

〔宋〕沈括著

胡道静校證

夢溪筆談校證

〔宋〕沈

括著

胡道靜校證

夢溪筆談校證 下

上海古籍出版社

本書據中華書局上海編輯所一九六二年新一版影印

夢溪筆談校證

(全二冊)

[宋]沈括著 胡道靜校證

上海古籍出版社出版

(上海瑞金二路272號)

各埠書店上海發行所發行 上海浦江印刷廠印刷

開本850×1156 1/32 印張40.375

1987年9月第1版 1987年9月第1次印刷

印數1—3,500

統一書號：17186·100 定價：11.80元

# 夢溪筆談卷十八

## 校證第十八

宋錢塘沈括撰

技藝

崇禎本「藝」下有「一」字，它本均無。林校記云：「舊本無「一」字。」

賈魏公爲相日，有方士姓許，對人未嘗稱名，無貴賤皆稱「我」。時人謂之許我。「時」弘治本作「將」，言

談頗有可採，然傲誕，視公卿蔑如也。「弘治本」蔑作「滅」。公欲見，使人邀召數四，「揮犀四」召作「之」。卒不至。又使門

人苦邀致之，許騎驢徑欲造丞相廳事，門吏止之不可，吏曰：「此丞相廳門，雖丞郎亦須下。」許曰：「我無

所求於丞相，丞相召我來。若如此，但須我去耳。」不下驢而去。門吏急追之不還，以白丞相。魏公又使人謝

而召之，終不至。公歎曰：「許市井人耳，惟其無所求於人，尚不可以勢屈，況其以道義自任者乎！」○

學津本脫「以」字。

【18一\*二六】

○宋吳坳五總志

富鄭公初不識許我，聞其名遽召見之。我乘馬直造廳廡，謁者請就賓次通姓名，我曰：「既召我

來，而不迎我，是見輕也。」復乘馬逕去。公聞之嘆息曰：「許我所以能「我」者，以無所求，而俯仰在

我也。」

○宋王闢之澠水燕談錄卷第四「高逸」

史延壽，嘉州人，以善相遊京師，貴人爭延之。視貴賤如一，坐輒箕踞爾我，人號曰「史不拘」。又曰「史我」。呂文靖公嘗邀之，延壽至，怒闔門不開門，批之，闔者曰：「此相公宅，雖侍臣亦就客次。」延壽曰：「彼來者皆有求於相公，我無求，相公自欲見我耳。不開門，我竟還矣。」闔者走白，公開門迎之。延壽挾術以遯于世，無心於用舍，故能自重也如此。

宋人軼事彙編云：「五總志以邀許我者爲富鄭公；澠水燕談錄述史延壽號史我，呂文靖爲相嘗邀之，事迹略同。大抵一人一事，而傳說紛歧也。」

營舍之法，

類苑五十二引謂之木經，或云喻皓

「皓」，弘治本、神海本及類苑五十二引同，津逮本、崇禎本、學津本、玉海堂本、叢刊本均作「皓」。三一、二條則各本皆作「皓」字。

所撰。○至○凡屋有三分，去聲自梁以上爲「上分」，地以上爲「中分」，階爲「下分」。凡梁長幾何，則配

極幾何，以爲椽等。如梁長八尺，配極三尺五寸，則廳法堂也，此謂之「上分」。椽若干尺，則配堂基若干尺，

以爲椽等。若椽一丈一尺，則階基四尺五寸之類。「基」弘治本以至承拱椽，皆有定法，謂之「中分」。

階級有峻、平、慢三等。宮中則以御輦爲法，凡自下而登，前竿垂盡臂，後竿展盡臂爲「峻道」；荷輦十二人：前

竿，次二人曰「前條」，又次曰「前脇」；後二人曰「後脇」，又後曰「後條」，末後曰「後竿」；輦前隊長一人曰「傳唱」，後一人曰「報贊」。

「次二人」津逮本、玉海堂本、叢刊本作「條」，末後曰「後竿」；輦前隊長一人曰「傳唱」，後一人曰「報贊」。

本、叢刊本誤作「前會」。「後二人曰「後脇」，類苑五十二引「二」作「一」，津逮本、玉海堂本、叢刊本作「三」。「後條」弘治本作「後修」，神海本作「後脩」。「輦前隊長」，類苑引「前」作「併」。前竿平肘，後竿平肩爲「慢道」；前竿垂手，後竿平肩爲「平道」。此之爲「下分」。弘治本、神海本及類苑五十二引、爲「作」其書三

