



文登教育集团课堂用书
考研数学强化班指定讲义

inner 赢家图书

2010 >>>

考研数学 核心题型

经济类·数学三

—— 始于1996年，每年服务30万考生 ——

陈文灯 主编

- >> 超级畅销书陈文灯《**考研数学复习指南**》配套姊妹篇
- >> 本书提出一个观点，**数学也需要记忆**，记定理、公式，背核心题型
- >> 本书揭示一个事实，**考数学就是考基础、考题型**，考代表数学本质的核心题型



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS



文登教育集团课堂用书
考研数学强化班指定讲义

赢家图书

2010 >>>

考研数学

核心题型

:::::

::::: [经济类·数学三]

—— 始于1996年，每年服务30万考生 ——

陈文灯 主编

陈启浩 武海燕 副主编



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

数学问题主要是由各种类型的题(题型)构成的。本书是一本省时、省力、高效的考研数学题型辅导书。它以 20 多年的考研数学试卷为素材,通过分析、归纳,遴选出 170 个核心题型。其内容包括“高等数学题型”、“线性代数题型”和“概率论与数理统计题型”三部分,涵盖《考研数学大纲》(经济类·数学三)的全部内容。书中给出了各类题型的解题方法和技巧,有些方法和技巧是编者独创的,例如,连续函数在闭区间上的有关命题的证明方法、文字不等式的证明方法和各种辅助函数的作法等。这些方法和技巧能大大提高学生的复习效率,化难为简,在考场上常常能直书正确答案,从容过关。

本书适合于参加考研的学生在复习时自学研读,也可以作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读,从中可领略数学科学的简约之美和数学运算技巧的奇妙。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学核心题型. 经济类. 数学三/陈文灯主编.

北京:北京航空航天大学出版社,2009.3

ISBN 978-7-81124-633-9

I. 考… II. 陈… III. 高等数学—研究生—入学考试—
解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 022225 号

考研数学核心题型

[经济类·数学三]

陈文灯 主编

责任编辑 伍 仁

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100191) 发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026

<http://www.buaapress.com.cn> E-mail:bhpress@263.net

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:24 字数:614 千字

2009 年 3 月第 1 版 2009 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81124-633-9 定价:36.80 元

前 言

考研的几门课中,数学是考生公认的最难复习、最难考的一门课。为此,不少学生不得不放弃钟爱的专业,报考不考数学的专业;多数人硬着头皮抱着试试看的态度参加复习考试。数学果真那么可怕,那么难吗?对于原来数学基础不好,又想考高分(135分以上)的考生来说,只要具备两个条件:① 比较强的记忆力;② 比较强的模仿能力,即可圆“高分梦”。

记忆的作用在于记住重要的概念、理论与定理公式,以及记住计算方法与技巧。没有记住的东西就无模仿可言,可见记忆之重要。一般人都知道学英语需要记忆,单词需要背诵,其实学数学也需要记忆,要在理解的基础上背重要的定理、公式和概念,背核心的题型。

模仿是指对解题方法和技巧的一种描摹或仿效。数学题千千万,如果都用东施效颦的方法,姑且不说做不到,也不会有什么效果。要模仿就应该抓住常考题型进行相似或变异题的训练。无论是以题型为纲进行的数学实践(考研辅导班),还是出版书籍的反馈信息,都证明:抓题型就是抓解题方法和技巧的根本和关键。就是基于这样的考虑,我们才编写了这样一套与《考研数学复习指南》(经济类)相配套的、复习起来省时、省力的考研数学核心题型教材。希望书中的方法和技巧能够在较短的时间里大大提高学生的复习效率,化难为简,从容过关。

本书的特点如下:

① 严格按照《考研数学大纲》的要求,对国内外文献资料,尤其是对 20 多年来考研试题进行了归纳总结,精选出 203 个题型。

② 对每个题型进行详尽分析,指出其特点和易混、易错的地方。

③ 书中有许多题型的解题方法和技巧是我们苦心孤诣、冥思苦想出来的,决非市面上其他书籍所共有。

④ 有些题解后有评注,虽然寥寥数语,却可起到画龙点睛、开拓思

路的作用。

⑤ 本书编写属上课讲义的形式,可能更贴近考生。

本书适合于参加研究生入学考试的同学在复习时自学研读,也可作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读,并从中领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙。

