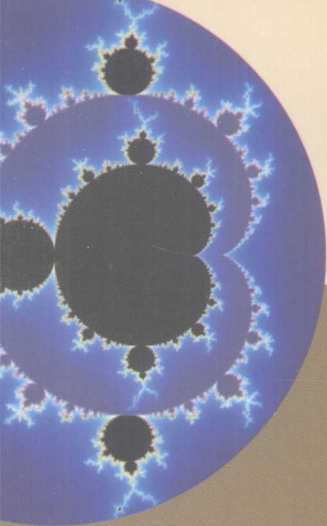

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学(一)

微积分

(第2版)

姚孟臣 编

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学(一)
微积分

(第2版)

姚孟臣 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.1,微积分/姚孟臣编.—2版.—北京:高等教育出版社,2008.12

ISBN 978-7-04-024911-8

Ⅰ.高… Ⅱ.姚… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O13 O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第176407号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张申申
责任绘图 杜晓丹 **版式设计** 王 莹 **责任校对** 朱惠芳
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	人民教育出版社印刷厂		
		版　　次	2004年3月第1版
开　　本	850×1168 1/32		2008年12月第2版
印　　张	12.75	**印　　次**	2008年12月第1次印刷
字　　数	310 000	**定　　价**	17.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 24911-00

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。全书共六章，内容包括：函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，多元函数微积分，无穷级数，常微分方程。本书按章配备了适量的习题，供教师和学生选用。

本书可以作为普通高等学校经济管理类各个专业的学生以及参加全国高等教育自学考试的考生学习微积分课程的教材和参考书，也可以满足成人高等教育以及高等职业教育各个专业的学生学习相关课程教学辅导的需要。

第 2 版前言

随着教学改革的不断深化，我国各高校经济与管理类专业的学生情况、不同专业对公共数学基础课的要求都有很大变化，教学内容的更新、教学课时数的调整都对数学基础课的教学工作和教材建设提出了新的要求。通过几年的教学实践，各院校结合实际情况对经济管理专业高等数学课程的教学内容、结构、方法、目的和要求进行了积极的探讨。为了适应对此类课程不同的需求，我们借鉴国内外经管类高等数学教材编写的经验教训，以多年来为北京大学等院校授课所用教材为基础重新修订了这套系列教材，增加了经管类学生必需的一些数学知识，使教材内容更加充实，使用面更广。

作为普通高等教育“十一五”国家级规划教材，本系列教材具有如下特色：

1. 选材合理，难易程度适当，能够满足各高校经管类专业基础数学课的不同需要，而又不显得庞杂和艰深；

2. 能以学生易于理解和接受的方式，确切地描述数学定义、概念，讲解理论和方法，而又不失数学的严谨性与系统性；

3. 内容安排层次分明、条理性强，讲解通俗易懂、深入浅出，不仅利于课堂教学，也便于学生自学；

4. 例题、习题的选配照顾到了理论、方法的练习和实际应用的练习，从整体上看数学的训练是充分的。

由于编者水平有限，书中难免有错漏之处，希望广大读者批评指正。

编　者

2008 年 3 月于世纪城

第1版前言

高等数学（包括微积分、线性代数、概率统计）是经济管理专业的一门基础课。根据高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革的总目标的要求，参照教育部有关自学考试的大纲，结合作者多年来为北京大学等院校讲授高等数学课程的实践，我们编写了这套教材。其中包括主教材《高等数学（一）微积分》、《高等数学（二）线性代数、概率统计》以及与之配套的《高等数学附册（习题分析与解答）》共三册。本书是主教材《高等数学（一）微积分》。

这套教材内容涵盖了教育部对经济管理专业《高等数学（一）》和《高等数学（二）》自学考试大纲的全部要求，并考虑到目前绝大多数综合大学和工程院校都设立了经济或管理学科的有关专业，但各校的不同专业方向对数学基础的要求有一定的差异。为此本书力图在学时不多的情况下，让读者了解或掌握高等数学中有关的重要概念、理论和方法以及它们的实际背景，从而建立正确的数学概念，学会使用数学的方法分析、描述、进而定量地解决经济管理学科中的一些实际问题。因此，教材的内容选取注意了科学性和系统性，广度和深度比较恰当，避免了大量的理论推导，更突出有关理论和方法的应用。

