刘鸿文主编《材料力学》
（浙大 第四版）同步辅导

九章丛书

Mechanics of Materials

浙大 第四版

材料力学 下
全程辅导

编写 九章系列课题组
主编 苏志平

中国建材工业出版社

材料力学全程辅导

（浙大·四版）

下册

主编　苏志平
编写　九章系列课题组

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

材料力学全程辅导(浙大·四版)/苏志平主编.—北京:中国建材工业出版社,2004.8

ISBN 7-80159-529-0

Ⅰ.材… Ⅱ.苏… Ⅲ.材料力学-高等学校-数学参考资料 Ⅳ.TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 010698 号

【内容简介】 本书是为了配合由高等教育出版社出版的浙江大学刘鸿文主编《材料力学》Ⅰ、Ⅱ(第四版)的教材而编写的配套辅导用书。本书是高等学校机电类课程的教学辅导书。全书由重点内容概述、经典例题解析、考研试题选编、课后习题详解四分组成,旨在帮助读者掌握课程内容的重点、难点和疑点,提高分析问题、解决问题的能力。

本书可供使用浙江大学刘鸿文主编的《材料力学》Ⅰ、Ⅱ第四版教材的学生和教师参考,并可作为使用其他教材的读者或考研者的参考书。

材料力学全程辅导(浙大·四版)

下册

苏志平 主编

出版发行:中国建材工业出版社

地　　址:北京市西城区车公庄大街 6 号院 3 号楼

邮　　编:100044

经　　销:全国各地新华书店

印　　刷:廊坊华星印刷厂

开　　本:850mm×1168mm 1/32

印　　张:10.75

字　　数:280 千字

版　　次:2004 年 8 月第 1 版

印　　次:2004 年 8 月第 1 次印刷

印　　数:1~5000 册

书　　号:ISBN 7-80159-592-0/G·108

定　　价:11.80 元(下册)

前 言

《材料力学》一直是大中专院校机电类专业学生必修课程，其内容随着电子技术的发展而日趋丰富。这就产生了一个矛盾：一方面学生因所修课程越来越多而导致课外时间减少。另一方面因技术的进步又要求学生去了解比以前更多的知识。

今本书正是为了解决这一矛盾而精心编写的。

作为浙江大学刘鸿文主编的教材《材料力学》Ⅰ、Ⅱ第四版同步配套的习题全程辅导书。本书除了有传统辅导书的解题过程外，主要有以下特点：

1. 知识点窍：运用公式、定理及定义来点明知识点；

2. 逻辑推理：阐述习题的解题过程；

3. 解题过程：概念清晰、步骤完整、数据准确、附图齐全。

把**知识点窍——逻辑推理——解题过程**串联起来，做到融汇贯通，最后给出本书的习题答案。在解题思路和解题技巧上进行精练分析和引导、巩固所学、达到举一反三的效果。

“**知识点窍**”和“**逻辑推理**”是本书的精华所在，是由多位著名教授根据学生在解题过程中存在的问题，进行分析而研究出来的一种新型的、拓展思路的解题方法。“**知识点窍**”提纲挈领地抓住了题目的核心知识，让学生清楚地了解出题者的意图，而“**逻辑思维**”则注重引导学生思维，旨在培养学生科学的思维方法，即掌握答题的思维技巧。在此基础上提供了详细的“**解题过程**”，使学生熟悉整个答题过程中。本书在编写过程中，参考了刘鸿文老师编写的《材料力学》Ⅰ、Ⅱ（第四版），并借鉴了书中部分插图，在此深表感谢。

由于编者水平有限及时间仓促，不妥之处在所难免。希望读者不吝批评、指正。

编　者

2004 年 8 月

目 录

第十二章 弯曲的几个补充问题

12.1 内容概要

一、非对称弯曲

1. 梁无纵向对称面,或虽有纵向对称面但载荷并不在该对称面内的弯曲称为非对称弯曲。

2. 讨论非对称弯曲的应力仍以纯弯曲理论为基础,以平面假设和纵向纤维间无正应力为前提。

3. 非对称弯曲,最普遍的情况是包含杆件轴线的任意纵向平面内作用一对纯弯曲力偶矩,把这一力偶矩分解为作用于 xOz, xOy 两坐标平面内的 M_y,M_z,其弯曲正应力为

$$\sigma = \frac{M_z(I_y y - I_{yz} z)}{I_y I_z - I_{yz}^2} + \frac{M_y(I_z z - I_{yz} y)}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

