样本空间，A、B 是 E 的两个事件，则 Ω 的出现次数 $n_\Omega=n$. 因此，当 A、B 互斥时，事件 A、B 和 $A+B$ 在 n 次试验中的出现次数 n_A、n_B 和 n_{A+B}，就必定满足关系式 $0\leqslant n_{A+B}=n_A+n_B\leqslant n$. 于是，即可得到事件频率的如下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 若 A、B 互斥，即 $AB=\phi$，则 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$.

二、概率的统计定义

我们来看下面的

例 1　将一枚硬币连抛 n 次，事件 H =“出现正面”的出现次数如表 1-1：

表 1-1

	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表 1-1 中的结果可以看出：

(1) 频率具有**波动性**. 在每次试验中，事件 H 发生的频率不完全相同.

比如，当 $n=5$ 时，$f_n(H)$ 的最大值为 1、最小值为 0.2，两者相差 0.8.

(2) 频率具有**稳定性**. 当抛掷次数 n 不断增大时，频率的波动范围就会逐渐缩小.

比如，当 $n=500$ 时，$\max f_n(H)=0.524$、$\min f_n(H)=0.488$，两者相差 0.036.

可以断言：当试验次数 n 充分大时，频率 $f_n(H)$ 就会"稳定于"0.5 附近. 事件频率的这种属性，通常称之为"频率的稳定性".

1. 概率的统计定义

由于频率的稳定值是客观存在的，它不仅与试验的次数无关，而且也与实验者是谁无关，因此用它来衡量事件发生可能性的大小是非常理想的.

鉴此，我们给出下面的

定义 1.9 在 n 次重复试验中，若当试验次数 n 充分大时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 稳定于常数 p 附近，则称此常数 p 为事件 A 发生的**概率**，并记为

$$P(A)=p.$$

根据定义 1.9，在上面的抛币试验中，事件 H 发生的概率为 $P(H)=0.5$.

由于这个定义是从统计的角度抽象出来的，所以通常也称它为**概率的统计定义**. 尽管它只是一种描述，但也是概率存在的依据.

值得注意的是：概率与频率是既有联系又有区别的两个概念. 其联系是：频率是概率产生的基础，概率是频率的稳定值. 其区别是：频率必须依赖于试验次数 n，它回答的是在 n 次重复试验中某事件发生的可能性的大小，它是一个近似值；概率是一个不依赖于试验次数 n 的一个理论值，它回答的是在一次试验中某事件发生的可能性的大小，它是一个精确值.

2. **概率的性质**

性质 1　不可能事件的概率为零,即 $P(\phi)=0$.

证　因为无论 n 为何值,在 n 次重复试验中,事件 ϕ 出现的次数 $n_{\phi}\equiv 0$,所以当 n 充分大时,$f_n(\phi)$ 的稳定值为零. 于是,由定义 1.9 知,必有 $P(\phi)=0$.

性质 2　$P(\Omega)=1$.

由必然事件的定义可知,此命题显然成立.

性质 3　若 A 为任意事件,则必有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 4　若 A、B 互斥,即 $AB=\phi$,则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

证　由频率的性质(3)知,若 A、B 互斥,则有

$$f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$$

所以由定义 1.9 知,当 n 充分大时,就必有 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

推论　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则必有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 5　若 A 为任意事件,则 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

证　因为 $A+\bar{A}=\Omega$,所以由性质 2 知

$$P(A+\bar{A})=P(\Omega)=1.$$

又　由 $A\cdot\bar{A}=\phi$ 知,A 与 $\bar{A}$ 互斥.

而　由性质 4 知,$P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$

故　$P(\bar{A})=1-P(A)$.

性质 6　若 A、B 为两个任意事件,则有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

证　因为由图 1-1 可知,$A=(A-B)+AB$ 且 $(A-B)\cdot AB=\phi$

所以由性质 4,有

$$P(A)=P(A-B)+P(AB).$$

于是,得 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别地,当 $B\subset A$ 时,由 $AB=B$,得 $P(A-B)=P(A)-P(B)$ 且 $P(B)\leqslant P(A)$.

性质 7　若 A、B 为两个任意事件,则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证　因为由图 1-1 可知,$A+B=(A-B)+B$ 且 $(A-B)\cdot B=\phi$

所以由性质 4,有 $P(A+B)=P(A-B)+P(B)$.

又　由性质 6 知　$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

故　$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

利用归纳法,可将性质 6 推广到 n 个事件的情形. 特别地,当 $n=3$ 时,有

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

通常,人们把性质 6 所给出的公式,称为概率的**减法公式**;而把性质 7 所给出的公式,称为概率的**加法公式**.

例 2　在打靶中,已知“命中 10 环”的概率为 0.3,“命中 7 环或 8 环或 9

环”的概率为0.54,试求“至少命中7环”的概率.

解 设A=“命中10环”,B=“命中7环或8环或9环”,C=“至少命中7环”,则有$C=A+B$,且$AB=\phi$.

由性质4,得

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=0.3+0.54=0.84$$

例3 设事件A与B的概率分别为$\frac{2}{3}$与$\frac{1}{5}$. 求下列情况下$P(A\bar{B})$的值:

(1) A与B互斥; (2) $B\subset A$; (3) $P(AB)=\frac{1}{3}$.