卷。近歲土木之工，園。林校記云：「舊本益爲嚴善，舊木經多不用，未有人重爲之，亦良工之一業也。」

【18二\*二三九】

○宋晁公武昭德先生讀書後志第一卷『史類職官類』

將作營造法式三十四卷。右皇朝李誠撰。熙寧初，勅將作監編修營造法式，誠以爲未備，乃考究經史，詢訪匠氏，以成此書，頒于列郡。世謂喻皓、木經，極爲精詳，此書蓋過之。

○宋歐陽修歸田錄卷一：

開寶寺塔，〔一〕在京師諸塔中最高，而制度甚精，都料匠預浩所造也。塔初成，望之不正而勢傾西北，人怪而問之，浩曰：『京師地平無山，而多西北風，吹之不百年，當正也。』其用心之精蓋如此。國朝以來，木工一人而已。至今木工皆以預都料爲法，有木經三卷行於世。世傳浩惟一女，年十餘歲，每臥，則交手於胸爲結構狀；如此踰年，撰成木經三卷，今行於世者是也。

園依歸田錄所誌傳說，則木經乃喻皓之女所撰。『喻皓』之寫法，又有作『預皓』、『喻皓』、『喻浩』（此見楊文公談苑）者。

〔一〕李燾資治通鑑卷四云：『開寶寺塔，成于端拱二年八月。』

◎梁思成中國建築與中國建築師

人民傳頌的建築師，第一名我們應該提出魯班。二千多年來，他被供奉爲木匠之神……十世

紀末葉的著名匠師喻皓，最長於建造木塔及多層樓房。他設計河南省開封的開寶寺塔，先作模型，然後施工。他預計塔身在一百年西北傾側，以抵抗當地的主要風向。他預計塔身在一百年內可以被風吹正，並預計塔可存在七百年。可惜這塔因開封的若干次水災，宋代的建設現在已全部不存，殘餘遺跡也極少，這塔也不存痕跡了。此外喻皓曾將木材建造技術著成木經一書，後來宋代的營造法式就是依據此書寫成的。（文物參考資料一九五三年第十期頁六七）

②按，營造法式以元符三年（一一〇〇）成書，崇寧二年（一一一三）刊行。筆談成書在元祐（一一〇六—一一一三）間，故謂『未有人爲之』也。

審方面勢，覆量高深遠近，算家謂之『書術』。「書」弘治本、津逮本、崇禎本、學津本、玉海堂本、叢刊本作「裏」，神海本作「重」，類苑五十二引作「重」。下「吾」字亦如此。

書文象形，如繩木所用墨斗也。求星辰之行，步氣朔消長，謂之『綴術』。謂不可以形察，但以算數綴之而已。北齊祖暅有綴術二卷。

③錢寶琮關於祖暅和他的綴術：

祖暅是祖冲之（四二九—五〇〇）的兒子。和他的父親一樣，也是一位博學多才的科學家。他的生卒年代無可查考，在梁朝初年（公元五〇四年和五〇九年）他兩次建議修改曆法，提出他父親所創造的大明曆，說可以糾正何承天元嘉曆的疏遠……

和祖暅同一時代的一位目錄學家阮孝緒（四七九—五三六）撰七錄，其中數術的部分請他編訂。（阮孝緒七錄序）顏之推少年時在梁朝做官，他說：「算術亦是六藝要事……江南此學殊少，惟范陽祖暅精之，位至南康太守。」（顏氏家訓雜藝篇）所以祖氏名暅是無可懷疑的。唐初，王孝通撰輯古算術，自序說：「祖暅之綴術，時人稱之精妙。」所謂「祖暅之綴術」應該解釋作祖暅的綴算書。然而李淳風注釋九章算術，他在少廣章立圓術注中引祖暅的球體積公式的理論基礎時，「暅」字下邊多了一個「之」字。李延壽南史卷七十二文學傳也說，祖冲之的兒子名叫「暅之」。清阮元的疇人傳，因而爲「祖暅之」作傳。依據上面所引阮孝緒七錄序、顏氏家訓、梁書、北史、隋書等史料，這被後人憑空添出來的「之」字是應該刪去的。