X—— 向右为正

Y—— 向下为正

Z—— 向后为正

4. 中性轴位置的确定

中性轴上各点的正应力等于0,因此,

$$\sigma = \frac{M_z(I_y y_0 - I_{yz} z_0)}{I_y I_z - I_{yz}^2} + \frac{M_y(I_z z_0 - I_{yz} y_0)}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 0$$

规定:θ 是由 y 轴到中性轴的夹角,以逆时针为正,则

$$\tan\theta = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{M_y I_z - M_z I_{yz}}$$

5. 非对称弯曲中的特例

(1)$M_y = 0, M_z \neq 0$,在 xOy 平面内作用纯弯曲力偶 M_z,xOy 平面为形心主惯性平面,即 y、z 轴为截面形心主惯性轴,$I_{yz} = 0$,问题

就简化为平面弯曲：

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

而且，中性轴与 z 轴重合，垂直于中性轴的 xoy 平面，既是梁挠曲线所在平面，又是弯曲力偶矩 M_z 的作用平面。当弯曲力偶矩 M_z 的作用平面不与形心主惯性平面重合，只是平行时，以上结果仍适用。

(2) $M_y \neq 0, M_z \neq 0$，但 xOy, yOz 同为形心主惯性平面，y, z 为截面形心主惯性轴，$I_{yz} = 0$。问题可简化为形心主惯性平面内的弯曲，即两个平面弯曲的叠加：

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\tan\theta = -\frac{M_z}{M_y I_z}$$

(3) 非对称横力弯曲，例如矩形截面的斜弯曲。非对称的横力弯曲往往同时出现扭转变形。对实体杆件，在通过截面形心的横力作用下，可以省略上述扭转变形，把载荷分解成作用于 xy 和 xz 两个平面内的横向力，并用以计算弯矩 M_z 和 M_y，然后便可将纯弯曲的正应力计算公式用于横力弯曲的正应力计算。

二、弯曲中心

1. 对任意横截面的杆件，沿形心主惯性轴 y 和 z 轴方和的剪应力的合力（即剪力）的作用线，总通过截面所在平面上的一固定点。该点称为截面的弯曲中心，或剪切中心，简称弯心。

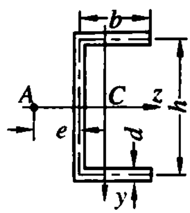
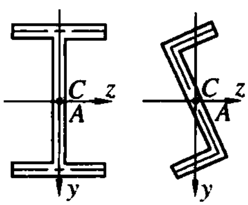
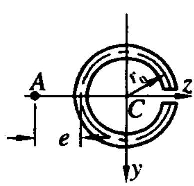
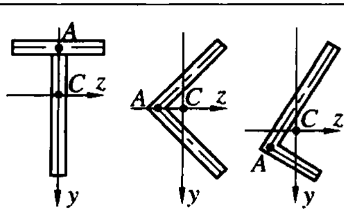
2. 当横向外力通过弯心时，杆件只有弯曲而无扭转变形。

3. 弯曲中心的位置仅与截面的几何形状和尺寸有关，与所加载荷的大小及方向无关。弯曲中心必在横截面对称轴上，但不一定在横截面上。

4. 弯曲中心与截面的形心是两个不同的概念。当截面具有两个对称轴或具有一个反对称中心时，弯心与形心重合，但一般情况下，两者不在同一位置。

5. 以下给出了几种开口薄壁截面的弯曲中心的位置：

表 12－1 几种开口薄壁截面的弯曲中心的位置

截 面 形 状	弯曲中心 A 的位置
	$e=\dfrac{b^2h^2\delta}{4I_z}$
	与形心重合
	$e=r_0$
	两个狭长矩形条中心线之交点

三、开口薄壁杆件的剪应力

当横向力作用在开口薄壁杆件横截面的弯曲中心时，杆件只

有弯曲而无扭转，即横截面上只有弯曲正应力和弯曲剪应力，而无扭转剪应力，截面边缘上的剪应力与截面边界相切且沿壁厚均匀分布，可以导出截面上任一点处的剪应力，即

$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{I_z t} + \frac{Q_z S_y^*}{I_y t}$$

y,z 轴 —— 横截面形心主惯性轴

Q_y, Q_z—— 横截面上平行于 y,z 轴的剪力

S_y^*, S_z^* —— 所求剪力点以外一侧截面面积对 y,z 轴的静矩

I_y, I_z—— 整个横截面面积对 y,z 轴的惯性矩

t—— 该点处的壁厚

四、用奇异函数求弯曲变形

1. 奇异函数定义如下：

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0, & x<a \\ (x-a)^n, & x>a \end{cases}$$