解 因为由定义1.7,有$A\bar{B}=A-B$,所以由概率的性质6,有

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

(1) 由A与B互斥知,$AB=\phi$. 于是,得

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(\phi)=P(A)=\frac{2}{3}.$$

(2) 由$B\subset A$知,$AB=B$. 于是,得

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{7}{15}.$$

(3) 由$P(AB)=\frac{1}{3}$,得

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

习题1.2

1. 试用等号或不等号将下面四个实数从小到大排成一列:

$$P(A)、P(A+B)、P(AB)、P(A)+P(B).$$

2. 某工厂的产品分为一等品、二等品、三等品三档,在正常生产的条件下,出现二等品的概率为0.06,出现三等品的概率为0.02,其余均为一等品.求出现非一等品的概率.

3. 设A、B为两个事件,已知A和B至少有一个发生的概率为$\frac{1}{3}$,A发生但B不发生的概率为$\frac{1}{9}$. 试求B发生的概率.

4. 下列习题的解法是否正确? 为什么?

设甲、乙两射手在相同条件下进行射击,而甲、乙击中目标的概率分别为0.9与0.8求击中目标的概率.

解 设A=“甲击中目标”,B=“乙击中目标”,C=“击中目标”,则

$$C=A+B$$

于是 $$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=0.8+0.9=1.7.$$

5. 某城市对居民消费的调查结果如下:拥有彩电的户数占92%,拥有冰箱的户数占

88%,拥有彩电、冰箱至少一种的户数占95%.问:既有彩电、又有冰箱的户数占百分之几?

§1.3 古典概型

由于概率的统计定义对于下述两个问题没有给出确切的界定:

(1)试验次数 n 达到多大,才算"充分大"?

(2)"稳定值"的标准是什么?

所以概率的统计定义并未真正解决事件 A 发生的概率 $P(A)$ 的定值问题.

但是,对于一些特殊的随机现象的事件概率,却并不需要通过大量的重复试验所得的频率去近似概率,而只需通过对一次试验的科学分析,即可得到有关事件的概率.

在这些特殊的随机试验中,古典概型居于首位.

一、古典概型的基本概念

定义 1.10 若一个试验具有以下两个特点:

(1) 样本空间只有有限个样本点,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$;

(2) 每个样本点出现的可能性都相等,即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$,

则称该试验为**古典型随机试验**.

古典型随机试验所描述的概率模型,称之为**古典概型**.

在古典概型中,因 $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=\Omega$,而 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 两两互斥,故

$$P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_n)=P(\Omega)=1.$$

又

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$$

故

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}$$

据此,我们给出如下的

定义 1.11 在古典概型中,若试验 E 的样本点总数为 n,事件 A 所包含的样本点的个数为 n_A,则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**概率**,并记为

$$P(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1-2}$$

由于这个定义是由法国数学家拉普拉斯(Laplace)于1812年给出的概率定义,故此,人们也称它为概率的**古典定义**.

*二、几个常用原理

在计算古典概型事件的概率时,一般都要牵涉到下面几个基本原理:

1. **乘法原理**

如果完成一件事情需要 m 个步骤,而完成第 k 个步骤有 $n_k(k=1,2,\cdots,m)$ 种不同方法,那么完成这件事情的不同的方法总数

$$N=n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_m.$$

2. 加法原理

如果完成一件事情有 k 类方法，选择这 k 类方法中的任何一类的任何一种，这件事情均可完成，且第 k 类方法有 $n_k(k=1,2,\cdots,m)$ 种不同的方法，那么完成这件事情的不同的方法总数

$$N=n_1+n_2+\cdots+n_m.$$

3. 排列原理

从 n 个不同元素中，随机取出 m 个不同元素（$1\leqslant m\leqslant n$），并按某种顺序排成一列（称为一个排列）的所有不同的排列总数为

（1）当 $m<n$（称为选排列）时，为 $P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$.

（2）当 $m=n$（称为全排列）时，为 $P_n^n=n(n-1)\cdots2\cdot1=n!$.

（3）从 n 个不同元素中，随机取出 m 个元素的所有可重复的排列总数

$$N=n\cdot n\cdot\cdots\cdot n=n^m.$$

4. 组合原理

从 n 个不同元素中，随机取出 m 个不同元素（$1\leqslant m\leqslant n$），并不计顺序构成一组（称为一个组合）的所有不同的组合总数为

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

三、古典概型中事件概率的求解方法

在古典概型中，欲求事件 A 的概率 $P(A)$，关键是要求出(1-2)式中的 n 和 n_A，而要求出 n 和 n_A 的值，就必须弄清：

(1)一次试验的具体涵义是什么，试验结果是否与顺序有关，试验是“分步试验”，还是“非分步试验”；

(2)试验的样本点的总数 n 是多少；

(3)实现 A 的方法种数（即事件 A 所包含的样本点的个数 n_A）是多少.

例 1 在 100 件产品中，有 95 件一等品和 5 件二等品，求下列事件的概率：

（1）从中任取一件，取得一等品；（2）从中任取两件，全为一等品；

（3）从中任取两件，全为二等品；（4）从中任取两件，一、二等品各一件.

解 (1)由题意知，“从 100 件产品中任取 1 件”为一次试验. 因此，该试验的样本点的总数 $n=C_{100}^1$.

设 A=“取得一等品”，则 A 可以这样来实现，即“从 95 件一等品中任取一件”. 于是，A 所包含的样本点数 $n_A=C_{95}^1$.

由(1-2)式，得

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{C_{95}^1}{C_{100}^1}=\frac{95}{100}=0.95.$$

（2）因为“从 100 件产品中任取两件”为一次试验，所以该试验的样本点的