南齊書祖冲之傳和南史文學傳都說，冲之「注九章，造綴術數十篇。」隋書律曆志於敘述祖冲之在數學工作中的偉大成就後，說「所著之書名爲綴術。」經籍志記錄「綴術六卷」而沒有註明作者姓名。唐書經籍志載「綴術五卷，祖冲之撰。」綴術當然是祖冲之的數學傑作，他的數學研究，如圓周率的計算，開差冪，開差立算法的應用之類，都應該包含在內。王孝通說：「祖暅之綴術」却是把祖暅做綴術的作者的大概在祖冲之死後，他的兒子又把他自己的數學研究添寫上去，豐富了綴術的內容。計算球體積的正確公式也許就是他添上去的得意之作。數學通報一九五四年三月號



算術求積尺之法，**闕**

「算術」玉海堂本、叢刊本作「算數」，津逮本作「口數」。算經十書作「數求積尺之法」，蓋從津逮本之脫字者也。孫校記云：「算術」，舊本作「算數」。王校記云：「算數」，毛、馬同，陶作

「術」。按，毛本實作「口」，而馬本亦作「算術」也。如芻萌、芻童、方池、冥谷、塹堵、髓臚、圓錐、陽馬之類，**闕**作「數」。算經十書「萌」物形

備矣，獨未有「隙積」一術。古法，凡算方積之物，有「立方」，謂六幕皆方者，**闕**類苑五十二引「幕」作「幕」。其法再自乘

則得之。有「塹堵」，謂如土牆者，兩邊殺，兩頭齊，其法併上下廣折半以爲之廣，以直高乘之，又以直高爲

**股**，**闕**「股」各本均誤作「句」，從張文虎說校正，見注⑤。以上廣減下廣，餘者半之爲句，**闕**各本並脫「半」之二字，又誤「句」爲「股」，從張文虎說校正，見注⑤。句股求

弦，**闕**「求」各本均誤作「乘」，從張文虎說校正，見注⑤。以爲斜高。有「芻童」，謂如覆斗者，四面皆殺，其法倍上長加入下長，以上廣

乘之，倍下長加入上長，以下廣乘之，併二位法，以高乘之，六而二。「隙積」者，謂積之有隙者，如累基

層壇，及酒家積罌之類，雖似覆斗，**闕**「似」弘治本、神海本誤作「以」，其它各本「斗」類苑五十二引作「對」。四面皆殺，緣有刻缺及虛隙

之處，用「芻童法」求之，常失於數少。予思而得之，用「芻童法」爲上行、下行，別列下廣，以上廣減之，餘

者以高乘之，六而一，併入上行。假令積罌：最上行縱廣各二罌，最下行各十二罌，行行相次，先以上二行相次，率至十

得之三十二，又倍下二長得十六，併入上長，得四十六，以下廣乘之，得三百一十二，併二位得三百四十四，以高乘之，得三千七百八十四，重列下廣十二，以上廣減之餘十，以高乘之，得一百一十，併入上行，得三千八百九十四，六而一，得

六百四十九，此爲罌數也。「芻童」求見實方**闕**「最上行縱廣」，玉海堂本、叢刊本「行」作「无」。「最下行各十二罌

之積」，「隙積」求見合角不盡益出羨積也。行行相次，玉海堂本、叢刊本、津逮本、算經十書作「最下行各十二行

罌相次」，「先以上二行相次」，弘治本、神海本「先」下有「止」字。「當十一行也」，原作「當十二行也」，崇

禎本同，其它各本及類苑引、算經十書並作「十一行」。「得之三十二」，「之」字原脫，崇禎本同，從其它各本及類苑

引補。「三十一」弘治本作「二十一」，其它各本並作「二十二」，算經十書作「三十二」，今從十書校正。「又倍下二長」，津逮本、玉海堂本、叢刊本「又」誤作「人」；弘治本、神海本、崇禎本、愛廬本脫「二」字。「得三百一十二」，弘治本、