其积分规则为

$$\int_{-\infty}^{x} \langle x-a\rangle^n \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{1}{n+1}\langle x-a\rangle^{n+1}, & x>a \end{cases}$$

2. 用奇异函数表示的梁弯矩，梁变形的普遍方程为：

$$(1) M = \sum_{j=1}^{n} M_{ej}\langle x-l_i\rangle^0 + \sum_{j=1}^{n} P_j\langle x-l_i\rangle^1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2!}q_j\langle x-l_i\rangle^2$$

$$(2) EI\theta = EI\theta_0 + \sum_{j=1}^{n} M_{ej}\langle x-l_i\rangle^1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2!}P_j\langle x-l_i\rangle^2 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3!}q_j\langle x-l_i\rangle^3$$

$$(3) EIy = EIy_0 + EI\theta_0 x + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2!}M_{ej}\langle x-l_i\rangle^2 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3!}P_j\langle x-l_i\rangle^3 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4!}q_j\langle x-l_i\rangle^4$$

3. 应用该方法应当注意：

(1) 坐标原点应选在梁的最左端；

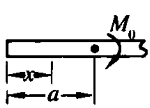
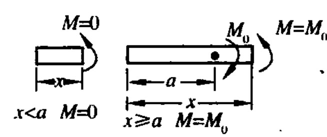
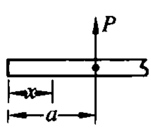
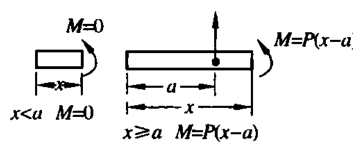
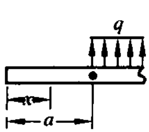
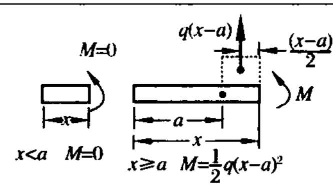
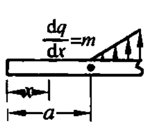
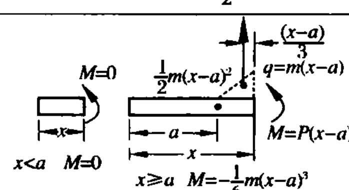
(2) 外力 q 与 P 向上为正，反之为负；顺时针旋转的外力偶 M_e 为正，反之为负；

(3) 分布载荷应一直延续到的最右端。如分布载荷 q 仅作用在梁内某一区段，则应将分布载荷延至梁的最右端，并在延伸部分同时加上大小相等的反向分布载荷 q；

(4) 以上各式，应从坐标原点写至梁的最右端，如须求梁中间某一截面处的弯矩，转角或挠度时，凡 $(x-l_i)$ 为负值的各项均去掉，剩下的就是 M,θ,y 方程中应有的各项。

4. 常见载荷下梁任意截面上的奇异函数见表 12－2。

表 12－2　常见载荷下梁任意截面上的弯矩奇异函数表示

载　荷	奇异函数	函　数　含　义
	$M=M_0(x-a)^0$	
	$M=P(x-a)$	
	$M=\dfrac{q(x-a)^2}{2}$	
	$M=-\dfrac{m(x-a)^3}{6}$	

五、有限差分法

它是一种数值法,把求解微分方程的问题转变为求解代数方程组。

12.2 经典例题解析

例 12-1 图 12-1 所示矩形截面简支梁,已知 $P=15\text{kN}$,$E=10\text{GPa}$

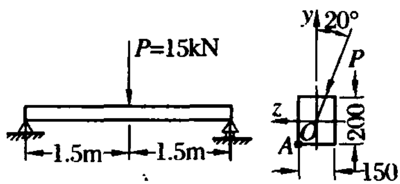


图 12-1

试求:(1) 梁的最大正应力;(2) 梁中点的挠度。

【知识点窍】 $I_{yz}=0$,可简化为形心主惯性平面内的弯曲的叠加。

【解题过程】 $\because$ 截面对称轴为 y,z 轴

$\therefore I_{yz}=0$

最大弯矩在梁中面上,且 $M_{z\max}=\dfrac{P\cos20°L}{4}$

$$M_{y\max}=\frac{P\sin20°L}{4}$$

(1) 梁的最大弯曲正应力

最大正应力在截面 A 点,$y_{\max}=100\text{mm}$,$z_{\max}=75\text{mm}$

代入公式得,

$$\sigma_{t\max}=\frac{M_{z\max}y_{\max}}{I_z}+\frac{M_{y\max}z_{\max}}{I_y}$$

$$=\frac{M_{z\max}}{W_z}+\frac{M_{y\max}}{W_y}$$

$$= \frac{15 \times 10^3 \times \cos 20° \times 9}{2 \times 0.15 \times 0.2^2} + \frac{15 \times 10^3 \times \sin 20° \times 9}{2 \times 0.15 \times 0.2^2}$$