书中若有不当之处,敬请读者批评指正。

陈文灯

2009年2月

目 录

第 1 篇 高等数学题型

第 1 章 极限和连续	1
1.1 重要定理	1
1.2 重要公式	3
1.3 函数的极限	4
题型 1 无穷小的比较或确定无穷小的阶	4
题型 2 求未定式函数极限	5
题型 3 求分段函数在分界点的极限	12
题型 4 极限式中常数的确定	13
1.4 数列的极限	15
题型 5 求各种类型(∞/∞ 型、 1^∞ 型、 $\infty-\infty$ 型)的数列极限	15
题型 6 给出数列 $\{x_n\}$ 通项表达式,求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	17
题型 7 数列 n 项和 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$,当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限	19
题型 8 n 个因子乘积,当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限	21
1.5 函数的连续性	22
题型 9 函数连续性的讨论	22
题型 10 确定函数的间断点及其类型	23
1.6 杂 例	25
题型 11 从含有 $f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 的方程中求解 $f(x)$	25
题型 12 当 $x \rightarrow 0$ 时,求含有 $e^{\frac{1}{x}}$, $\arctan \frac{1}{x}$, $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$, $ x $ 的极限	27
题型 13 含 $f(x+a)-f(x)$ 的非 $\frac{0}{0}$ 型极限式且 $f(x)$ 可导	28
第 2 章 导数与微分	29
2.1 导数和微分的概念	29
2.2 导数公式和运算法则	30
2.3 重要定理	31
2.4 与导数定义和性质有关的命题	31

题型 14	求含有抽象函数的 $\frac{0}{0}$ 型极限	31
题型 15	与抽象函数的导数相关的命题	34
题型 16	判断函数的可导性	36
2.5	各种函数的导数或微分	37
题型 17	求一元复合函数的导数或微分	37
题型 18	求一元隐函数的导数或微分	37
题型 19	求幂指函数的导数或微分	39
题型 20	求函数表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分	40
题型 21	求分段函数的导数或微分	40
题型 22	求简单函数的高阶导数	43
第 3 章	不定积分	47
3.1	不定积分	47
3.2	三种基本积分方法	48
3.3	不定积分中的概念	56
题型 23	与原函数相关的命题	56
3.4	各种函数的不定积分	57
题型 24	求简单有理函数的不定积分	57
题型 25	简单无理函数的不定积分	59
题型 26	三角有理式的积分	60
题型 27	分段函数的不定积分	63
题型 28	含对数函数、反三角函数的不定积分	65
题型 29	复合函数的不定积分	66
题型 30	计算隐函数的不定积分	67
第 4 章	定积分	69
4.1	定积分的基本性质	69
4.2	重要定理	69
4.3	重要公式	70
4.4	计算定积分的方法	71
4.5	反常积分	72
4.6	与定积分的定义和性质相关的命题	74
题型 31	定积分的估值	74
题型 32	变限积分的求导问题	75
4.7	各种类型定积分的计算	76
题型 33	求分段函数的定积分	76

题型 34	求含有绝对值符号的定积分	77
题型 35	求被积函数中含有变上限积分的定积分	78
题型 36	求对称区间 $[-l, l]$ 上的定积分	79
题型 37	求周期函数的定积分	81
题型 38	求被积函数的分母为两项,分子恰为其中一项的定积分	82
题型 39	求由三角有理式与初等函数通过四则运算、复合运算或变量代换所得式的定积分	82
题型 40	定积分等式的证明	83
题型 41	定积分不等式的证明	87
4.8	反常积分	91
题型 42	反常积分的计算及收敛	91
第 5 章	微分中值定理	93
5.1	闭区间上连续函数的性质	93
5.2	微分中值定理	93
5.3	闭区间上连续函数的命题	94
题型 43	闭区间上连续函数命题的证明	94
5.4	中值定理的应用	98
题型 44	证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理	98
题型 45	证明某个函数恒等于一个常数的命题	99
题型 46	命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明	100
题型 47	欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立	101
题型 48	欲证结论:在 (a, b) 内至少存在 $\xi, \eta (\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式	104
第 6 章	一元微积分的应用	106
6.1	重要定理和结论	106
6.2	导数的应用	106
题型 49	一元函数单调增减性的判别	106
题型 50	一元函数极值的判定或求解	109
题型 51	求一元函数的最值及简单应用	110
题型 52	曲线的拐点或凹凸区间的判定或求解	111
题型 53	函数曲线的渐近线方程的计算与导数的判定	112
6.3	方程的根	114
题型 54	方程根的存在性问题	114
题型 55	方程根的个数的研究	115
题型 56	方程根的唯一性问题	116
6.4	定积分的应用	118