神海本脫「二」字。「併二位」，「位」各本均誤作「倍」，從張文虎說校正。「得三百四十四」，弘治本、神海本「得」上有「重」字。「得三千七百八十四」，各本「三」誤作「二」，從張文虎說校正。「以上廣減之」，類苑引「以」作

「已」。玉海堂本「得一百一十」，津逮本、學津本、玉海堂本、叢刊本「得」作「則」。「得三千八百」，津逮本、玉海堂本、叢刊本及算經十書「得」作「者」。「此為疊數也」，弘治本、神海本「為」作「謂」。履畝之法，

方圓曲直盡矣，未有「會圓」之術。○「圓」原作「圖」，從其它。凡圓田，既能拆之，及算經十書作「折」，神海本

類苑五十二引。須使會之復圓。古法惟以中破圓法拆之。○「拆」弘治本、神海本、類苑五十二引、算經十書均作「折」。其失有及三倍者。予

別為「拆會」之術。○「為」原作「無」，津逮本、崇禎本、玉海堂本、叢刊本同誤，從弘治本、神海本、置圓田，徑半之

以為弦，又以半徑減去所割數，餘者為股，各自乘，以股除弦，餘者開方除為句，倍之為割田之直徑，以所割

之數自乘，退一位倍之，又以圓徑除所得，加入直徑，為割田之弧，再割亦如之，減去已割之數，則再割之數

也。○假令有圓田徑十步，欲割二步，以半徑為弦，五步自乘得二十五，又以半徑減去所割二步，餘三步為股，自乘得九，

四尺，以圓徑除。今圓徑十，已是盈數，無可除，只用四尺加入直徑，為所割之弧，凡得圓。○又以半徑減去，玉海堂本

徑八步四尺也。再割亦依此法，如圓徑二十步，步弧數，則當折半，乃所謂以圓徑除之也。○「去」誤作「式」。○「上

一位」，「位」字各本俱誤作「倍」，從張文虎說校正。「圓徑八步四尺」，玉海堂本、叢刊本「八」誤作

「入」。○「則當折半」，弘治本、神海本「則」下有墨釘，作「則圓當折半」，玉海堂本「折」作「拆」。此二類皆造

微之術，古書所不到者，漫志於此。○

○魏劉徽注唐李淳風釋九章算術卷第五「商功」

今有圓錐，下周三丈五尺，高五丈一尺，問積幾何？

答曰：一千七百三十五尺一十二分尺之五。於商術當積一千六百五十八尺三百一十四分尺之十三

術曰：下周自乘，以高乘之，三十六而一。按：此術即錐下周，以為方錐下方，方錐下方令自乘，以高乘之，合

18 5 \* 1011

合十二除之，故令三乘十二，得三十六而連除。於徽術當下周自乘，以高乘之，又以二十五乘之，九百四十二而一。圓錐比於方錐，亦二百分之一百五十七，令徑自乘者，亦當以一百五十七乘之，六百而一。臣淳風等謹按，依密率，以七乘之，二百六十四而一。

今有塹堵，下廣二丈，表一十八丈六尺，高二丈五尺，問積幾何？

答曰：四萬六千五百尺。

術曰：廣袤相乘，以高乘之，二而一。邪解立方，得兩壘堵，雖復積方，亦爲壘堵，故二而一。此則合所規畫，推其物體，蓋爲壘上壘也。其形如城，而無上廣，與所規畫形異而同實。