$$= 15.7 \times 10^6 \text{Pa} = 15.7 \text{MPa}$$

(2) 梁中点的挠度

梁中面形心因 P_y 引起的垂直位移为

$$f_y = \frac{P_y l^3}{48EI_z} = \frac{Pl^3 \cos 20°}{48EI_z}$$

$$= \frac{15 \times 10^3 \times 3^3 \times \cos 20° \times 12}{48 \times 10 \times 10^9 \times 0.15 \times 0.2^3}$$

$$= 7.93 \times 10^{-3} \text{m} = 7.93 \text{mm}$$

梁中面形心因 P_z 引起的水平位移为

$$f_z = \frac{P_z l^3}{48EI_y} = \frac{Pl^3 \sin 20°}{48EI_y}$$

$$= \frac{15 \times 10^3 \times 3^3 \times \sin 20° \times 12}{48 \times 10 \times 10^9 \times 0.15^3 \times 0.2}$$

$$= 5.13 \times 10^{-3} \text{m} = 5.13 \text{mm}$$

故梁中面形心的总挠度为

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = 9.44 \text{mm}$$

例 12－2　确定壁厚为 δ，半径为 r 的薄壁截面的弯曲中心

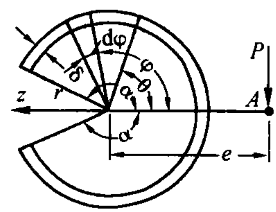


图 12－2

【知识点窍】　开口薄壁杆件弯曲中心的确定。先由 $\tau = \frac{QS_z^*}{I_z\delta}$ 求出剪应力，再由合力矩定理　$Pe = \int_A \tau r \mathrm{d}A$ 确定弯曲中心。

【解题过程】　在与 z 轴夹角为 θ 处，其剪应力为

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z\delta}$$

式中

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r\sin\varphi)^2 \delta r \mathrm{d}\varphi = r^2\delta(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

$$S_z^* = \int_A y \mathrm{d}A = \int_{\theta}^{\alpha} r\sin\varphi\delta r\mathrm{d}\varphi = r^2\delta(\cos\theta - \cos\theta)$$

故 θ 处剪应力为

$$\tau(\theta) = \frac{Q}{I_z} r^2(\cos\theta - \cos\alpha)$$

对圆心取矩,则有

$$Pe = \int_A r\tau \mathrm{d}A = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{Q}{I_z} r^3(\cos\theta - \cos\alpha) r\delta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{Qr^4\delta}{I_z}\int_{-\alpha}^{\alpha}(\cos\theta - \cos\alpha)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2Qr^4\delta}{I_z}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

代入 $I_z, Q = P$,且 $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$,整理得

$$e = \frac{4r}{2\alpha - \sin 2\alpha}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,得到半圆形开口薄壁截面的弯曲中心,$e = \frac{4r}{\pi}$;

当 $\alpha = \pi$ 时,得到圆形开口薄壁截面的弯曲中心,$e = 2r$。

例 12 - 3 试用奇异函数求图 12 - 3 所示梁的挠曲方程。

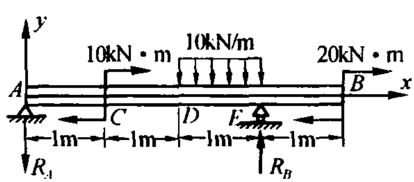


图 12 - 3

【知识点窍】 用奇异函数求挠曲线方程,先求支反力,确定各段的弯矩方程,写成奇异函数形式,积分确定挠曲线方程。

【解题过程】 由平衡条件求出支座反力:

$$R_A = \frac{25}{3}\text{kN} \qquad R_B = \frac{55}{3}\text{kN}$$

则各段弯矩方程为

AC 段:

$$M(x) = -\frac{25}{3}x$$

CD 段:

$$M(x) = 10 - \frac{25}{3}x$$

DE 段:

$$M(x) = 10 - \frac{25}{3}x - \frac{1}{2} \times 10 \cdot x^2$$

EB 段:

$$M(x) = 10 - \frac{25}{3}x - \frac{1}{2} \times 10 \cdot x^2 + \frac{25}{3}x$$

选取图 12 - 3 中所示坐标系。则挠曲线近似微分方程:

$$EIy''(x) = M(x) = -\frac{25}{3}(x-0)^1 + 10(x-1)^0 - \frac{10}{2}(x-2)^2 + \frac{10}{2}(x-3)^2 + \frac{55}{3}(x-3)^1$$

$$EIy'(x) = -\frac{25}{6}(x-0)^2 + 10(x-1)^1 - \frac{5}{3}(x-2)^3 + \frac{5}{3}(x-3)^3 + \frac{55}{6}(x-3)^2 + C_1$$

$$EIy(x) = -\frac{25}{18}(x-0)^3 + 5(x-1)^2 - \frac{5}{12}(x-2)^4 + \frac{5}{12}(x-3)^4 + \frac{55}{18}(x-3)^3 + C_1x + C_2$$