题型 57 利用微元法解题	118
题型 58 求平面图形的面积	119
题型 59 求旋转体体积	121
第 7 章 常微分方程	123
7.1 二阶线性微分方程解的性质	123
7.2 二阶线性微分方程解的结构定理	123
7.3 一阶微分方程的求解	124
题型 60 一阶可分离变量方程的求解	124
题型 61 一阶齐次微分方程的求解	125
题型 62 一阶线性微分方程的求解	127
7.4 二阶或二阶以上微分方程的求解	129
题型 63 有关二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程解的结构的命题	129
题型 64 求二阶常系数齐次线性或非齐次线性微分方程的通解	130
题型 65 微分方程的应用	135
题型 66 求一阶线性差分方程的通解或特解	136
第 8 章 多元函数微分学	138
8.1 连续、可微和可导的关系	138
8.2 多元函数的极值	138
8.3 多元函数微分	139
题型 67 有关二元函数定义域、极限、连续的计算题	139
题型 68 简单显函数 $z=f(x,y)$ 偏导数的计算	140
题型 69 考查二元函数 $z=f(x,y)$ 的连续、偏导及可微性	141
题型 70 多元复合函数偏导数的计算	142
题型 71 隐函数偏导数的计算	147
题型 72 多元函数全微分的计算	150
8.4 多元函数的极值和最值	151
题型 73 求多元函数的极值	151
题型 74 求多元函数的最值	154
第 9 章 二重积分	156
9.1 二重积分的性质和定理	156
9.2 二重积分的计算	157
9.3 二重积分	159
题型 75 更换二重积分的积分次序	159
题型 76 选择积分次序	160
题型 77 积分区域关于坐标轴对称的二重积分	162

题型 78	分段函数的二重积分	164
题型 79	被积函数 $f(x, y)$ 中含有绝对值符号的二重积分	166
题型 80	被积函数 $f(x, y)$ 中含有最值符号 $\max$ 或 $\min$ 的二重积分	167
题型 81	二重积分等式的证明	168
题型 82	二重积分不等式的证明	169
第 10 章	无穷级数	171
10.1	基本性质	171
10.2	级数的判敛法	171
10.3	幂级数	173
10.4	七个常见的函数展开式(必须熟记)	174
10.5	与级数概念和性质相关的命题	175
题型 83	判别数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性, 并附有“若收敛时, 求其和”的命题 ..	175
题型 84	利用级数敛散性的定义及性质, 判断级数的敛散性	176
10.6	级数敛散性的判别	177
题型 85	正项级数敛散性的判别	177
题型 86	交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ($u_n > 0$) 敛散性的判别	180
题型 87	任意项级数敛散性的判别	182
题型 88	有关数项级数敛散性的证明	185
题型 89	给出函数 $f(x)$ 的某种条件, 形如 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的级数的敛散性的证明 ..	187
题型 90	利用级数证明数列 $\{a_n\}$ 极限的存在或求解某些特殊极限	188
10.7	幂级数	189
题型 91	求幂级数的收敛域或收敛半径	189
题型 92	求函数在指定点的幂级数展开式	191
题型 93	无穷级数求和	194
第 11 章	函数方程与不等式证明	199
11.1	函数方程	199
题型 94	利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求函数方程	199
题型 95	利用极限求函数方程	199
题型 96	已知函数在一点的导数及函数方程, 求函数方程	200
题型 97	已知函数方程中含有变上限积分, 求函数方程	200
题型 98	已知函数连续, 且函数式中含函数的定积分、极限或二重积分, 求函数方程	203
题型 99	已知函数方程中含有偏导数条件, 求函数方程	204

11.2 不等式证明	204
题型 100 存在一个点 $\xi \in (a, b)$, 使得不等式成立或不等式通过变形, 一端可写成 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 的命题的证明	204
题型 101 在某一区间 (a, b) 不等式命题成立的证明	205
题型 102 文字不等式的证明	207
题型 103 函数 $f(x)$ 二阶和二阶以上可导的不等式命题的证明	208
题型 104 杂 例	209
第 12 章 微积分在经济中的应用	211
12.1 基本概念和公式	211
12.2 复利问题	212
题型 105 与概念相关的问题	212
题型 106 一元函数微分学在经济中的应用(利润、价格等问题)	213
题型 107 复利问题	216
题型 108 一元积分学在经济中的应用	216
题型 109 二元函数微分学在经济中的应用(最值问题)	217
题型 110 微分方程在经济中的应用	218