《高等数学（一）微积分》全书共八章，内容包括：函数及其图形、极限和连续、导数与微分、中值定理和导数的应用、一元积分学、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程。本书按章配备了适量的习题，供教师和学生选用。

本书可以作为一般院校经济管理各专业的数学基础课教材，

又可作为自学考试《高等数学（一）微积分》课程的主教材使用。对于微积分课程要求较高的文科类各专业，也可选用本书。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2003年9月6日

于北京大学中关园

目　　录

第一章　函数、极限、连续

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，也是高等数学研究的主要对象.极限是在研究变量（在某一过程中）的变化趋势时所引出的一个非常重要的概念.微积分学中的许多基本概念，例如连续、导数、定积分、无穷级数等等都是建立在极限的基础上，而极限方法又是我们研究函数的一种最基本的方法.在本章里，我们首先给出一元函数的定义，讨论函数的几个基本性质，并介绍反函数、复合函数以及初等函数.然后再分别给出数列极限、函数极限、无穷小量与无穷大量的定义，并讨论极限的一些基本性质以及计算极限的各种方法，最后给出函数连续性的有关概念.

§1　一元函数的定义及其图形

1.1　集合初步

1.1.1　集合的概念

集合是一个不能给出数学定义的概念，尽管如此，我们仍然可以给它一个定性描述.所谓**集合**就是按照某些规定能够识别的一些具体对象或事物的全体.构成集合的每一个对象或事物叫做集合的**元素**.例如：

（1）所有北京大学在校生的全体为一集合；

（2）方程 $x^3-2x^2-5x+6=0$ 的根的全体为一集合；

(3) 所有自然数[①]的全体为一集合;

(4) 一线段上所有点的全体为一集合.

在上述前两个例子中,每个集合只有有限多个元素,这种集合叫做**有限集**. 后两个例子中所给出的集合不是由有限个元素组成,这种集合叫做**无限集**.

通常集合用大写字母 A,B,C 表示,其元素用小写字母 a,b,c 表示.

设 A 是一个集合,如果 a 是 A 的元素,记作

$$a\in A,$$

读作 a 属于 A;如果 a 不是 A 的元素,记作

$$a \overline{\in} A \quad (\text{或 } a\notin A),$$

读作 a 不属于 A. 例如,变量 x 的取值范围构成的集合 X 叫做**变化域**,有 $x\in X$.

集合一般有两种表示法:**列举法**和**示性法**.

所谓列举法就是把集合的元素都列举出来. 例如,A 是由 1,3,5,7,9 这五个数组成的集合,记作

$$A=\{1,3,5,7,9\}.$$

也就是说$\{\quad\}$中将 A 的元素都一一列举出来了.

所谓示性法就是给出集合元素的特性. 一般用

$$A=\{a\mid a\text{ 具有的性质}\}$$

来表示具有某种性质的全体元素 a 构成的集合. 如上述的集合 A 也可以记作

$$A=\{2n-1\mid n<6,n\in \mathbf{N},n\neq 0\}.$$

由此可见同一个集合可以有不同的表示法,也就是说一个集合的表示法不是惟一的.

只含有一个元素 a 的集合叫做**单元集合**,记为$\{a\}$. 例如常数

---

① 自然数是指非负整数,它的全体记为 $\mathbf{N}$.

c 的变化域就是单元集合 $\{c\}$. 换句话说,若变量 x 的变化域是单元集合,则 x 是常量.

不含有任何元素的集合叫做**空集**,记为$\varnothing$. 例如方程 $x^2+1=0$ 的实数解的解集合就是空集. 把空集合也视为集合,正如我们把 0 也看作数一样,在数学上是方便的. 但要注意空集$\varnothing$与单元集合 $\{0\}$ 不是一回事.

由所研究对象的全体构成的集合称为**全集**,记作 Ω. 例如当讨论一元线性方程

$$ax+b=0 \quad (a\neq 0 \text{ 且 } a\in\mathbf{N}, b\in\mathbf{Q})$$

的有理解集合时,有理数集 $\mathbf{Q}$ 是一个全集. 需要指出的是全集是相对的. 在一种条件下是全集的集合,在另一种条件下可能就不是全集. 前例中,如果在实数范围内讨论一元线性方程 $ax+b=0$ $(a\neq 0)$ 的解集合时,那么 $\mathbf{Q}$ 就不是全集了.