根据边界条件,当 $x = 0$ 时,$y(0) = 0$;当 $x = 3$ 时,$y(3) = 0$。得 $C_2 = 0, C_1 = \frac{215}{36}$

故，挠曲线方程为

$$EIy(x)=-\frac{25}{18}(x-0)^3+5(x-1)^2-\frac{5}{12}(x-2)^4+\frac{5}{12}(x-3)^4+\frac{55}{18}(x-3)^3+\frac{215}{36}x$$

12.3 考研精典题选编

例 12－4 图 12－4 为 Z 字形截面细长杆，在 xOz 平面内作用着力偶 M_y。已知截面图形对通过形心 C 的 y,z 轴的惯性矩 I_y,I_z 及惯性积 I_{yz}。试根据平面变形假设直接推导弹性范围内的弯曲正应力公式（推导过程中不能应用平面弯曲正应力公式）。

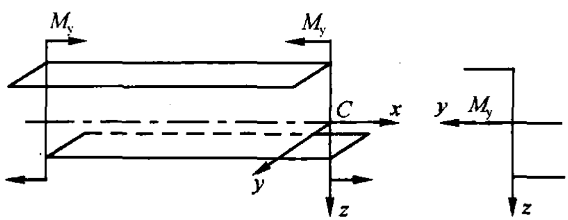


图 12－4

【知识点窍】 利用平面变形假设，及平衡方程推导。

【解题过程】 根据平面变形假设得，斜弯曲时横截面仍保持平面，因此，不妨设正应力：

$$\sigma=ay+bz+c \qquad ①$$

由平衡条件得，x 方向合力为零：

$$\sum F_x=0,\text{即}\int_A\sigma\mathrm{d}A=0$$

代入 ① 式得

$$a\int_A^y\mathrm{d}A+b\int_A z\mathrm{d}A+c\int_A\mathrm{d}A=aS_z+bS_y+cA=0 \qquad ②$$

由于 y,z 轴通过形心，因此：

$$S_y = S_z = 0$$

代入 ② 式得：$c = 0$

(2) z 方向合力矩为零：

$$\sum M_z = 0, 即\int_A \sigma y \mathrm{d}A = 0$$

代入 ① 式得：$a\int_A y^2 \mathrm{d}A + b\int_A yz\mathrm{d}A + 0 = aI_z + bI_{yz} = 0$ ③

(3) y 方向合力矩等于 M_y：

$$\sum M_y = M_y, 即 \quad \int_A \sigma z \mathrm{d}A = M_y$$

代入 ② 式得：$a\int_A yz\mathrm{d}A + b\int_A z^2 \mathrm{d}A + 0 = aI_{yz} + bI_y = M_y$ ④

联立 ③、④ 式解得：

$$a = -\frac{I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}M_y, b = \frac{I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}M_y$$

把 $a,b,c = 0$ 代入 ① 式得：

弯曲正应力公式：$\sigma = \dfrac{M_y(zI_z - yI_{yz})}{I_y I_z - I_{yz}^2}$

例 12－5 用奇异函数法求图 12－5 所示梁的挠曲线方程。

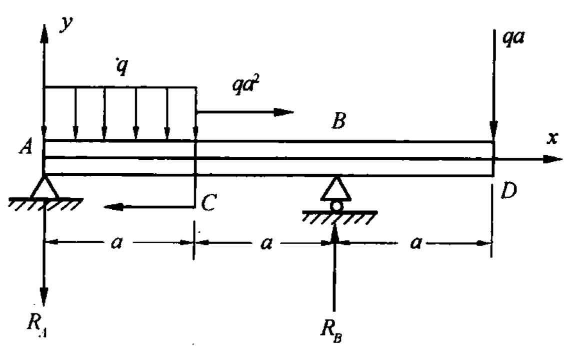


图 12－5

【知识点窍】 用奇异函数求挠曲线方程。

首先求支座反力，由此确定各的弯矩方程，然后采用奇异函数