第 2 篇 线性代数题型

第 13 章 行列式	219
13.1 重要定理和性质	219
13.2 重要结论	219
题型 111 与行列式的定义和性质相关的命题	220
题型 112 数值型行列式的计算	221
题型 113 行列式的余子式或代数余子式线性组合的计算	226
题型 114 计算抽象行列式	228
第 14 章 矩 阵	231
14.1 矩阵的运算性质	231
14.2 重要结论	231
14.3 逆矩阵	232
题型 115 有关逆矩阵的计算问题	232
题型 116 矩阵可逆的证明	235
14.4 矩阵的运算	236
题型 117 有关矩阵运算的命题	236

题型 118 求矩阵的行列式	238
题型 119 与伴随矩阵相关的命题	240
14.5 初等矩阵	241
题型 120 有关初等变换和初等矩阵的命题	241
第 15 章 向 量	244
15.1 重要结论	244
15.2 内积和施密特正交化方法	245
15.3 向量题型	245
题型 121 讨论向量组的线性相关性	245
题型 122 求向量组的极大线性无关组和秩	249
题型 123 有关向量组或矩阵的秩的计算与证明	250
题型 124 有关向量的线性表示的问题	252
题型 125 将向量组正交化	256
第 16 章 线性方程组	257
16.1 重要性质和定理	257
16.2 有关线性方程组的题型	258
题型 126 有关线性方程组的基本概念题	258
题型 127 有关基础解系的命题	259
题型 128 线性方程组的求解	260
题型 129 矩阵方程的求解	264
题型 130 讨论两个线性方程组解之间的关系	266
第 17 章 特征值与特征向量	269
17.1 重要结论	269
17.2 矩阵的特征值与特征向量	270
题型 131 求数值型矩阵的特征值与特征向量	270
题型 132 求抽象矩阵的特征值与特征向量	272
题型 133 特征值与特征向量的逆问题	273
17.3 相似矩阵及其对角化	275
题型 134 相似矩阵的判定及其逆问题	275
题型 135 矩阵可对角化的判定及其逆问题	276
题型 136 有关实对称矩阵的命题	277
第 18 章 二次型	279
18.1 重要结论	279
18.2 二次型题型	279

题型 137	二次型所对应的矩阵及其性质	279
题型 138	用正交变换法化二次型为标准型	281
题型 139	有关正定的判定	285

第 3 篇 概率论与数理统计题型

第 19 章 事件的概率

288

19.1	重要性质	288
19.2	常用结论	289
19.3	古典概型和几何概型	290
题型 140	古典概型的概率计算	290
题型 141	几何概型的概率计算	291
19.4	概率的概念、性质及计算	292
题型 142	有关事件的独立性的命题	292
题型 143	利用逆事件概率公式 $P(A)=1-P(\bar{A})$ 计算概率	294
题型 144	利用加法公式、乘法公式和条件概率公式计算概率	294
题型 145	利用全概率公式与贝叶斯公式计算概率	297
题型 146	利用事件的独立性和伯努利概型计算概率	300

第 20 章 随机变量及其分布

302

20.1	重要定理和结论	302
20.2	一维随机变量及其分布	302
题型 147	与一维随机变量概念和性质相关的命题	302
题型 148	求离散型随机变量的分布律或分布函数	304
题型 149	求连续型随机变量的概率密度或分布函数	306
题型 150	由已知分布求概率或由已知概率求分布	307
题型 151	求一维随机变量函数的概率分布	309
题型 152	综合题	313

第 21 章 多维随机变量及其分布

315

21.1	重要结论	315
21.2	二维随机变量及其分布	315
题型 153	与二维随机变量概念、性质有关的命题	315
题型 154	求二维随机变量的各种分布(分布律,边缘分布律,边缘分布密度)	317
题型 155	随机变量独立性的判别	323
题型 156	由已知分布求概率	324

题型 157 求二维随机变量函数的分布·····	326
题型 158 关于二维正态分布问题·····	331
第 22 章 随机变量的数字特征 ·····	334
22.1 重要性质和公式·····	334
22.2 重要结论·····	335
22.3 一维随机变量的数字特征·····	335
题型 159 求一维随机变量的数字特征·····	335
题型 160 求一维随机变量函数的数字特征或逆问题·····	337
22.4 二维或多维随机变量的数字特征·····	338
题型 161 求二维随机变量及其函数的数字特征·····	338
题型 162 有关数字特征与独立性及相关性的关系的命题·····	343
题型 163 利用 0-1 分布求多维随机变量的数字特征 ·····	345
题型 164 综合应用题型 ·····	346
第 23 章 大数定律和中心极限定理 ·····	348
23.1 大数定律·····	348
23.2 中心极限定理·····	349
题型 165 估算随机事件的概率·····	349
题型 166 与大数定律有关的命题·····	353
题型 167 试验次数 n 的确定 ·····	353
第 24 章 数理统计 ·····	356
24.1 常用统计量·····	356
24.2 三个常见的抽样分布: χ^2 分布、 t 分布和 F 分布 ·····	356
24.3 正态总体条件下样本均值和样本方差的分布·····	358
24.4 数理统计中的重要结论·····	358
24.5 参数估计的重要结论·····	359
24.6 统计量的基本概念·····	359
题型 168 求统计量的分布及概率·····	359
题型 169 求统计量的数字特征·····	361
24.7 参数估计·····	364
题型 170 求参数的点估计(矩估计和最大似然估计)·····	364