设 A,B 是两个集合. 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即 $a\in A$ 必有 $a\in B$,那么称 A 为 B 的**子集合**,记作

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A,$$

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 如果 $A\subset B$, $B\subset C$,那么 $A\subset C$. 这说明了包含具有传递性,例如 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$,于是有 $\mathbf{N}\subset\mathbf{R}$. 容易看出,对于任意的集合 A,总有 $A\subset A$, $\varnothing\subset A$, $A\subset\Omega$ 成立.

例 1 设 $A=\{2,4,8\}$,则集合 A 的所有子集是$\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{2,4\}$, $\{2,8\}$, $\{4,8\}$, $\{2,4,8\}$. 注意,在考虑集合 A 的所有子集时,不要把空集$\varnothing$和它本身忘掉.

设 A,B 是两个集合. 如果 $A\subset B$, $B\subset A$,那么称集合 A 与 B **相等**,记作

$$A=B.$$

很明显,含有相同元素的两个集合相等.

例 2 设 $A=\{0,2,3\}$, $B=\{x \mid x \text{ 为方程 } x^3-5x^2+6x=0 \text{ 的解}\}$,则 $A=B$.

设 A,B 是两个集合. 称集合 $\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的**并集**,即由 A 与 B 的全体元素构成的集合,记作 $A\cup B$.

例 3 $\{1,2,3,4,5\}\cup\{1,3,5,7,9\}=\{1,2,3,4,5,7,9\}$.

并集具有以下的简单性质:

(1) $(A\cup B)\supset A$;

(2) $(A\cup B)\supset B$.

设 A,B 是两个集合. 称集合 $\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**,即由 A 与 B 的公共元素构成的集合,记作 $A\cap B$. 若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B **互不相交**.

例 4 $\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}=\{1,3,5\}$; $\{1,3,5\}\cap\{2,4,6\}=\varnothing$.

交集具有以下的简单性质:

(1) $(A\cap B)\subset A$;

(2) $(A\cap B)\subset B$.

设 A,B 是两个集合. 如果 B 的每一个元素对应于 A 的惟一的元素,反之 A 的每一个元素对应于 B 的惟一的元素,那么就说在 A 和 B 的元素之间建立了一一对应关系,并称 A 与 B **等价**,记作

$$A\sim B.$$

与自然数集 $\mathbf{N}$ 等价的任何集合,称为**可列集**. 显然,一切可列集彼此都是等价的. 今后我们常称这类集合中元素的个数为可列个(或可数个),并把有限个或可列个统称为**至多可列个**(或**至多可数个**).

例 5 设 $A=\{a \mid a=2n, n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{b \mid b=n^2+1, n\in\mathbf{N}\}$,则 $A\sim B$.

1.1.2 实数集

高等数学主要是在实数范围内讨论问题的,因此在这里我们有必要简单地回顾一下实数的一些属性.

人们对数的认识是逐步发展的,首先是自然数 $0,1,2,\cdots$. 由

自然数构成的集合叫做**自然数集**,记为 **N**,在 **N** 中我们可以定义加法和乘法的运算.其后发展到有理数,它包括一切整数(整数的集合用 **Z** 表示)与分数,每一个有理数都可以表示成$\frac{p}{q}$(其中 p, $q\in\mathbf{Z}$ 且 $q\neq0$).我们把有理数构成的集合叫做**有理数集**,记为 **Q**,在 **Q** 中我们可以定义四则运算.下面我们先来介绍有理数的两个性质.

在数轴上,每一个有理数都可以找到一个点表示它.例如,图 1-1 中的点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 就可以分别代表有理数 -4, $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, 3, 5. 我们把代表有理数 x 的点叫做**有理点**.由图可见,有理数集 **Q** 除了可以在其中定义四则运算外,还具有**有序性**(即在数轴上有理点是从左向右按大小次序排列的)和**稠密性**(即在任意两个有理点之间有无穷多个有理点).