未聞所以名之爲壘堵之說也。

今有陽馬，廣五尺，袤七尺，高八尺，問積幾何？

答曰：九十三尺少半尺。

術曰：廣袤相乘，以高乘之，三而一。按，此術陽馬之形，方錐一隅也。今謂四柱屋隅爲「陽馬」。假令廣袤堵，其一爲陽馬，一爲甃腦；陽馬居二，甃腦居一，不易之率也。合兩甃腦，成一陽馬；合三陽馬，而成一立方，故三而一。驗之以基，其形甚矣。悉割陽馬，凡爲六甃腦。觀其割分，則甃勢互通，蓋易了也。其基或脩短，或廣狹立方不等者，亦割分以爲六甃腦，其形不悉相似，然見數同積實均也。甃腦殊形，然陽馬異體，則不純合，不純合，則難爲之矣。何則？按邪解方基，以爲壘堵者，必當以半爲分。邪解壘堵，以爲陽馬者，亦必當以半爲分，一從一橫耳。設陽馬分內，甃腦爲分外，其雖或隨脩短廣狹，猶有此分常率如殊形異體亦同也者，以此而已。其使甃腦廣袤各高二尺，用壘堵，甃腦之基各二，皆用赤基，又使陽馬之廣袤各高二尺，用立方之基一，壘堵陽馬之基各二，皆用黑基，其之赤黑，接爲壘堵，廣袤各高二尺，於是中教其廣，又中分其高，令赤黑壘堵各自適當一方，高二尺，方二尺，每二分甃腦則一隅馬也。其餘兩端，各積本體，合成一方形，是爲別種而方者率居三，通其體而方者率居一。雖方隨基改，而固常有然之勢也。按，餘數具而可知者有一二分之別，卽一二之爲率定矣，其於理也豈虛矣。若爲數而窮之，置餘廣袤高之數各半之，則四分之三又可知也。半之彌少，其餘彌細，至細曰微，微則無形，由是言之，安取餘哉。數而求窮之者，謂以精推，不用辭算。甃腦之物，不同器用。陽馬之形，或隨脩短廣狹。然不有甃腦，無以壘陽馬之數；不有陽馬，無以知錐亭之數，功實之主也。

今有甕臚，下廣五尺無袤，上袤四尺無廣，高七尺，問積幾何？

答曰：二十三尺少半尺。

術曰：廣袤相乘，以高乘之，六而一。按此術臚者臂骨也。或曰「牛陽馬」。其形有似甕肘，故以名云。中破陽馬，得兩甕臚，甕臚之見數，即陽馬之半數，數同而實據半，故云六

而一即得。

今有芻蕘，下廣三丈，袤四丈，上袤二丈無廣，高一丈，問積幾何？

答曰：五千尺。

術曰：倍下袤，上袤從之，以廣乘之，又以高乘之，六而一。推明義理者舊說云：凡芻蕘，有上下廣，曰

童之上廣袤等，正斬方亭，兩邊合之，即芻蕘之形也。假令下廣二尺，袤三尺，上袤一尺無廣，高一尺。其用基也，中央壘堵二，兩端陽馬各二，倍下袤，上袤從之，為七尺，以高廣乘之，得羈十四尺。陽馬之表，各居一，壘堵之羈，各居三，以高乘之，得積十四尺。其於本基也，皆一而為六，故六而得一即得。亦可令上下袤差乘廣以高乘之，三而一，即四陽馬也。下廣乘上袤而半之高乘之，即二壘堵并之以為羈積也。

芻童、曲池、盤池、冥谷，皆同術。

術曰：倍上袤，下袤從之。亦倍下袤，上袤從之。各以其廣乘之，并以高若深乘之，皆六而一。按此術假

廣一尺，袤二尺，下廣三尺，袤四尺，高一尺。其用基也，中央立方二，四面壘堵六，四角陽馬四。倍下袤為八，上袤從之為十，以下廣乘之，得積三十尺，是為得中央立方各三，兩邊壘堵各四，兩旁壘堵各六，四角陽馬亦各六。復倍上袤，下袤從之為八，以高廣乘之，得積八尺，是為得中央立方亦各三，兩端壘堵各二，井兩旁三品基皆一而為六，故六而一即得。為術又可令上下廣袤差相乘，以高乘之，三而一，亦四陽馬。上下廣袤互相乘，井而半之，以高乘之，即四面六壘堵，與二立方，井之為芻童積。又可令上下廣袤互相乘而半之，上下廣袤又各自乘，并以高乘之，三而一即得也。

今有芻童，下廣二丈，袤三丈，上廣三丈，袤四丈，高三丈，問積幾何？

答曰：一萬六千五百尺。

今有冥谷，上廣二丈，袤七丈，下廣八尺，袤四丈，深六丈五尺，問積幾何？

答曰：五萬二千尺。

圓錐今謂之平截圓錐，壅堵今謂之長方體截體，陽馬今謂之四角錐，鼈臚今謂之三角錐，芻蕘今謂之楔，芻童、冥谷今謂之平截楔。

宋趙與峕賓退錄卷第四

廣陵所刻夢溪筆談第十八卷「積器之術」注中「又倍下長得十六」當作「二十四」併入上長得四十六，當作「二十六」。士夫知算術者少，故莫辨其誤。漫記之。

清張文虎舒齋室雜箸甲編卷下「書夢溪筆談後二」

趙與時賓退錄云：「廣陵所刻夢溪筆談第十八卷積器之術注中……漫記之。」按趙氏所據卷數錯誤，並同今本。又云「廣陵所刻」蓋即湯脩年刊於揚州者也。檢湯跋稱：「證辨訛舛凡五十餘字，疑者無他本，不敢以意驟易，姑仍其舊。」然則此書之譌謬相因，其來久矣。今以馬本第十八卷算術條勘之，猶不止如趙氏所舉。壅堵法云：「併上下廣折半以爲之廣，以直高乘之，又以直高爲句，以上廣減下廣，餘者爲股，句股乘弦，以爲斜高。」此尤謬誤。當云：「又以直高爲股，以上廣減下廣，餘者半之爲句，句股求弦，以爲斜高。」積器術注：「先以上二行相次率至十二，當十二行也。」當作

『當十一行也。』(1)『以上廣乘之得二十二』當作『三十一』(2)『併二倍』及下會圓術注『退上一倍』『倍』皆當作『位』。『以高乘之得二千七百八十四』當作『三千七百八十四』此條微波榭刻十種算經曾探附數術記遺之後，孔蒞谷非不知算術者，亦仍其誤，何與？

(1) (2) 按，此二處誤字，算經十書已校正。

④李儼中算史論叢 中國科學院 第一集『中算家的級數論』 商務印書館舊印本在第三集，新印本有修正。

宋沈括夢溪筆談卷十八有『隙積術』謂『積之有隙者，如累

棋、層壇及酒家積器之類』設圖如上下廣爲a及c，上下長爲b及

d，其高爲h，則

$$V = \frac{h}{6} [(2b+d)a + (2d+b)c] + \frac{h}{6} (c-a)$$

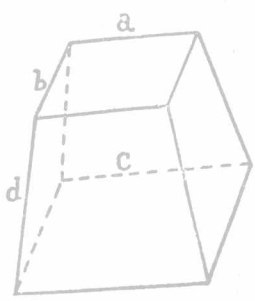
顯觀光〔一七九九—一八六二〕稱『堆棊之術詳於楊(輝)』

氏(朱(世傑)氏二書，而初始之功，斷推沈(括)氏。〔原注一〕因楊輝詳解九章算法(一二六一)

『商功第五』方棊、芻童果子棊、芻甕果子棊；朱世傑四元玉鑑(一三〇三)卷下『果棊疊藏』三

角臺棊、四角臺棊、芻童棊、芻甕棊，都依隙積術立算。隙積術可如下法補證：

$$V = ab + (a+1)(b+1) + (a+2)(b+2) + \dots + (a+h-1)(b+h-1) \\ = ab + \{ab + a + b + 1^2\} + \{ab + 2(a+b) + 2^2\} + \dots + \{ab + (h-1)(a+b)$$



$$+ (h-1)^2 \}$$

$$= h \cdot ab + (a+b) \frac{1}{2} \cdot h (h-1) + \frac{1}{3} (h-1) (h-\frac{1}{2}) h,$$

$$\text{因 } a+h-1=c, \quad h=c-a+1,$$

$$b+h-1=d, \quad h=d-b+1,$$

代入消得

$$V = \frac{h}{6} [(2b+d)a + (2d+b)c] + \frac{h}{6} (c-a).$$

頁三三三七一—三三三八·商務印本在第三集頁三三〇—三三一。

〔原注一〕見九數存古卷五，第六四頁。

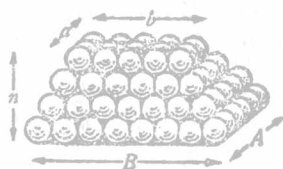
### ② 許雍筋多才多藝的數學家——沈括『隙積術』

在中國數學裏，很早就談到級數。九章算術和孫子算經裏都載等差級數和等比級數的問題，但沒有求總和的方法。南北朝時，張邱建算經首創等差級數的算法，但此後經五六百年並無進展。直到宋朝，突然出現了一種高等級數，它是兩串連續整數各相當項的積，形如

$$ab, (a+1)(b+1), (a+2)(b+2), (a+3)(b+3), \dots$$

沈括的隙積術，就是這一種高等級數求總和的算法。

在沈括的夢溪筆談中，說到九章算術的商功一章裏載着『芻童』（即長方稜台）的求積



〔圖一〕

法，但芻童是由六個平面圍成的實質的立體；如果是酒店或陶器店裏堆積的甕、缸、瓦盆之類，堆成的形狀雖像芻童，但有缺刻和虛隙，這就不能照芻童的算法來計算總數了。因此，沈括就創造出一種隙積術來。這一種算法和後世西洋數學中的『積彈』類似。（如圖一）把同樣的許多物件層層堆積，各層都是一個長方形，自上而下，逐層的長闊各增一個。設頂層闊  $a$  個，長  $b$  個；底層闊  $A$  個，長  $B$  個，計  $n$  層。把沈括計算總數  $S$  的方法譯成公式如下：

$$S = ab + (a+1)(b+1) + (a+2)(b+2) + \dots \\ + (A-1)(B-1) + AB \quad \text{〔計 } n \text{ 項〕}$$

$$= \frac{n}{6} [a(2b+B) + A(2b+b) + (B-b)]$$

這一個公式用何法求得，原書沒有交代。我們推測起來，大概是從等差級數和自然數的平方級數推廣而得的。

等差級數求總和的公式是很簡單的。設首項是  $a$ ，末項是  $1$ ，項數是  $n$ ，則總和

$$S = \frac{1}{2}n(a+1) \dots \dots \dots (1).$$

張邱建算經早已把這一個公式應用，但未經證明。據宋朝楊輝所著田畝比類乘除捷法（一二七五）中的『梯槩』算法，知道這公式大概是利用如圖二的圖形求得的。這理由很簡單，不必說明

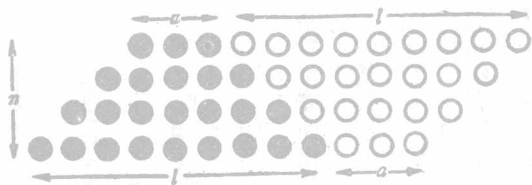


了。

自然數的平方級數，在沈括及沈括以前的書中雖未見，但稍後的楊輝書中有『四隅乘』的算法，就是這一種級數。楊氏的書多介紹古法，極少自己發明。設想這一種級數算法早在沈括以前就有了。這級數的開首  $n$  項是：

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots, n^2$$

就圖形來說，是堆物成正方稜台，頂層 1 個，以下逐層是每邊多 1 個的正方形。中國古代利用圖形來研究數，是常用的方法。這級數求總和的方法，可能



〔圖 二〕

也是利用圖形的，（如圖三）把正方稜台的各層剖析而為若干連續奇數的和，那末總數裏有  $n$  個 1（圖是假定  $n=5$  繪成的，實際  $n$  不論何數，都是一樣）， $(n-1)$  個 3， $(n-2)$  個 5，……。

把它們改排一下，先連排  $n$  個 1，再續排  $(n-1)$  個 3， $(n-2)$  個 5，……得圖四黑點所示的形式。又用兩個同樣的正方稜台各層的數，各照原式配在兩旁，（如圖四



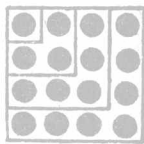
$$1^2 = 1$$



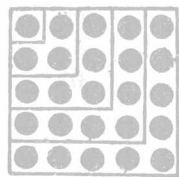
$$2^2 = 1 + 3$$



$$3^2 = 1 + 3 + 5$$



$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$



$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

〔圖 三〕