第 1 篇 高等数学题型

第 1 章 极限和连续

● 重要定理、公式和结论

1.1 重要定理

定理 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A$.

定理 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

定理 3 (极限的保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

定理 4 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$), 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

定理 5 (单调有界定理) 单调增加有上界 (或单调减少有下界) 数列一定有极限.

定理 6* (夹逼定理) 设在 x_0 的邻域内恒有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A, \quad \text{则} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

定理 7 (无穷大和无穷小的关系) 无穷大的倒数为无穷小; 非零的无穷小的倒数为无穷大.

定理 8 (无穷小的运算性质)

- (1) 有限个无穷小的代数和为无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积为无穷小;
- (3) 无穷小乘以有界变量为无穷小.

定理 9 设有函数 $f(x), g(x)$, 如果在自变量的同一变化过程中, 有 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

上式第二个式子中的两个极限若有一个不存在, 则代数 and 的极限必不存在; 若两个极限都不存在, 则代数 and 的极限不一定存在.

加法运算可推广到有限个中去.

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0);$$

(4) $\lim [cf(x)] = c \lim f(x) = cA$, 其中 c 为常数.

定理 10 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续.

定理 11 初等函数在其定义域内的区间内连续(因为初等函数中可能有孤立点, 所以是在区间内连续).

推论: 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$; 若没有说明 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$, 即极限符号和函数符号不能交换顺序.

定理 12 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 l , 那么它的任一子序列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛, 且极限也是 l ($n_k \rightarrow \infty$); 反之不真.

定理 13(洛必达法则)

法则 I ($\frac{0}{0}$ 型) 设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件

- (1) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = 0;$
- (2) $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某邻域内可导, 在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导), 且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞),

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则 II ($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件

- (1) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \infty;$
- (2) $f(x), g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导, 在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导), 且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞),

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

使用法则时需注意的事项:

- (1) 只有 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式才能使用法则;
- (2) 每用完一次法则, 要将式子整理化简;
- (3) 为简化运算, 经常将法则与等价无穷小结合使用;
- (4) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在(或 ∞) 不能 $\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在;

- (5) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 极限式中含有 $\sin x, \cos x$ (或 $x \rightarrow 0$ 时, 极限式中含有 $\sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$), 则

不能用洛必达法则.

1.2 重要公式

公式 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$

若极限式具有如下两个特点:

(1) 是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 这是首要特点, 是本质;

(2) $\sin \square$ 与分数线对面变量 $\square$ 形式一致, 则 $\lim_{\square} \frac{\sin \square}{\square} = 1.$

公式 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

特点如下:

(1) 是 1^∞ 型极限;

(2) 括号中 1 后的变量(包括符号)与指数幂互为倒数.

公式 3(抓大头准则)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

即求 $x \rightarrow \infty$ 的极限时, 抓住起决定性作用的 x 的最高次幂的项, 把其余的项略掉; 而求 $x \rightarrow 0$ 的极限时, 则正好相反.

公式 4(函数连续的充要条件)

函数在一点 x_0 连续的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

公式 5

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 以下各函数趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快为 $\ln x, x^a (a > 0), a^x (a > 1), x^x$.

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 通项趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快为 $\ln n, n^a (a > 0), a^n (a > 1), n!, n^n$.

(3) 常用数列极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \text{ 特例为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0 (|p| < 1); \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 (k > 0); \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(4) 常用函数极限:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

注: 若 $x \rightarrow \infty$ 的极限式中含有 $a^x (a > 0, a \neq 1)$, 特别是 e^x , 或 $\arctan x$, 或 $\operatorname{arccot} x$, 或 $|x|$ (或 $x \rightarrow 0$ 时, 极限式中含 $e^{\frac{1}{x}}$, 或 $\arctan \frac{1}{x}$, 或 $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$, 或 $|x|$), 一定分别求出 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ (或 $x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^-$) 时的极限, 若两者相等, 则 $x \rightarrow \infty$ (或 $x \rightarrow 0$) 时的极限存在, 否则不存在.