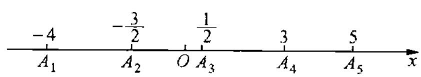

图 1-1

虽然有理点在数轴上是处处稠密的,但是它并没有充满整个数轴.例如边长为 1 的正方形,其对角线长为 x(见图 1-2),由勾股定理可知 $x^2=2$.设在数轴上的点 x 代表的数为$\sqrt{2}$,容易证明它不能表示成$\frac{p}{q}$($p, q\in\mathbf{Z}, q\neq0$)的形式,因此它不是有理数.这说明在数轴上除了有理点以外还有许多空隙.这些空隙处的点我们称之为**无理点**,无理点代表的数称为**无理数**.无理数是无限不循环的小数,如$\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, π 等,由它们所构成的集合叫做**无理数集**,记为 **I**.我们把有理数与无理数统称为**实数**,全体实数构成的集合叫做**实数集**,记为 **R**.与有理数集 **Q** 一样,实数集 **R** 也具有在

其中可以定义四则运算，有序以及处处稠密等性质，而且还具有一个与 $\mathbf{Q}$ 不同的特性，这就是实数的连续性（即实数点充满了整个数轴）.

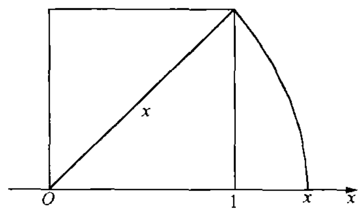

图 1-2

由于任给一个实数，数轴上就有惟一的点与它对应；反之，数轴上的任意一个点也对应着惟一的实数，可见实数集合等价于数轴上的点集. 因此在以后的讨论中，我们可以把数轴上的点与实数不加区分.

1.1.3 区间与邻域

在 $\mathbf{R}$ 的子集中，我们今后经常遇到的是各种各样的区间. 所谓**区间**就是介于某两点之间的一切点所构成的集合，这两个点称为区间的**端点**. 如果两个端点都是定数，称此区间为有限的，否则称为无限的. 常见的区间有：设 $a\in\mathbf{R}, b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，我们把集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)；把集合 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$；把集合 $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 称为**半开半闭区间**，分别记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$. 以上各种有限区间在数轴上都可以用一条线段来表示它们. 对于无限区间，例如 $\{x \mid x>a\}$，记作 $(a,+\infty)$；$\{x \mid x<a\}$，记作 $(-\infty,a)$；$\{a \mid a\in\mathbf{R}\}$，记作 $(-\infty,+\infty)$. 类似地，还有 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,a]$（注意，这里的 $+\infty$，$-\infty$ 以及 ∞ 只是一种符号，既不能把它们视为实数，也不能对它们进行运算）.

下面我们介绍邻域的概念.

设 $a\in\mathbf{R}$,$h\in\mathbf{R}$ 且 $h>0$. 称集合

$$\{x \mid |x-a|<h\}$$

为 a 的一个**邻域**,记作 $N_h(a)$,其中 h 为**邻域半径**;称集合

$$\{x \mid 0<|x-a|<h\}$$

为 a 的一个**空心邻域**,记作 $N_h(\bar{a})$. 当不必指明邻域半径时,我们用 $N(a)$,$N(\bar{a})$表示 a 的邻域和 a 的空心邻域. 称集合

$$\{x \mid a\leqslant x<a+h\} \text{ 和 } \{x \mid a-h<x\leqslant a\}$$

为 a 的**右邻域**和**左邻域**,记作 $N_h^+(a)$和 $N_h^-(a)$. 若上述集合除去 a 点,就称为 a 的**空心右邻域**和**空心左邻域**,记作 $N_h^+(\bar{a})$和 $N_h^-(\bar{a})$. 不必指明邻域半径时,记号中可省略 h.

1.2 函数的定义

历史上,"函数"一词是由著名的德国数学家莱布尼茨(Leibniz)首先引入数学的. 他是针对某种类型的数学公式来使用这一术语的,尽管当时他已经考虑到变量 x 以及和 x 同时变化的变量 y 之间的依赖关系,但还是没有能够给出一个明确的函数定义. 其后经欧拉(Euler)等人不断修正、扩充才逐步形成一个较为完整的函数概念.

在初等数学中,我们通过讨论变量之间的依赖关系,给出了函数概念的一个直观的描述:

设在某变化过程中有两个变量 x 和 y,变量 y 依赖于 x. 如果对于 x 的每一个确定的值,按照某个对应关系,y 都有惟一的值和它对应,y 就叫做 x 的函数,x 叫做自变量. x 的取值范围叫做函数的定义域. 和 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值,函数值的集合叫做函数的值域.

例 6 在真空中,物体在重力的作用下,从高度为 h m 处自由下落,下落的路程 s 是下落时间 t 的函数. 这个函数可以通过关系式: